Lehrbuch der Geometrie

zum

Gebrauche an höheren Lehranstalten.

Von

D. Eduard Heis,
Professor der Mathematik an der Königlichen Akademie zu Münster,

und

Thomas Joseph Eschweiler,
Director der höheren Bürgerschule zu Köln.

Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.

Erster Theil. — Planimetrie.

Köln,
Verlag der M. DuMont-Schauberg'schen Buchhandlung.
1858.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Vorwort zur ersten Auflage.

Ungeachtet der großen Anzahl von Lehrbüchern der Elementar-Geometrie, welche die ältere und neuere Literatur zum Schul- und Privatgebrauche aufweist, glaubten die Verfasser des gegenwärtigen dennoch nichts Unnützes zu thun, wenn sie durch Herausgabe desselben die Reihe der vorhandenen um ein neues vermehrten. Einmal nämlich schien ihnen der vorhandene Stoff, namentlich so weit er das System der eigentlich sogenannten Elemente enthält, einer besseren Gliederung und Anordnung fähig, als nach Euklid die meisten der bisherigen Lehrbücher aufweisen; dann aber vermißten sie in diesen auch diejenige Fülle von Uebungsstoff, welche zur Ausbildung der geometrischen Anschauung und Combination so unumgänglich nöthig ist. Außerdem gab eine genaue Erwägung jedes Einzelnen vielfachen Anlaß zum Wunsche, Besseres an die Stelle des Vorhandenen zu setzen. Dieses Bessere zu leisten, haben sie weder Zeit noch Mühe gespart, und dabei zwar einerseits die Schwierigkeit, andererseits aber auch den großen Nutzen einer gemeinschaftlichen Bearbeitung, bei welcher Alles einer gegenseitigen Kritik unterzogen wird, lebhaft empfunden und erfahren. Ob es ihnen gelungen, ein Lehrbuch zu Stande gebracht zu haben, das auf den Beifall der Sachverständigen Anspruch machen darf, müssen sie dem Urtheile dieser, namentlich unter ihren Fachgenossen, überlassen und begnügen sich zu bemerken, daß sie gesucht haben:

a) dem Ausdrucke der Sätze und Aufgaben überall die bestmögliche Abrundung und Bestimmtheit zu geben;
b) bei den Beweisen und Auflösungen die größte Strenge mit Einfachheit zu paaren;
c) die Anordnung des Materials so zu treffen, daß dadurch nicht allein das innerlich Verwandte äußerlich zusammen kommt, sondern auch das Auffinden des Einzelnen dem Nachsuchenden möglichst erleichtert werde.

Sie haben ferner gestrebt:

d) den Schüler allmählich zum Selbstfinden der Beweise und Auflösungen zu vermögen und, indem sie zu beiden

bloße Andeutungen und Fingerzeige geben, im Fortschritt der Erkenntniß die geistige Selbstthätigkeit desselben mehr und mehr in Anspruch zu nehmen;

c) endlich haben sie getrachtet, einen so reichlichen Stoff zur geometrischen Erfindung und Erkenntniß zu sammeln, daß nicht allein der Wißbegierde des fleißigen und strebsamen Schülers genugsame Nahrung geboten, sondern auch dem Lehrer eine Erleichterung verschafft werde, wenn er es nöthig oder rathsam findet, mit dem Uebungs-Material zu wechseln. In dieser Hinsicht stellt sich die zweite Abtheilung des vorliegenden Buches der „Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra", welche der auf dem Titel Erstgenannte der beiden Verfasser im Jahre 1837 herausgegeben hat, und deren seitdem wiederholte Auflagen für den nicht geringen Beifall sprechen, welchen diese Sammlung gefunden, hoffentlich nicht unpassend zur Seite.

Münster und Köln, im December 1854.

Die Verfasser.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Die Verfasser haben es sich bei der zweiten Auflage besonders angelegen sein lassen, nicht allein die sinnstörenden Druckfehler der ersten Auflage zu verbessern, sondern auch durch passende Zusätze die Brauchbarkeit des Buches zu erhöhen.

Münster und Köln, im December 1857.

Inhalt.

Erster Theil der Planimetrie.

Die Elemente.

Seite

Einleitung. — Grundbegriffe und Erklärungen 1

Erstes Capitel. Winkel. Parallelen.

1. **Abschnitt.** Sätze über Winkel beim Durchschnitte zweier geraden Linien. 1—14 5
2. **Abschnitt.** Sätze über Winkel beim Durchschnitte zweier geraden Linien mit einer dritten. — Parallellinien. 15—24 10
3. **Abschnitt.** Winkel des Dreiecks und Vielecks. 25—29 17

Zweites Capitel. Eigenschaften der Dreiecke, Parallelogramme, Trapeze und Polygone, mit Rücksicht auf die Seiten und Winkel.

1. **Abschnitt.** Von den Seiten eines einzelnen Dreiecks 1—6. 21
2. **Abschnitt.** Von der Congruenz der Dreiecke 7—15 24
3. **Abschnitt.** Geometrische Elementar-Aufgaben, deren Auflösung unmittelbar auf der Congruenz der Dreiecke beruht. 16—25 . 31
4. **Abschnitt.** Nichtcongruenz der Dreiecke. 26—30 36
5. **Abschnitt.** Von den Parallelogrammen und Trapezen 31—43 . . . 40
6. **Abschnitt.** Eigenschaften mehrerer gleich weit abstehenden Parallellinien. 44—49 43
7. **Abschnitt.** Die merkwürdigen Punkte im Dreiecke. 50—53 45

Drittes Capitel. Vom Kreise.

1. **Abschnitt.** Elementar-Eigenschaften des Kreises. 1—9. 48
2. **Abschnitt.** Lage einer geraden Linie und einer Kreislinie zu einander. Sehnen, Tangenten, Secanten. 10—17 51
3. **Abschnitt.** Die Winkel im Kreise. 18—21. 54
4. **Abschnitt.** Gegenseitige Lage zweier Kreise. 22—30. 57
5. **Abschnitt.** Aufgaben über den Kreis. 31—36. 60

Viertes Capitel. Inhalt der Figuren.

1. **Abschnitt.** Sätze über Rechtecke und Quadrate. 1—8 64
2. **Abschnitt.** Sätze über Gleichheit der Parallelogramme, Dreiecke und Trapeze. 9—20 68
3. **Abschnitt.** Vergleichung der Quadrate über den Seiten eines Dreiecks. — 21—33 73

Fünftes Capitel. Von den Proportionen.

Seite

1. Abschnitt. Vom Maße. Begriff des Verhältnisses und der Proportion. 1—16 83
2. Abschnitt. Sätze über Proportionen. 17—36 89
3. Abschnitt. Proportionen beim Durchschnitte gerader Linien. 37—40 . 95
4. Abschnitt. Aehnlichkeit der Dreiecke. 41—48. 99
5. Abschnitt. Proportionen am einzelnen Dreiecke und am Kreise. 49—59 103
6. Abschnitt. Elementar-Aufgaben zu den drei vorhergehenden Abschnitten. 60—69. 109
7. Abschnitt. Aehnlichkeit der Vielecke. 70—76 119
8. Abschnitt. Verhältniß des Flächeninhalts. 77—86. 125
9. Abschnitt. Aufgaben zum vorigen Abschnitte. 87—94. 135

Sechstes Capitel. Die regulären Vielecke und die Kreismessung.

1. Abschnitt. Allgemeine Eigenschaften der regulären Vielecke. 1—8. . 139
2. Abschnitt. Theilung des Kreisumfangs und Construction der regulären Vielecke. 9—17. 144
3. Abschnitt. Verhältniß der Kreise und der Kreisumfänge. 18—26. . 150
4. Abschnitt. Aufgaben. 27—31 158
5. Abschnitt. Kreismessung. 32—40 159

Zweiter Theil der Planimetrie.

Erweiterungen der Elemente und fortgesetzte Uebungen in der geometrischen Construction.

Siebentes Capitel. Uebungs-Aufgaben und Sätze als Anwendungen der sechs ersten Capitel.

1. Abschnitt. Anwendungen des ersten Capitels. 1—7 174
2. Abschnitt. Anwendungen des zweiten Capitels. 8—33 176
3. Abschnitt. Anwendungen des dritten Capitels. 34—63 181
4. Abschnitt. Anwendungen des vierten Capitels. 64—78 186
5. Abschnitt. Anwendungen des fünften Capitels. 79—101 188
6. Abschnitt. Anwendungen des sechsten Capitels. 102—110 193

Achtes Capitel. Aufgaben und Sätze über Dreiecke und Vielecke.

1. Abschnitt. Das gleichseitige Dreieck und das Quadrat. 1—21. . . 195
2. Abschnitt. Construction der Dreiecke aus gegebenen Stücken. 22—50 199
3. Abschnitt. Lehrsätze über Dreiecke im Allgemeinen. 51—65 204
4. Abschnitt. Aufgaben und Sätze über Vierecke. 66—75 209
5. Abschnitt. Construction von Dreiecken und Vielecken nach Bedingungen über die Lage der Ecken. 76—84 211

Seite

Neuntes Capitel. Lehrsätze und Aufgaben über den Kreis.

1. **Abschnitt.** Lehrsätze über den Kreis. 1—13 212
2. **Abschnitt.** Aufgaben über den Kreis. 14—42 215

Zehntes Capitel. Sätze und Aufgaben über den Inhalt der Figuren.

1. **Abschnitt.** Sätze und Aufgaben über Summe und Differenz der Quadrate. 1—11. 222
2. **Abschnitt.** Aufgaben über Verwandlung und Theilung der Figuren. 12—25. 224

Eilftes Capitel. Geometrische Oerter.

1. **Abschnitt.** Geometrische Oerter im Allgemeinen. Chordale. 1—17 . 227
2. **Abschnitt.** Aufgaben als Anwendungen der geometrischen Oerter. 18—30. 231

Zwölftes Capitel. Maxima und Minima.

1. **Abschnitt.** Größte und kleinste Entfernungen. 1—9 234
2. **Abschnitt.** Sätze über Maxima und Minima des Inhalts und Umfangs der Figuren. 10—24. 240
3. **Abschnitt.** Uebungs-Aufgaben. 25—50 246

Dreizehntes Capitel. Transversalen, harmonische Theilung, Pol und Polare eines Kreises.

1. **Abschnitt.** Sätze über Transversalen. 1—16 252
2. **Abschnitt.** Harmonische Theilung und harmonische Strahlen. 17—30 259
3. **Abschnitt.** Pol und Polare am Kreise. 31—39. 264

Vierzehntes Capitel. Sätze und Aufgaben über Berührungen oder das Apollonische Tactions-Problem.

1. **Abschnitt.** Aeltere Lösung. 1—8. 272
2. **Abschnitt.** Neuere Lösung der Hauptaufgabe 9—17. 277
3. **Abschnitt.** Die übrigen Fälle. 18—26. 282

Anhang I. zu Cap. V., Abschnitt 2, Nr. 36, über ungleiche Verhältnisse 286
Anhang II. zu Cap. V., Nr. 69, über einige irrationale Verhältnisse . . 288

Einleitung.

Grundbegriffe und Erklärungen.

1. Punkt ist dasjenige, was einen Ort im Raume bestimmt, ohne selbst ein Theil des Raumes zu sein. Er hat also weder Ausdehnung noch Theile.

2. Linie ist das, was ein Punkt durch seine Bewegung im Raume beschreibt; sie hat nur eine Ausdehnung (Dimension), Länge, aber keine Breite.

3. Eine Linie beschreibt im Allgemeinen durch Bewegung eine Fläche; diese hat zwei Dimensionen, Länge und Breite. Nur in besonderen Fällen entsteht durch die Bewegung einer Linie keine Fläche, sondern wiederum eine Linie*).

4. Durch die Bewegung einer Fläche entsteht im Allgemeinen ein Körper. Der Körper hat alle drei Dimensionen des Raumes, Länge, Breite und Dicke (Höhe). Nur in besonderen Fällen entsteht durch Bewegung einer Fläche wieder eine Fläche.

5. Der geometrische Körper ist ein allseitig begränzter Theil des Raumes; seine Grenzen sind Flächen. Die Gränzen der Flächen sind Linien; die Gränzen der Linien Punkte.

6. Linien, Flächen und Körper erhalten den gemeinschaftlichen Namen Raumgrößen. Außer der Ausdehnung kommt denselben unbeschränkte Theilbarkeit und völlige Stätigkeit, d. i. ununterbrochener Zusammenhang der Theile, zu.

*) Diese Fälle betreffen die gerade Linie, den Kreisbogen und die cylindrische Schraubenlinie.

7. Gerade Linie ist diejenige, welche zwischen zweien ihrer Punkte nur auf eine Art liegen kann. Gebrochene Linie ist eine solche, welche aus geraden zusammengesetzt, aber selbst nicht gerade ist. Krumme Linie ist diejenige, von welcher kein Theil gerade ist.

8. Aus der Erklärung der geraden Linie folgen als Grundeigenschaften derselben:

1) Durch zwei feste Punkte kann nur eine gerade Linie gehen; oder: Zwei Punkte bestimmen eine gerade Linie der Lage und Länge nach.
2) Zwei gerade Linien können sich nur in einem Punkte treffen. Durch die Lage zweier geraden Linien ist also auch die Lage ihres Durchschnittspunktes, wofern sie einen solchen haben, bestimmt.
3) Eine gerade Linie kann über einen ihrer Endpunkte hinaus nur auf eine Art verlängert werden; daher bilden zwei gerade Linien, welche einen Theil gemeinschaftlich haben, nur eine einzige.
4) Jeder Theil einer geraden Linie ist selbst gerade.

9. Die Flächen sind entweder eben oder gekrümmt. Ebene Fläche oder Ebene ist diejenige, welche durch drei feste Punkte des Raumes, welche jedoch nicht in gerader Linie sich befinden dürfen, nur auf einerlei Art gelegt werden kann. Eine Grundeigenschaft der Ebene ist die, daß eine gerade Linie, welche zwei beliebige Punkte derselben mit einander verbindet, auch mit allen übrigen Punkten in der Ebene liegt, oder daß sich in einer Ebene nach allen Richtungen gerade Linien ziehen lassen. Eine gekrümmte Fläche ist diejenige, von welcher kein Theil, so klein er auch sei, eben ist.

10. Die krummen Linien sind entweder solche, deren Punkte alle in einer Ebene liegen, oder solche, bei welchen dieses nicht Statt findet; jene heißen einfach gekrümmte oder eben gekrümmte, diese doppelt gekrümmte.

11. Eine durch Flächen oder durch Linien ganz begränzte Ausdehnung wird Figur*) (im engeren geometrischen Sinne) genannt. Sind die Gränzen Flächen, so ist es eine körperliche Figur; sind sie Linien, so ist es eine Flächenfigur; letztere ist entweder eine ebene oder unebene.

---

*) Das Wort Figur wird auch im weiteren Sinne für jedes geometrische Gebilde gebraucht, auch wenn dasselbe keinen allseitig begränzten Raum darstellt.

12. Die ebene Figur ist entweder bloß von Geraden eingeschlossen, und eine geradlinige, oder von einer stätigen zusammenhängenden krummen Linie, eine krummlinige, oder von geraden und krummen Linien, eine gemischtlinige.

13. Unter den geradlinigen Figuren ist das Dreieck die einfachste. Dasselbe wird durch drei gerade Linien, welche sich in drei Punkten schneiden, völlig begränzt. Diese Linien, bis zu ihren Durchschnittspunkten genommen, heißen Seiten des Dreiecks, die Durchschnittspunkte selbst Ecken.

14. Unter den krummlinigen ebenen Figuren ist der Kreis die einfachste; er wird von einer einzigen, in einer Ebene liegenden krummen Linie, Kreislinie genannt, so begränzt, daß alle Punkte derselben von einem innerhalb gelegenen Punkte, Mittelpunkt oder Centrum, gleich weit abstehen. Ein solcher entsteht, wenn man eine gerade Linie um einen ihrer Endpunkte in ein und derselben Ebene so lange umdreht, bis sie in die erste Lage zurück kommt. Die Linie beschreibt dabei den Kreis, der sie bewegende Endpunkt die Kreislinie oder den Kreisumfang. Jeder Theil des Kreisumfanges heißt Bogen. Jede gerade Linie, welche den Mittelpunkt des Kreises mit einem Punkte des Umfanges verbindet, wird Halbmesser, Radius, genannt.

Alle Radien eines Kreises sind einander gleich.

15. Von ebenen Figuren überhaupt, namentlich also auch vom Dreiecke und vom Kreise, gelten folgende zwei allgemeine Grundsätze:

1) Jede Linie, die von einem beliebigen Punkte innerhalb einer Figur nach einem Punkte außerhalb derselben gezogen ist, schneidet nothwendig den Umfang in wenigstens einem Punkte, und

2) jede gerade Linie, welche durch einen Punkt innerhalb einer Figur geht, schneidet den Umfang derselben wenigstens zwei Mal.

Die Richtigkeit des ersten Grundsatzes erhellt ohne Weiteres aus dem Begriffe der Begränzung, und die des zweiten, wenn man bedenkt, daß eine Figur eine Ausdehnung von begränzten Dimensionen ist, eine gerade Linie aber über jede Gränze hinaus nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert werden kann.

16. Raumgrößen heißen congruent, wenn man die eine derselben so auf oder in die andere gelegt denken kann, daß alle Punkte einer jeden mit allen Punkten der andern zusammen fallen. Geschieht dieses

Ineinanderlegen in der Vorstellung, so sagt man, die Raumgrößen decken sich.

Beispiele liefern zwei gleiche gerade Linien oder zwei Kreise von gleichem Radius.

17. Die Wissenschaft von den Eigenschaften der Raumgrößen heißt Geometrie. Diese Eigenschaften betreffen hauptsächlich die gegenseitige Abhängigkeit, worin die verschiedenen Raumgrößen zu einander stehen. Die Geometrie wird eingetheilt in die ebene, Planimetrie, und körperliche, Stereometrie, je nachdem man sich mit Raumgrößen beschäftigt, die in ein und derselben Ebene, oder nicht in einer Ebene liegen.

Planimetrie.

Bemerkung. Bei Beziehungen oder Hinweisungen auf frühere Sätze u. s. w. bezeichnet die römische Ziffer das Kapitel, die gewöhnliche die Reihenfolge der Sätze u. s. w. in demselben (nicht die Abschnitte). Steht letztere Ziffer allein, so ist der Satz in demselben Kapitel gemeint.

I. Capitel.

Winkel. — Parallelen.

Lage der geraden Linien zu einander. Theorie der Parallelen. Winkelsumme an Dreiecken und Vierecken.

Erster Abschnitt.

Sätze über Winkel beim Durchschnitte zweier geraden Linien.

1. Erklärung. Zwei gerade Linien, welche von einem Punkte ausgehen, haben eine verschiedene Lage. Um die Größe dieser Verschiedenheit zu bestimmen, hat man sich vorzustellen, die eine dieser Linien drehe sich um den Punkt, von dem beide auslaufen, in einer und derselben Ebene und nach einerlei Richtung so lange um, bis sie mit der anderen zusammenfällt. Die Größe der Umdrehung, die hierzu erforderlich ist, wird Winkel genannt. Der Winkel ist also eine Größe eigener Art, durch welche die Verschiedenheit der Lage zweier von einem Punkte ausgehenden geraden Linien bestimmt wird. Die geraden Linien, welche den Winkel bilden, sind seine Schenkel; der Punkt, von dem sie auslaufen, ist der Scheitel oder die Spitze des Winkels; der zwischen den Schenkeln begriffene (unendliche) Theil der Ebene aber, worin der Winkel liegt, und in dem die Umdrehung als geschehen betrachtet wird, ist die Winkel-Ebene oder der Winkelraum. — Bezeichnung der Winkel.

Die Größe eines Winkels hängt der gegebenen Definition zufolge nicht von der Länge seiner Schenkel, sondern allein von deren gegenseitiger Lage

oder Entfernung ab. Um von dieser Größe einen bestimmteren Begriff zu gewinnen, ist es förderlich, sich eine derjenigen Kreislinien vorzustellen, welche durch die Umdrehung einer geraden Linie um den einen ihrer Endpunkte durch irgend einen ihrer Punkte gleichzeitig mit dem Winkel erzeugt werden. Je länger nämlich der bei der Umdrehung beschriebene Bogen ist, desto größer ist die geschehene Umdrehung, desto größer ist auch der Winkel, welchen die sich umdrehende Linie mit ihrer anfänglichen Lage macht.

2. Winkel sind gleich, wenn man sie so auf einander gelegt denken kann, daß sie sich decken. — Größere, kleinere Winkel. — Summe, Differenz der Winkel.

3. Erklärung. Ein Winkel wird flach oder gestreckt genannt, wenn einer seiner Schenkel die Verlängerung des anderen über den Scheitel hinaus ist. Ein Winkel, der kleiner als ein flacher ist, wird hohler, einer der größer ist, erhabener (convexer) Winkel genannt.

4. Erklärung. Zwei Winkel, welche neben einander liegend zusammen einen Flachen bilden, heißen Nebenwinkel; auch sagt man von jedem derselben, er sei das Supplement des anderen.

Nebenwinkel sind also solche, die einen gemeinschaftlichen Schenkel haben und deren beiden anderen Schenkel eine gerade Linie bilden.

5. Erklärung. Zwei Winkel dagegen, die beide Nebenwinkel eines dritten sind, heißen Scheitelwinkel. Sie entstehen stets beim gegenseitigen Durchschnitte zweier geraden Linien, und liegen dabei paarweise gegenüber.

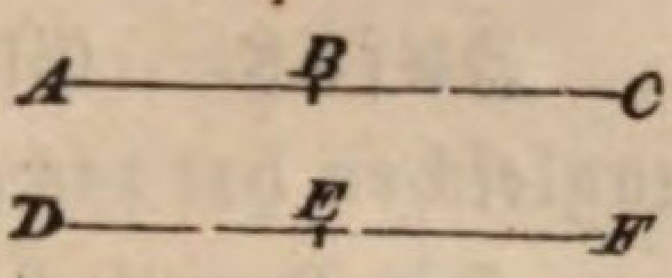
6. Erklärung. Sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so heißt jeder ein rechter Winkel (ein Rechter, *R*). Der rechte Winkel ist also die Hälfte eines flachen Winkels. Von jedem seiner Schenkel sagt man, er stehe senkrecht auf dem anderen, oder er sei ein Loth oder Perpendikel auf ihm. Zwei Winkel, die sich zu einem Rechten ergänzen, heißen Complemente zu einander. Ein Winkel, kleiner als ein Rechter, heißt ein spitzer, einer, der größer als ein Rechter, aber kleiner als ein Flacher ist, ein stumpfer Winkel.

7. Erklärung. Der Begriff des Winkels läßt noch eine Vergrößerung desselben über zwei Flache zu, und die Betrachtung solcher, zwei Flache übertreffenden Winkel wird nöthig, wenn von der Summation der Winkel die Rede ist. So lange es sich aber nur von der gegenseitigen Lage zweier Linien handelt, genügt es, bei Winkeln stehen zu bleiben, die zwei Flache nicht übertreffen. Alle Winkel, die einen Stumpfen übersteigen, kann man zusammen genommen überstumpfe nennen.

8. **Lehrsatz. Alle flachen oder gestreckten Winkel sind gleich groß.**

Beweis. Jeder Winkel *ABC* und *DEF* sei ein Flacher. Man denke sich die Winkelebenen so auf einander gelegt, daß der Scheitelpunkt *B* in *E*, und der Schenkel *BA* der Richtung nach auf den Schenkel *ED* zu liegen kommt u. s. w. (Man berücksichtige bei der Ausführung des Beweises Einl. 8, Folgerung 3 und die obige Erklärung der Gleichheit zweier Winkel.)

Fig. 1.



1. Zusatz. Gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel oder Supplemente.

Dieser Satz ist entweder durch Decken zu beweisen, oder es ist darzuthun, daß die beiderseitigen Nebenwinkel Unterschiede gleicher Winkel sind.

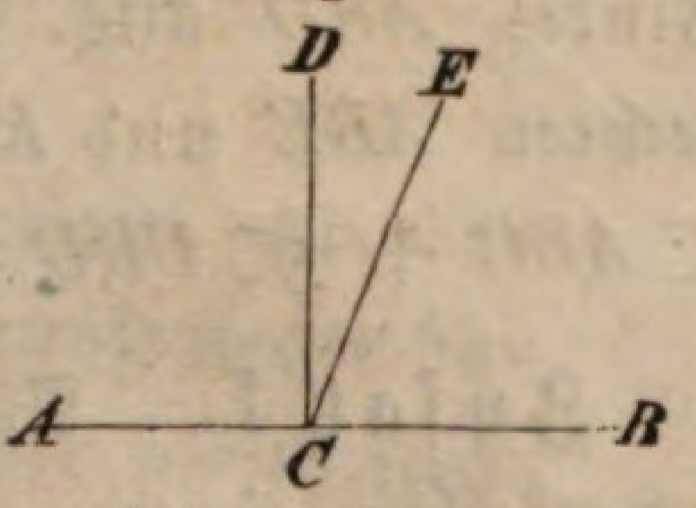
2. Zusatz. Ungleiche Winkel haben ungleiche Supplemente, der größere ein kleineres als der kleinere.

Auch dieser Zusatz ist ähnlich dem vorhergehenden entweder durch Aufeinanderlegen, oder durch Berufung auf den allgemeinen Satz der Größenlehre: „Ungleiches von Gleichem abgezogen, läßt Ungleiches übrig", zu beweisen.

9. **Satz. Auf einer geraden Linie kann in jedem Punkte auf einer Seite nur eine Senkrechte stehen.**

Beweis. Es möge die Linie *CD* in dem Punkte *C* auf *AB* senkrecht stehen, und es möge *CE* eine beliebige andere, durch den Punkt *C* gehende Linie sein, alsdann ist:

Fig. 2.



1) $\sphericalangle ACE > \sphericalangle ACD$;

2) $\sphericalangle ECB < \sphericalangle DCB$. Da aber nach der Voraussetzung:

$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$, so ist offenbar

$\sphericalangle ACE > \sphericalangle ECB$.

Jede durch den Punkt *C* gezogene Gerade *CE* macht also mit der Linie *AB* ungleiche Nebenwinkel; es gibt folglich außer der Linie *CD* keine zweite Linie, welche auf der *AB* senkrecht steht.

Der Beweis läßt sich auch indirect führen. Gesetzt, es gäbe außer der Linie *CD* noch eine zweite Linie *CE*, welche auf der Linie *AB* senkrecht stände, dann wäre sowohl $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$, als auch $\sphericalangle ACE = \sphericalangle BCE$. Beides zugleich ist aber unmöglich, denn u. s. w.

10. Satz. Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Beweis. Jeder rechte Winkel ist die Hälfte eines flachen Winkels. Da aber alle flachen Winkel einander gleich sind (8.), so müssen auch ihre Hälften, d. h. die rechten Winkel, einander gleich sein.

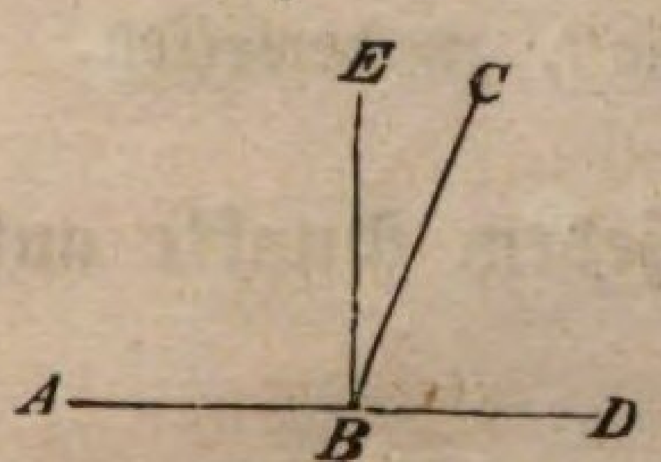
Zusatz. Gleiche spitze Winkel haben gleiche Complemente; von ungleichen hat der größere das kleinere Complement.

Die Beweise sind in ähnlicher Art zu führen, wie für die beiden Zusätze des Satzes 8.

Bemerk. Der rechte Winkel dient wegen seiner beständigen Größe als Winkeleinheit, um die Größen aller übrigen Winkel dadurch auszudrücken. Noch gebräuchlicher ist es jedoch, den 90ten Theil eines Rechten unter dem Namen Grad als Winkeleinheit anzunehmen. 1 Grad (1^0) zerfällt in 60 Minuten ($60'$), eine Minute in 60 Secunden ($60''$).

11. Satz. Zwei Nebenwinkel betragen zusammen genommen so viel, als 2 Rechte.

Fig. 3.



Die beiden Nebenwinkel *ABC* und *CBD* sollen zusammen genommen so viel als 2 Rechte betragen.

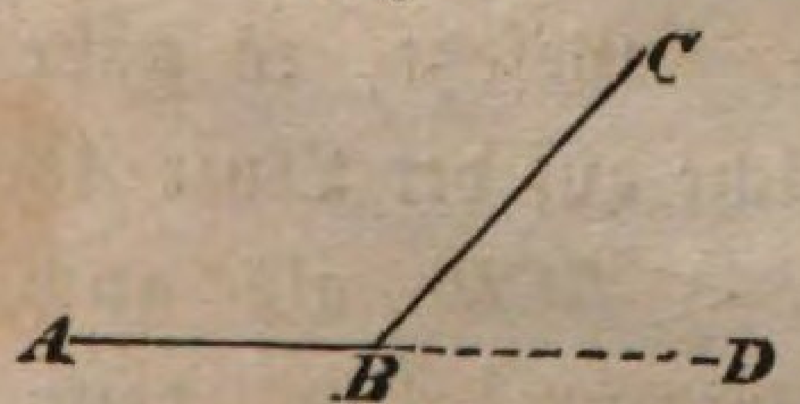
Beweis. Man denke sich in dem Punkte *B* die Senkrechte *EB* auf *AD* errichtet. Die beiden Winkel *CBA* und *CBD* machen zusammen den flachen Winkel *ABD* aus. Da aber der flache Winkel *ABD* auch den beiden Rechten *ABE* und *EBD* zusammen genommen gleich ist, so ist auch $\measuredangle ABC + \measuredangle CBD = 2\,R$.

Zusatz 1. Alle Winkel auf einer Seite einer geraden Linie, die in derselben einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, betragen zusammen 2 Rechte.

Zusatz 2. Alle Winkel um einen Punkt herum betragen zusammen 4 Rechte.

Die Beweise leicht.

Fig. 4.

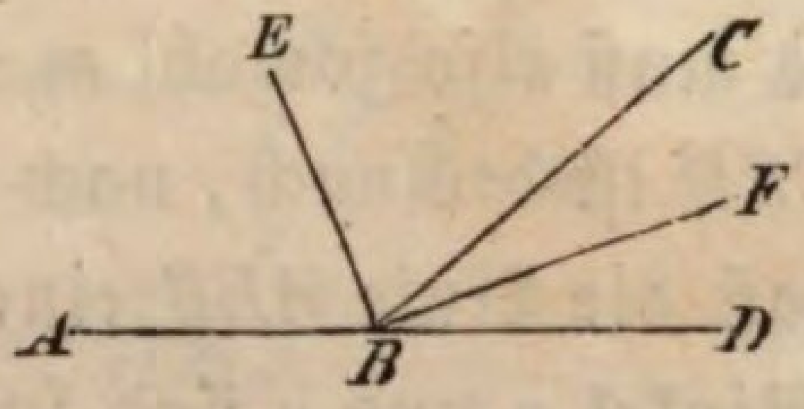


12. Satz. Betragen zwei Winkel, *ABC* und *CBD*, welche einen gemeinschaftlichen Scheitel und Schenkel haben und zu verschiedenen Seiten des letzteren liegen, zusammen genommen 2 Rechte, so liegen die anderen Schenkel in gerader Linie.

Beweis. Der Winkel *ABD*, welcher der Summe der beiden Winkel *ABC* und *CBD* gleich ist, ist zwei Rechten, also einem Flachen gleich. Die Linien *AB* und *BD* bilden somit eine Gerade.

13. Satz. Linien, welche zwei Nebenwinkel halbiren, stehen senkrecht auf einander.

Fig. 5.



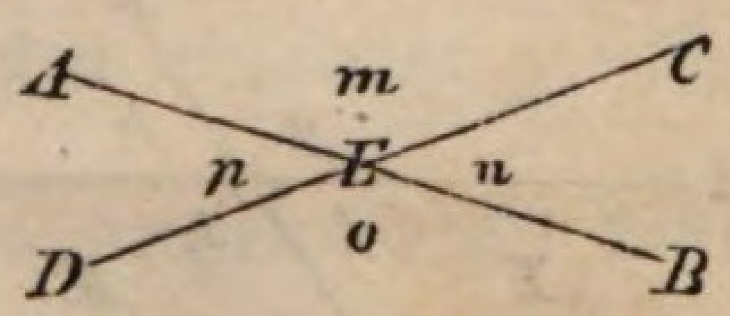
Die beiden Nebenwinkel *ABC* und *CBD* mögen durch die Linien *BE* und *BF* halbirt werden. Es soll bewiesen werden, daß die Linien *BE* und *BF* auf einander senkrecht stehen, oder daß ∢ *EBF* ein rechter Winkel sei.

Beweis. ∢*EBC* = ∢*EBA*,
∢*CBF* = ∢*FBD*, mithin:
∢*EBC* + ∢*CBF*, d. i. ∢*EBF* = ∢*EBA* + ∢ *FBD*.

Da nun der ∢ *EBF* mit den beiden Winkeln *EBA* und *FBD* zusammen genommen 2 *R* beträgt, so muß offenbar sowohl der ∢ *EBF* als auch die Summe der Winkel *EBA* und *FBD* einem Rechten gleich sein. Die beiden Linien *EB* und *BF* stehen somit auf einander senkrecht.

14. Satz. Scheitelwinkel sind einander gleich.

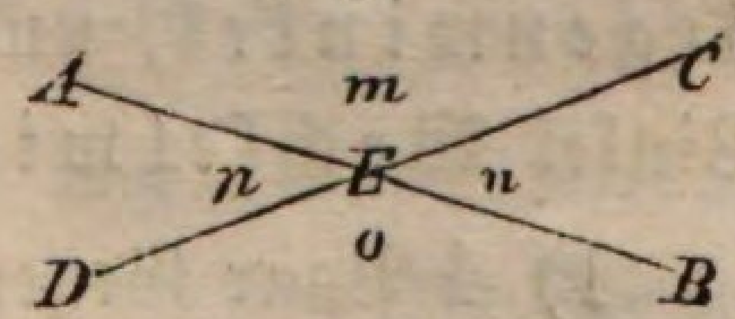
Fig. 6.



Die beiden geraden Linien *AB* und *CD* mögen sich durchschneiden, und es soll bewiesen werden, daß ∢ *m* = ∢ *o* und ∢ *p* = ∢ *n* sei.

Beweis. Jeder der Winkel *m* und *o* ist Supplement ein und desselben Winkels *n*. Da aber gleiche Winkel gleiche Supplemente haben (8, Zus. 1), so müssen die Winkel *m* und *o* einander gleich sein. Eben so läßt sich zeigen, daß ∢ *n* = ∢ *p* ist.

Fig. 7.

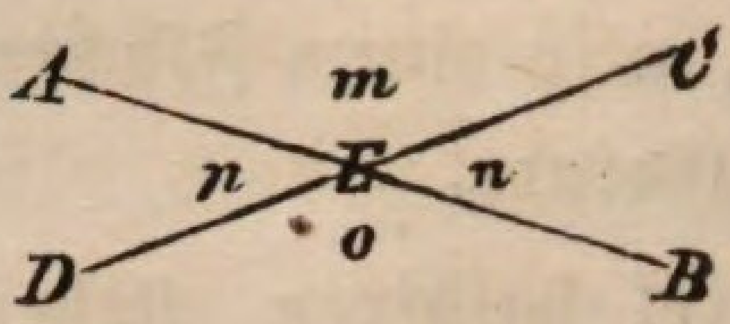


Zusatz 1. Umgekehrt sind die beiden Winkel *m* und *o* einander gleich, und bilden die Schenkel *AE* und *EB* eine gerade Linie, so bilden auch die Schenkel *CE* und *ED* eine gerade Linie.

Der Beweis führt durch einen leichten Schluß auf Satz 12 zurück. Man versuche denselben Satz indirect zu beweisen.

Zusatz 2. Sind von 4 um einen Punkt herum liegenden Winkeln je zwei abwechselnd liegende einander gleich, so sind diese abwechselnd liegenden Winkel Scheitelwinkel.

Fig. 8.



Es sei $\measuredangle m = \measuredangle o$ und zugleich $\measuredangle n = \measuredangle p$, und dann soll bewiesen werden, daß sowohl m und o als auch n und p Scheitelwinkel zu einander sind.

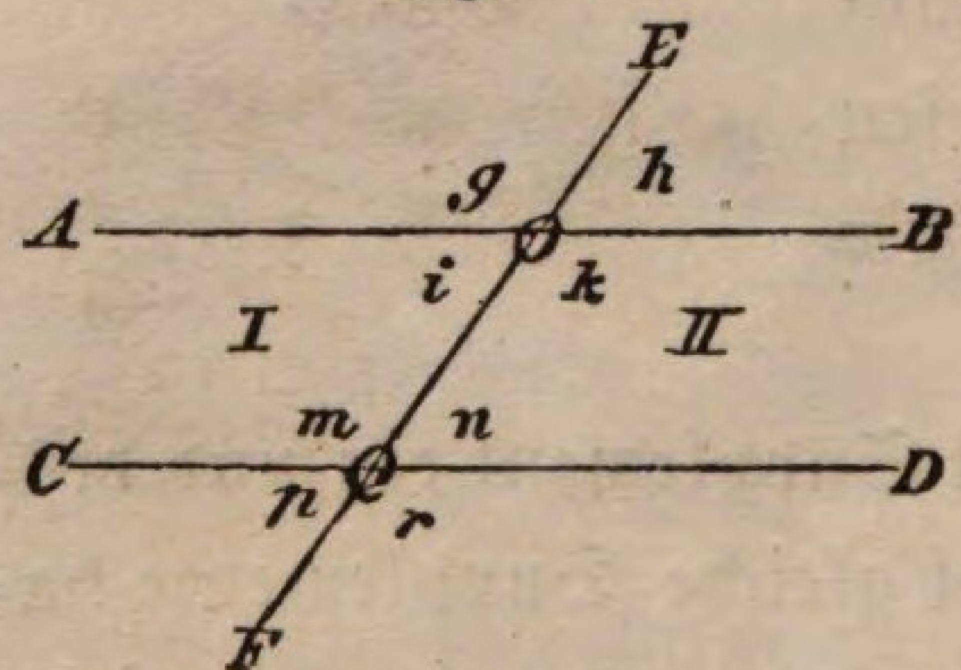
Beweis. Da $m = o$ und $p = n$, so ist auch $m + p = n + o$. Die 4 Winkel m, n, o, p betragen aber zusammen 4 R. (11, Zus. 2), es muß also sowohl $m + p$, als auch $n + o$ 2 R betragen. Die Linie CED ist demnach, nach S. 12, eine Gerade. Eben so läßt sich zeigen, daß die Linie AEB eine Gerade sei. Die Winkel m und o, so wie die Winkel n und p sind somit Scheitelwinkel.

Zweiter Abschnitt.

Sätze über Winkel beim Durchschnitte zweier geraden Linien mit einer dritten. — Parallel-Linien.

15. Erklärung. Werden zwei gerade Linien AB und CD von einer dritten EF in den Punkten O und Q durchschnitten, so entstehen an jedem Durchschnittspunkte 4, im Ganzen also 8 Winkel. Diejenigen dieser 8 Winkel, welche von den Linien AB und CD und dem dazwischen liegenden Stücke OQ gebildet werden, mögen innere, die 4 übrigen äußere Winkel genannt werden. Außerdem heißen die auf ein und derselben Seite der Schneidenden EF liegenden Winkel, welche nicht Nebenwinkel sind, Gegenwinkel, und die auf verschiedenen Seiten der EF liegenden Winkel Wechselwinkel. Man unterscheidet vorzüglich:

Fig. 9.



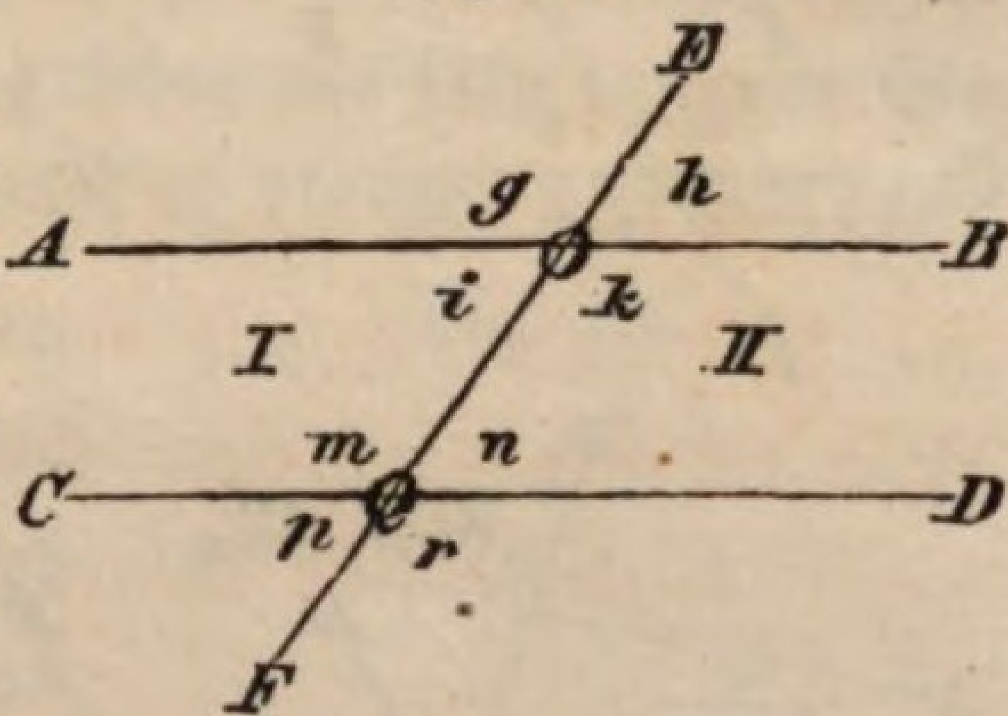
1) 4 Paar Gegenwinkel, von welchen immer der eine ein innerer, der andere ein äußerer ist, g und m, i und p, h und n, k und r. Sie werden der Kürze wegen in Folgendem schlechtweg als Gegenwinkel bezeichnet.

2) 2 Paar innere Gegenwinkel, i und m, k und n.

3) 2 Paar innere Wechselwinkel, oder schlechtweg Wechselwinkel, i und n, k und m.

16. Satz. Ist beim Durchschnitte zweier geraden Linien mit einer dritten ein Winkel seinem Gegenwinkel oder seinem Wechselwinkel gleich, so sind alle Gegenwinkel und Wechselwinkel paarweise gleich, und je zwei innere Gegenwinkel betragen zusammen 2 Rechte.

Fig. 10.



Ist z. B. $\sphericalangle g = \sphericalangle m$, so ist auch 1) $i = p$, 2) $h = n$, 3) $k = r$, 4) $i = n$, 5) $k = m$, 6) $k + n = 2 R.$, 7) $i + m = 2 R$

Beweis. Da $g = m$, so sind auch die Nebenwinkel dieser gleichen Winkel gleich, d. i. $h = n$ und $i = p$; eben so sind die Scheitelwinkel dieser gleichen Winkel, nämlich k und r, so wie die Winkel k und m und die Winkel i und n einander gleich. $g + i = 2 R$, also auch $m + i = 2 R$; auch ist, wie sich leicht ergibt, $k + n = 2 R$.

Auf dieselbe Art läßt sich darthun, daß, wenn die zwei Wechselwinkel i und n einander gleich sind, auch die anderen Wechselwinkel, so wie die Gegenwinkel einander gleich sind, und daß je zwei innere Gegenwinkel zusammen 2 Rechte betragen.

Zusatz. Betragen zwei innere Gegenwinkel zusammen 2 Rechte, so betragen auch die anderen inneren Gegenwinkel zusammen 2 Rechte, und die Gegenwinkel, so wie die Wechselwinkel sind einander gleich.

17. Erklärung. Parallel-Linien heißen solche Linien, welche in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, so weit man sie auch nach beiden Seiten hin verlängern mag. Das Zeichen des Parallelseins ist $\|$. Zwei in einer Ebene liegende gerade Linien sind also immer entweder parallel, oder sie treffen sich bei gehöriger Verlängerung und bilden einen Winkel. Eine gerade Linie, welche zwei oder mehrere Geraden durchschneidet, wird Transversale genannt.

18. Satz. Werden zwei gerade Linien von einer dritten so durchschnitten, daß entweder a) die Gegenwinkel, oder b) die Wechselwinkel einander gleich, oder c) die inneren Gegenwinkel zusammen 2 Rechte betragen, so sind die durchschnittenen Linien parallel.

Die beiden geraden Linien AB und CD mögen von EF so durchschnitten werden, daß 1) $\sphericalangle g = \sphericalangle m$, oder 2) $\sphericalangle i = \sphericalangle n$, oder 3) $\sphericalangle i + m = 2 R$, alsdann soll bewiesen werden, daß die genannten Linien AB und CD einander parallel sind.

Beweis. Aus jeder der Voraussetzungen folgt, daß die vier Winkel g, i, m, p der Ordnung nach den vier Winkeln r, n, k, h gleich sind. Die ganze Figur wird durch die Linie EF zu beiden Seiten derselben in zwei Theile, I und II, getheilt, von welchen sich zeigen läßt, daß sie bei gehöriger Aufeinanderlegung sich decken. Denkt man sich zunächst diese beiden, an der Linie EF an einander stoßenden Theile I und II getrennt, wie nebenstehende Figur anzeigt, denkt man sich ferner den Theil II so auf I gelegt, daß die Linie QO der Seite II der Richtung nach auf die Linie OQ der Seite I, und zwar der Punkt Q der Seite II auf den Punkt O der Seite I zu liegen kommt, so wird auch wegen Gleichheit der Linie QO Seite II und OQ Seite I der Punkt O der Seite II auf den Punkt Q der Seite I zu liegen kommen. Wegen der Gleichheit der Winkel r (II) und g (I) wird aber der Schenkel QD auf OA, und wegen Gleichheit der Winkel h (II) und p (I) wird der Schenkel OB auf QC zu liegen kommen. Die obige Behauptung, daß die durch die Linie EF geschiedenen beiden Theile I und II Figur 11 einander decken, ist somit gerechtfertigt. Aus dieser Eigenschaft der Figur ergibt sich nun aber, daß die Linien AB und CD einander parallel sein müssen. Wollte man annehmen, diese Linien seien nicht parallel, sondern sie durchschnitten sich in einem Punkte etwa auf der Seite I, so müßte es, da die Seite I von der Seite II bei gehöriger Aufeinanderlegung gedeckt wird, auch auf der Seite II einen entsprechenden Punkt geben, worin sich dieselben Linien AB und CD durchschneiden. Die beiden geraden Linien AB und CD würden sich demnach in zwei Punkten durchschneiden, was unmöglich ist. Es bleibt demnach nichts anderes übrig, als anzunehmen, die beiden Linien AB und CD einander parallel sind.

Fig. 11.

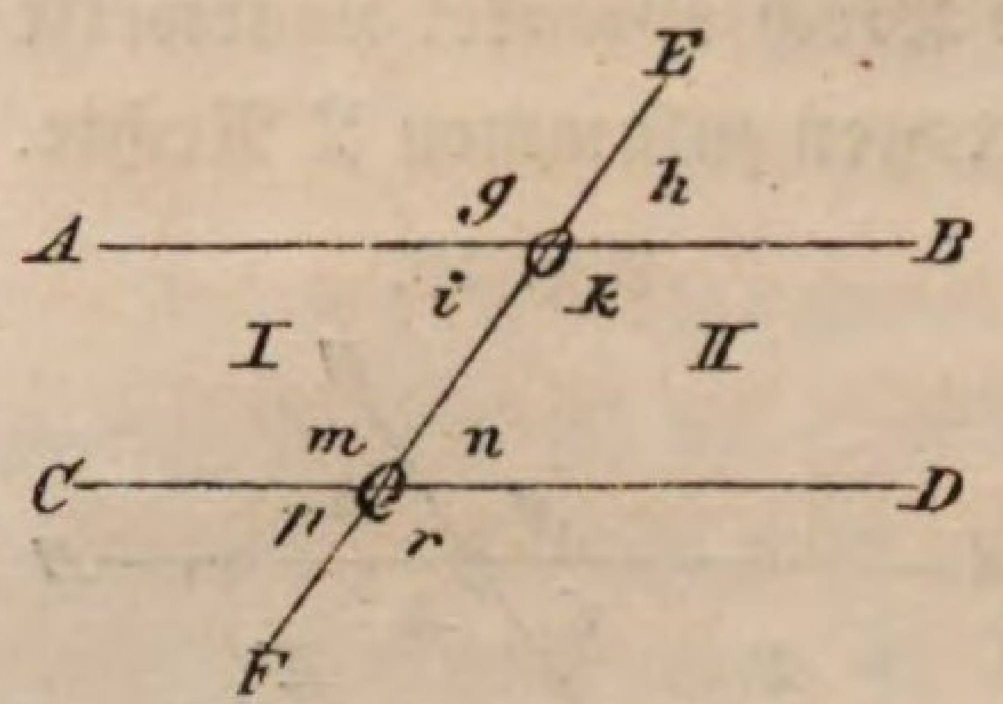
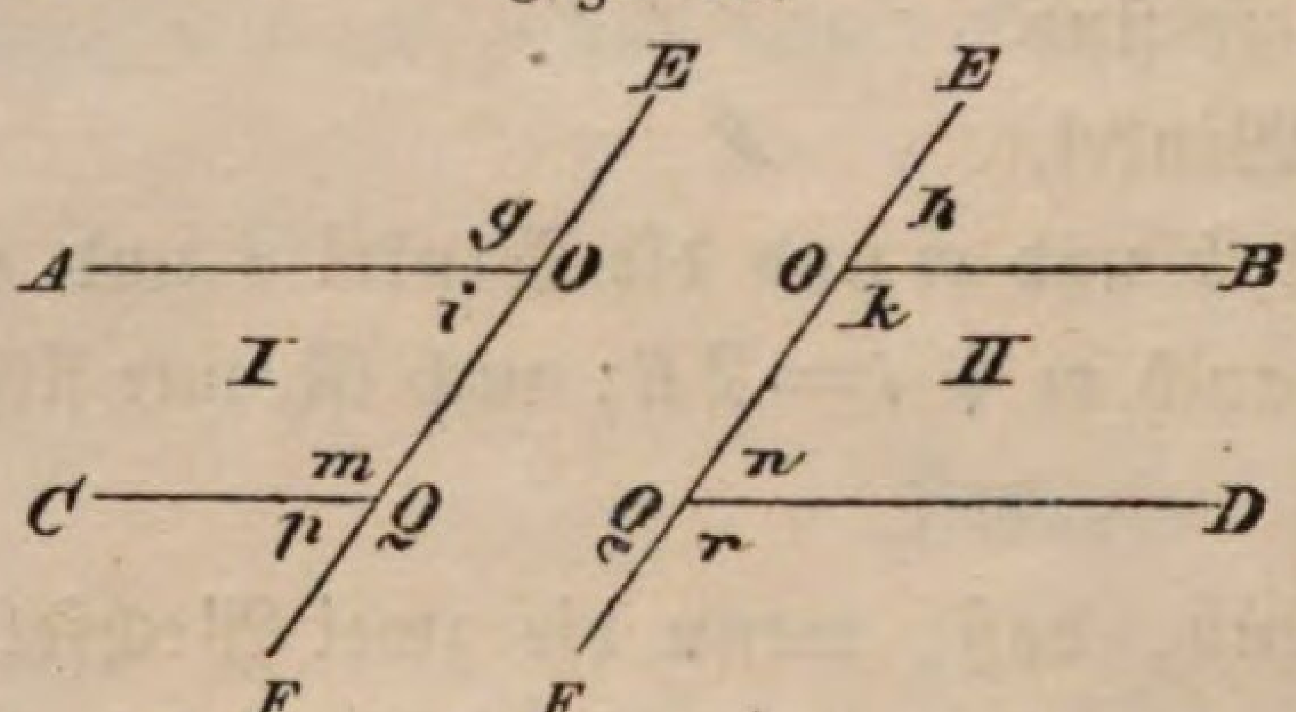


Fig. 12.



1. **Zusatz.** Stehen zwei gerade Linien auf einer dritten senkrecht, so sind sie parallel.

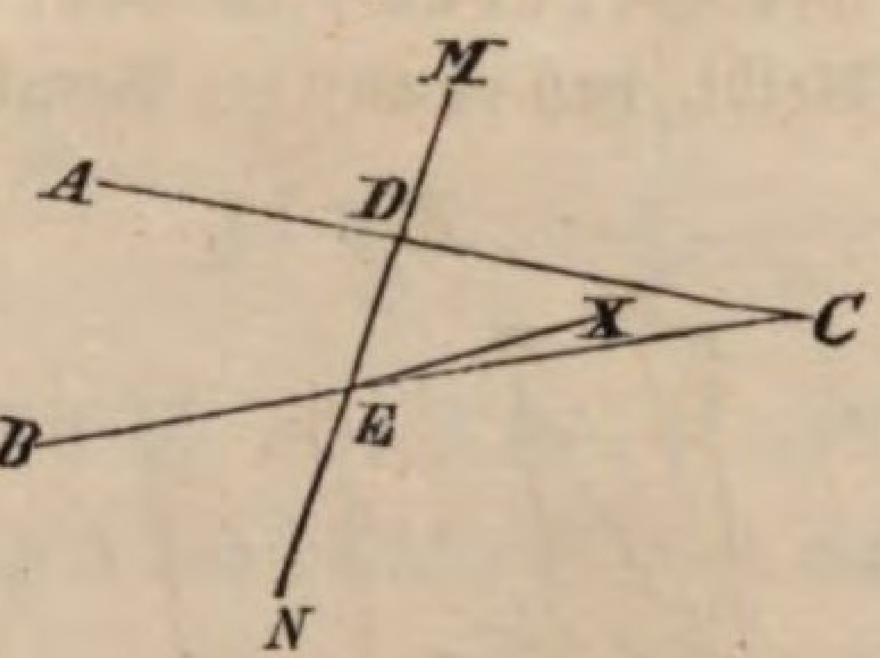
Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Hauptsatze.

2. Zusatz. Von einem Punkte außerhalb einer geraden Linie ist auf diese Linie nur eine Senkrechte möglich.

Der Beweis ist indirect zu führen mit Hinweisung auf Zusatz 1.

19. Satz. **Werden zwei sich treffende Linien *AC* und *CB* von einer dritten *MN* durchschnitten, so ist an der Seite von *MN*, wo die ersteren Linien sich treffen, jeder der äußeren Winkel größer als sein innerer Gegenwinkel, und die Summe der inneren Winkel ist kleiner als 2 Rechte.**

Fig. 13.



Beweis. Der Durchschnitt der Linien *AC* und *CB* durch *MN* geschehe in *D* und *E*; die äußeren, auf der Seite von *C* liegenden Winkel sind also *MDC*, *NEC*, ihre inneren Gegenwinkel bezüglich *MEC*, *MDC*. Es ist nun zu zeigen, daß eine der beiden ersteren, z. B. daß ∢ *MDC* größer als sein Gegenwinkel *MEC* ist, woraus sich nach *I*. 8, 2. Zusatz, sogleich ergibt, daß auch der andere äußere *NEC* > *NDC* sein muß.

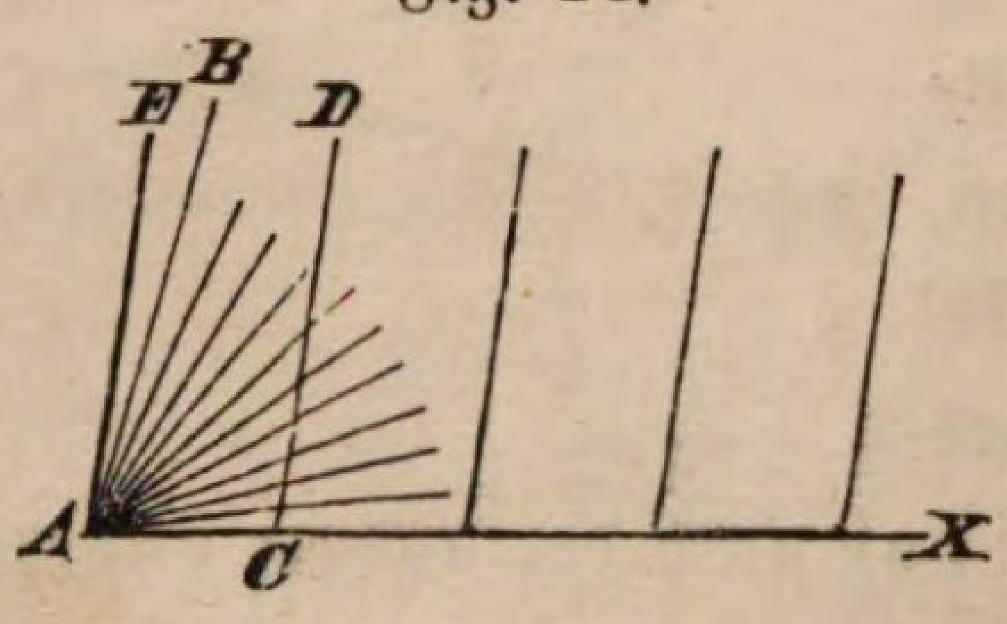
Gesetzt nun, ∢ *MDC* wäre nicht größer als *MEC*, so müßte *MDC* entweder eben so groß oder kleiner als ∢ *MEC* sein. Beides ist unstatthaft. Denn wäre ∢ *MDC* = ∢ *MEC*, so könnten nach dem vorhergehenden Satze 18 die Linien *AC*, *BC* sich nicht treffen, was der Voraussetzung, daß sie sich treffen, geradezu widerspricht. Wollte man zweitens annehmen, ∢ *MDC* wäre kleiner als ∢ *MEC*, so müßte es einen Theil des letzteren Winkels, etwa *DEX* geben, der gleich ∢ *MDC* wäre. Nach dem schon angeführten Satze 18 könnten nun *DC* und *EX* sich nicht treffen. Andererseits folgt aber aus der Voraussetzung, daß diese Linien sich treffen müssen; denn ihr gemäß bilden *DC* und *EC* mit *DE* ein Dreieck. Die Linie *EX*, welche innerhalb des Winkels *DEC* liegt, muß nothwendig durch Punkte innerhalb des Dreiecks gehen, daher nach Nr. 15 der Einleitung den Umfang wenigstens zwei Mal treffen. Da dieses ein Mal schon in *E* geschieht, so muß ein zweites Treffen der *EX* nothwendig mit der Seite *DC* zwischen *D* und *C* erfolgen. Der sich hier herausstellende Widerspruch gibt zu erkennen, daß ∢ *MDC* eben so wenig kleiner, als eben so groß als ∢ *MEC* sein kann. Nothwendig ist also ∢ *MDC* größer als *MEC*.

20. Satz. **Werden zwei gerade Linien von einer dritten durchschnitten, und sind an einer Seite der durchschneidenden Linie die äußeren Winkel bezüglich größer als ihre inneren Gegenwinkel, so müssen**

jene ersteren Linien bei genugsamer Verlängerung auf dieser Seite einmal zusammentreffen.

Dieser Satz ist eine Umkehrung des vorhergehenden. Da sich ein gleich bündiger Beweis für denselben, wie von den übrigen Sätzen der Geometrie, nicht geben läßt, so hat schon Euklid ihn unter die Zahl der Axiome (Grundsätze) aufgenommen, mit Recht, in so fern seine Richtigkeit auch ohne Beweis feststeht. Dennoch hat man, um der geometrischen Strenge in Entwicklung der Wahrheit zu genügen, unzählige Versuche gemacht, einen gültigen Beweis dafür aufzustellen. Als der gelungenste dieser Versuche ist folgender, dessen Grundidee Bertrand in Genf angehört, zu betrachten, an welchem nur auszusetzen bleibt, daß er auf der Vergleichung zweier unendlich großer Flächenräume beruht.

Fig. 14.



AB und *CD* seien zwei von *ACX* so geschnittene Linien, daß der äußere Winkel $DCX > BAX$, oder die Summe der inneren Winkel $BAC + DCA < 2R$. Macht man $\sphericalangle EAX = \sphericalangle DCX$, so ist $EAX > BAX$, *AB* liegt also zwischen *AE* und *AX*, *AE* aber wird der *CD* parallel (18). So klein nun auch der Winkel *EAB* (Unterschied der Winkel *DXC* und *BAX*) sein möge, der zwischen seinen Schenkeln begriffene Flächenraum muß doch größer, als der zwischen den Parallelen *AE*, *CD* und der Schneidenden *AC* enthaltene Theil der Ebene sein. Denn legt man jenen Winkelraum so oftmal zu sich selbst, als der Winkel *EAB* im Winkel *EAX* enthalten ist (es sei *n* Mal), so erhält man eine Fläche, die den Winkelraum *EAX* übertrifft, so daß also $(n + 1)\ EAB > EAX$. Vervielfältigt man aber in demselben Maße den Flächenraum *EACD*, indem man auf *CX*, von *C* nach *X* hin, *n* dem Parallelraume *EACD* congruente Parallelräume neben einander gelegt denkt, so füllt die Summe der sämmtlichen $n + 1$ Parallelräume keineswegs den ganzen Winkelraum *EAX*, sondern läßt zur rechten Seite noch einen (unendlichen) Ueberschuß, dessen Vorhandensein schließen läßt, daß das $n + 1$fache des Parallelraumes *EACD* kleiner sei, als das $n + 1$fache des Winkelraumes *EAB*, daß also auch der Parallelraum *EACD* selbst kleiner als der Winkelraum *EAB*, oder letzterer größer als der Parallelraum *EACD* sein müsse. Hieraus folgt aber, daß *AB* bei fortgesetzter Verlängerung nicht stets in diesem Raume enthalten sein könne, daß vielmehr *AB* aus ihm heraustreten, und da, wo dieses geschieht, die *CD* treffen müsse; was zu beweisen war.

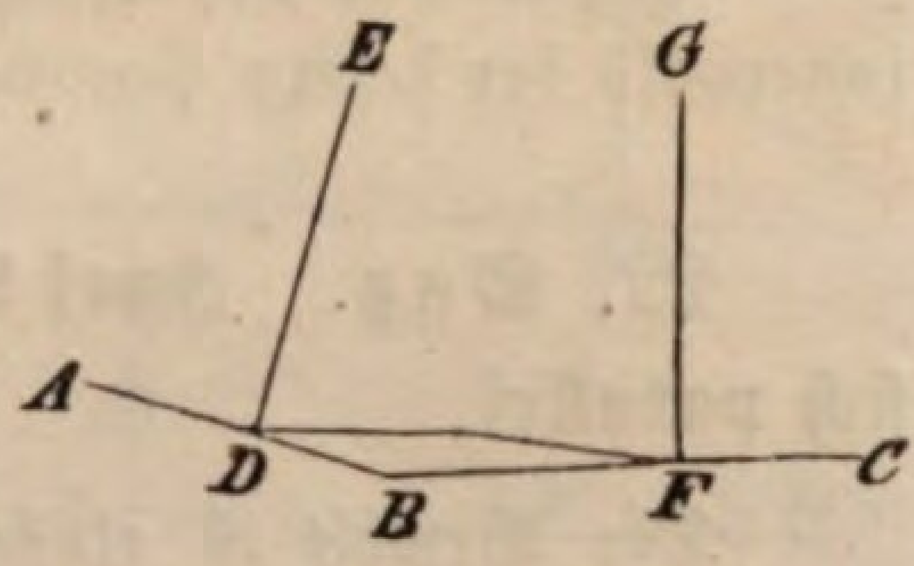
1. Zusatz. Derselbe Satz findet auch Statt, wenn die inneren Gegenwinkel zusammen kleiner als 2 Rechte sind.

2. Zusatz. Eine jede auf dem einen Schenkel eines spitzen Winkels errichtete Senkrechte trifft den andern Schenkel dieses Winkels.

Beweis leicht.

3. Zusatz. Zwei gerade Linien senkrecht auf den Schenkeln eines nicht flachen Winkels schneiden sich bei gehöriger Verlängerung.

Fig. 15.

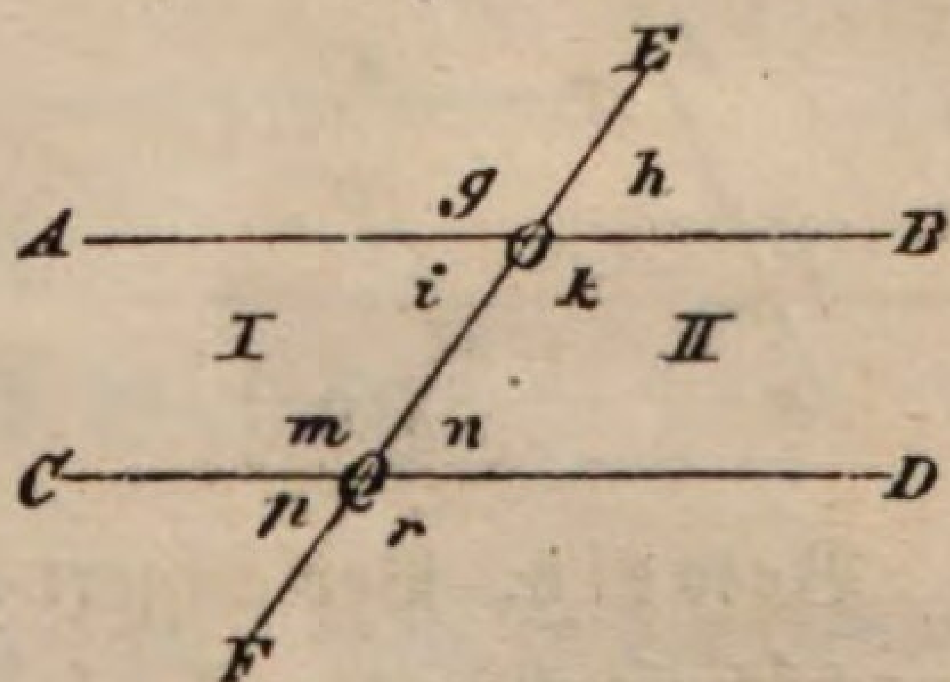


Die beiden Linien *DE* und *FG* mögen auf den beiden Schenkeln *AB* und *BC* des hohlen Winkels *ABC* senkrecht stehen.

Beweis. Verbindet man die beiden Punkte *D* und *F* mit einander, so sind die beiden Winkel *EDF* und *GFD* spitze, indem sie kleiner als die Rechten *EDB* und *GFB* sind. Es ist also $EDF + GFD < 2R$, mithin durchschneiden sich nach Zusatz 1 die beiden Linien *ED* und *GF*.

21. Satz. Werden zwei Parallel-Linien von einer dritten Linie durchschnitten, so sind a) die Gegenwinkel, b) die Wechselwinkel einander gleich, c) die inneren Gegenwinkel betragen zusammen genommen 2 Rechte.

Fig. 16.



Es seien die beiden Linien *AB* und *CD* einander parallel, alsdann ist: $\sphericalangle h = \sphericalangle n$.

Beweis. Indirect. Gesetzt *h* sei nicht gleich *n*, sondern entweder größer oder kleiner als *n*, alsdann müßten nach Satz 20 die beiden Linien *AB* und *CD* sich entweder nach der Seite *I* oder *II* treffen, welches aber gegen die Voraussetzung ist, daß die Linien *AB* und *CD* einander parallel sind. Es muß somit der Winkel $h = n$ sein. Aus der Gleichheit dieser Winkel folgt von selbst die Gleichheit der übrigen Winkel und die Behauptung für die Summe der beiden inneren Winkel.

1. Zusatz. Durch einen Punkt können nicht 2 gerade Linien gehen, die beide einer dritten parallel sind.

Der Beweis ist indirect zu führen.

2. Zusatz. Trifft eine gerade Linie eine von zwei Parallelen, so trifft sie auch die andere.

Der Beweis ist indirect zu führen mit Hinweisung auf Zusatz 1.

3. Zusatz. Steht eine gerade Linie auf einer von zwei Parallelen senkrecht, so steht sie auch auf der anderen senkrecht.

Beweis leicht.

4. Zusatz. Fällt man von einem Punkte auf zwei Parallelen Senkrechte, so fallen dieselben in eine gerade Linie.

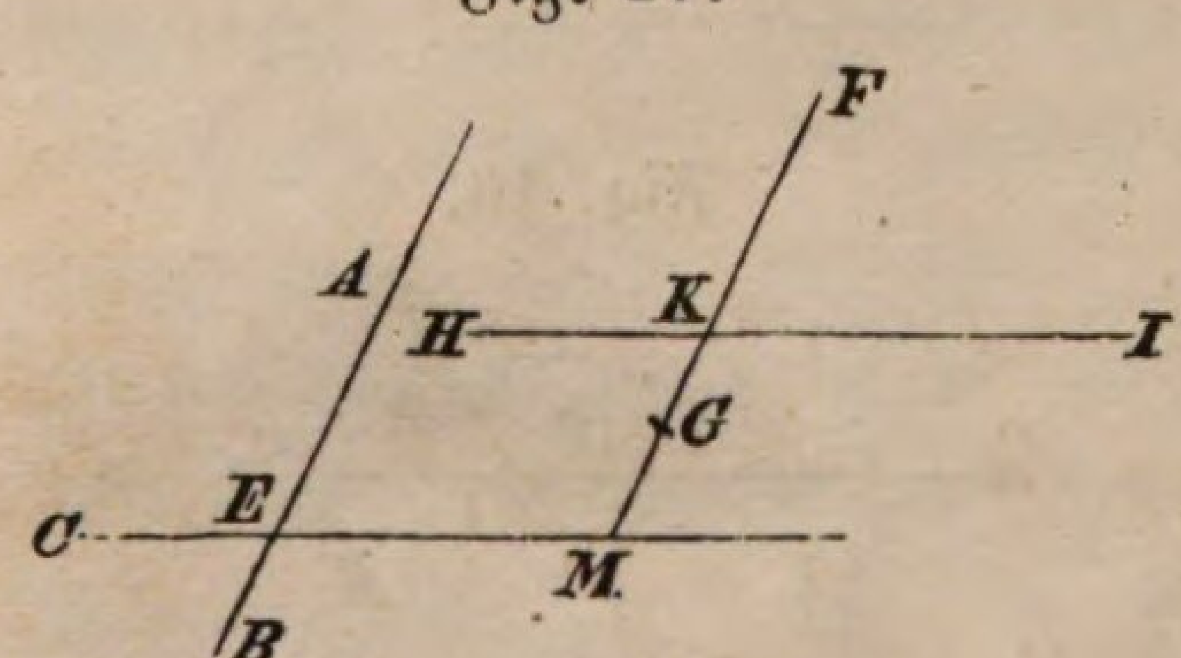
Der Beweis ist einfach, jedoch ist zu berücksichtigen, daß der gegebene Punkt innerhalb der beiden Parallelen oder außerhalb derselben liegen kann.

22. Satz. Zwei Linien, einer dritten parallel, sind auch unter sich parallel.

Der Beweis ist einfach. Man durchschneide die drei Linien durch eine einzige Gerade und suche den Beweis mit Hülfe der Sätze 21 und 18 zu führen. Auch indirect mit Berufung auf Zusatz 1.

23. Satz. Sind die Schenkel eines Winkels den Schenkeln eines andern Winkels parallel, so sind entweder die Winkel einander gleich, oder ihre Summe beträgt 2 Rechte.

Fig. 17.



Es seien die beiden Linien AB und CM den beiden Linien FG und HI parallel, alsdann wird einer der 4 Winkel um den Punkt E entweder einem der 4 Winkel um den Punkt K gleich sein, oder mit demselben zusammen genommen 2 Rechte betragen.

Beweis. Verlängert man die Schenkel FG und CE bis zu ihrem Durchschnittspunkte M, so ist 1) $\sphericalangle FKH = \sphericalangle KME$, 2) $\sphericalangle KME = \sphericalangle AEC$, mithin ist: $\sphericalangle FKH = \sphericalangle AEC$.

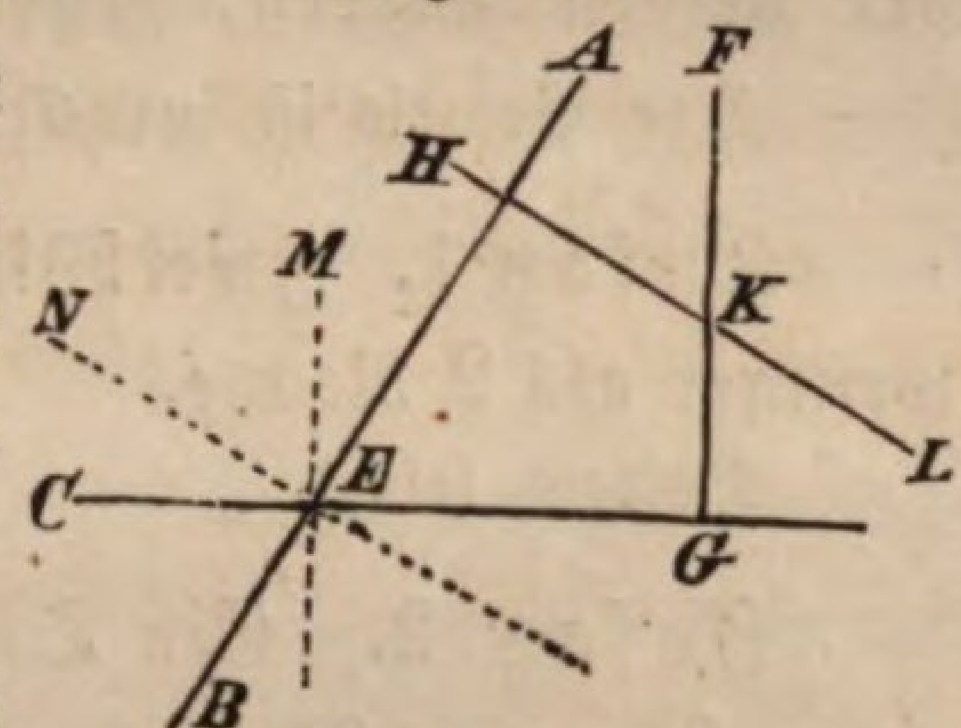
Es lassen sich außer diesen beiden gleichen Winkeln noch sieben Paar einander gleiche Winkel aufstellen, so wie acht Paar Winkel, welche zusammen 2 Rechte betragen.

Zusatz. Sind die Schenkel eines Winkels den Schenkeln eines anderen parallel, und sind beide Schenkel des einen Winkels im Vergleich zu beiden Schenkeln des anderen Winkels nach derselben Seite, oder beide nach entgegengesetzter Seite gerichtet, so sind die Winkel einander gleich; sind aber ein paar Schenkel nach derselben Seite, die anderen nach entgegengesetzter Seite gerichtet, so sind die Winkel Supplemente.

24. Satz. Stehen die Schenkel eines Winkels auf den Schenkeln eines anderen Winkels senkrecht, so sind die Winkel entweder gleich, oder betragen zusammen 2 Rechte.

Es mögen die beiden Geraden *IH* und *FG* auf den beiden Geraden *AB* und *CG* senkrecht stehen, alsdann wird einer der 4 um *K* liegenden Winkel einem der 4 um *E* liegenden Winkel entweder gleich sein, oder mit demselben zusammen 2 Rechte betragen.

Fig. 18.



Beweis. Man denke sich durch den Punkt *E* mit den beiden Linien *GF* und *HI* Parallel-Linien *EM* und *EN* gezogen, alsdann wird nach S. 23 $\sphericalangle MEN = \sphericalangle FKH$ sein. Es ist aber $\sphericalangle NEA = R$ (S. 21, Zus. 3), und eben so $MEG = R$, mithin ist auch: $\sphericalangle NEA = \sphericalangle MEG$. Zieht man von beiden Winkeln den Winkel *MEA* ab, so bleibt $\sphericalangle NEM = \sphericalangle AEG$ übrig. Es ist somit auch $\sphericalangle HKF = \sphericalangle AEG$.

Man suche an der Figur diejenigen Winkelpaare anzugeben, die einander gleich sind, und diejenigen, die zusammen zwei Rechte betragen.

Dritter Abschnitt.

Winkel des Dreiecks und Vielecks.

25. Erklärung. Analog mit dem schon oben in der Einleitung Nr. 13 aufgestellten Begriffe des Dreiecks, heißt eine von 4, 5, 6 und mehreren geraden Linien begränzte Figur ein Vier-, Fünf-, Sechs- u. s. w. Viel-eck oder ein Polygon. Die begränzenden Linien, bis zu ihrem Zusammentreffen genommen, heißen auch hier Seiten, die Punkte, in welchen je zwei auf einander folgende Seiten zusammenstoßen, Ecken oder Spitzen des Vielecks. Die Winkel, welche je zwei aneinander stoßende Seiten nach der inneren Seite des Vielecks mit einander bilden, heißen Winkel des Vielecks. Sind sämmtliche Winkel des Vielecks hohle, so heißt dasselbe ein convexes. Ein nicht convexes Vieleck hat einen oder mehrere erhabene Winkel. Die Ergänzungen der Winkel eines Vielecks zu einem Flachen, oder die Ueberschüsse über einen Flachen werden Außenwinkel des Vielecks genannt. Die Verbin-

dungslinien zweier nicht aneinander stoßenden Ecken heißen Diagonalen.

26. Satz. **Der Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder der beiden inneren, gegenüber stehenden Winkel.**

Der Beweis ist zurückzuführen auf I. 19.

Zusatz 1. Zwei Winkel eines Dreiecks betragen zusammen immer weniger als 2 Rechte.

Beweis leicht.

Zusatz 2. Ein Dreieck kann nicht mehr als einen Rechten oder einen stumpfen Winkel enthalten.

Der Beweis indirect zu führen.

Zusatz 3. Erklärung. Ein Dreieck heißt ein rechtwinkeliges, stumpf- oder spitzwinkeliges, je nachdem es einen rechten, einen stumpfen oder drei spitze Winkel hat. Im rechtwinkeligen Dreiecke werden die den rechten Winkel einschließenden Seiten die Katheten, die diesem Winkel gegenüber liegende Seite die Hypotenuse genannt.

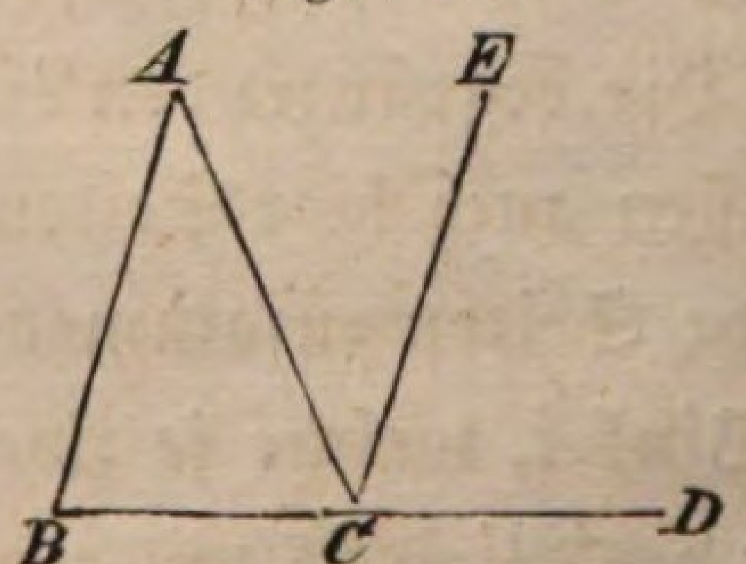
Zusatz 4. Zieht man aus der Ecke eines Dreiecks ein Perpendikel auf die Gegenseite, so fällt dasselbe innerhalb oder außerhalb des Dreiecks, je nachdem die Winkel an dieser Seite beide spitze sind oder einer von ihnen ein stumpfer ist.

Der Beweis indirect zu führen.

27. Satz. **Die drei Winkel eines Dreiecks betragen zusammen zwei Rechte.**

Es soll bewiesen werden, daß $\sphericalangle B + \sphericalangle A + \sphericalangle ACB = 2R$.

Fig. 19.



Beweis. Man suche die drei Winkel B, A und ACB so aneinander zu bringen, daß sie zusammen einen Flachen ausmachen. Zu dem Ende verlängere man BC über C hinaus um ein beliebiges Stück CD. Da der äußere Winkel ACD größer als der innere Winkel B ist (26), so läßt sich von ACD ein Stück ECD abschneiden, welches dem Winkel B gleich ist. Da nun aber $\sphericalangle ECD = \sphericalangle B$, so ist $EC \parallel AB$, mithin ist auch $\sphericalangle A = \sphericalangle ACE$. Die drei Winkel ACB, ACE und ECD betragen zusammen 2 Rechte, mithin betragen auch die drei, diesen gleiche, Winkel ACB, A und B zusammen 2 Rechte.

Einen ähnlichen Beweis erhält man, wenn man durch die Spitze *A* mit der Grundlinie *BC* eine Parallele zieht, wodurch die drei Winkel des △ *ABC* an die Spitze *A* verlegt werden.

1. Zusatz. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist einer der spitzen Winkel das Complement des anderen.

2. Zusatz. Der Außenwinkel eines Dreiecks ist der Summe der beiden gegenüber stehenden inneren Winkel gleich.

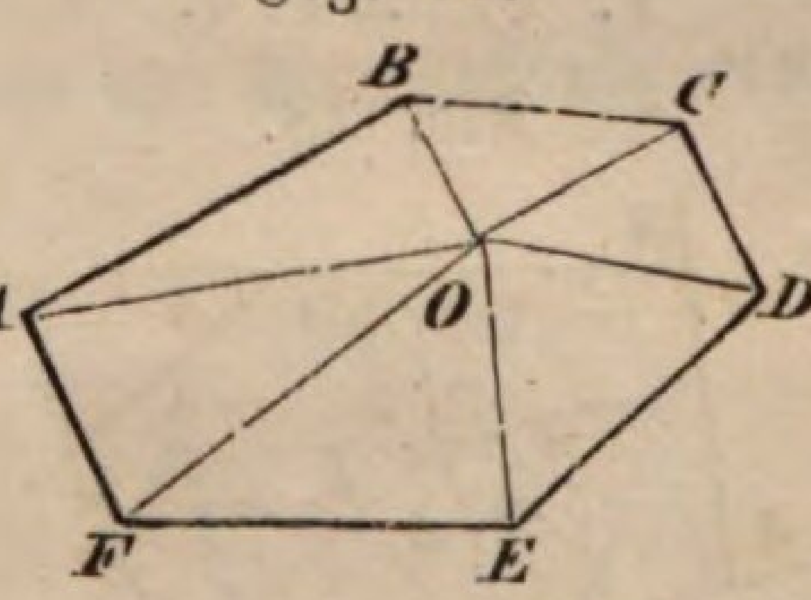
3. Zusatz. Sind zwei Winkel eines Dreiecks gleich zweien Winkeln eines anderen Dreieckes, so ist auch der dritte Winkel des einen Dreiecks dem dritten Winkel des anderen Dreiecks gleich.

Die Beweise für 1., 2., 3. Zusatz sind leicht.

28. Satz. **Die Summe aller Winkel eines Vielecks beträgt doppelt so viel rechte Winkel, als das Vieleck Seiten hat, weniger 4 Rechte, oder was auf dasselbe hinausläuft, doppelt so viel Rechte, als die um 2 verminderte Seitenzahl beträgt.**

Ist die Anzahl der Seiten eines Vielecks gleich n, so ist die Summe der Winkel des Vielecks gleich $2\,n\,R - 4\,R$, oder $2\,(n - 2)\,R$.

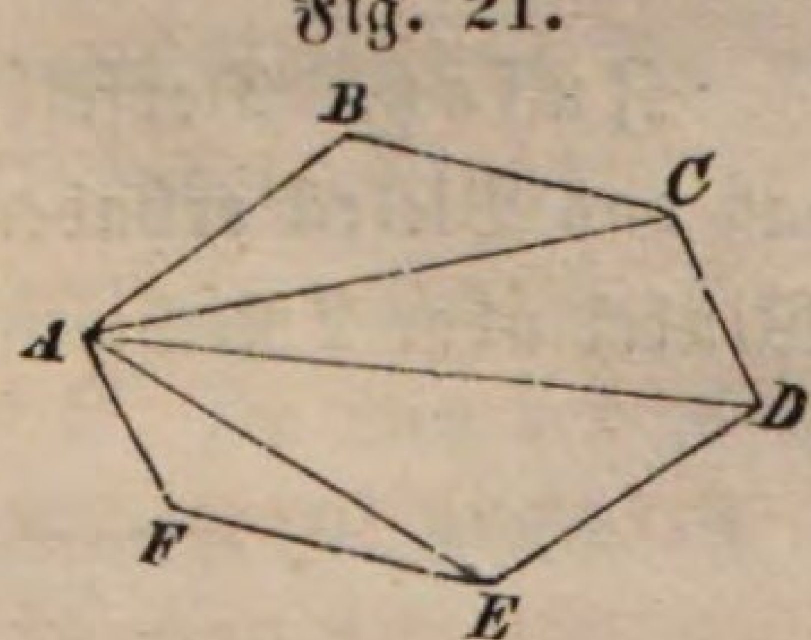
Fig. 20.



Beweis. Man theile das gegebene Vieleck *ABCDEF* von einem Punkte *O* innerhalb desselben in Dreiecke, indem man von diesem Punkte nach allen Eckpunkten des Vielecks gerade Linien zieht. Hierdurch zerfällt das Vieleck *ABCDEF* in so viele Dreiecke, als dasselbe Seiten hat.

Zum ferneren Beweise des Satzes bestimme man die Summe sämmtlicher Winkel der n Dreiecke und bringe die um *O* liegenden Winkel in Abrechnung.

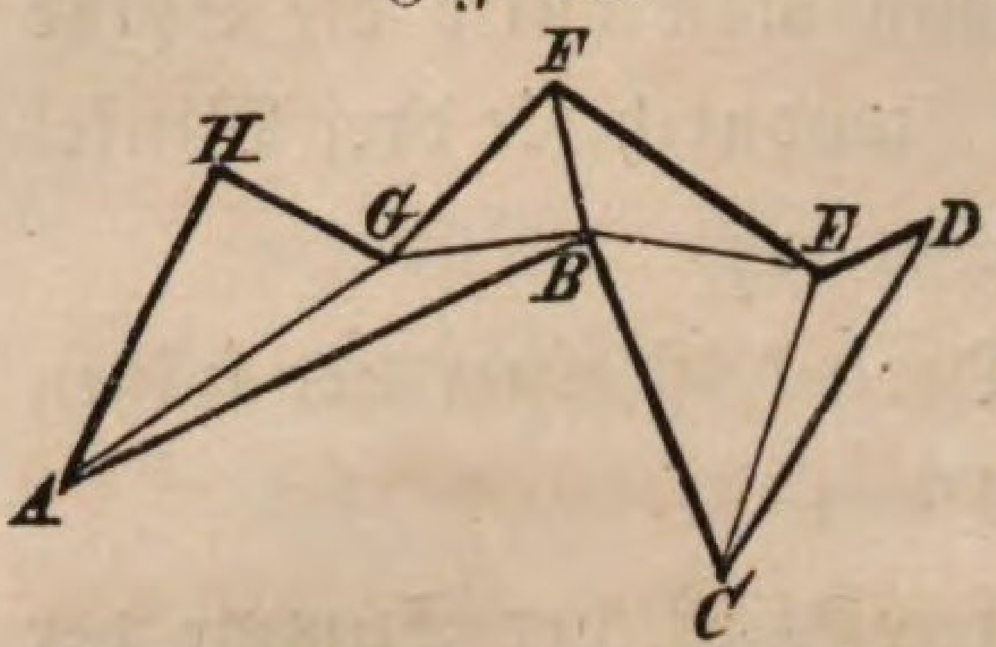
Fig. 21.



2. Beweis. Man zerlege das Vieleck von einer Ecke aus, etwa von *A*, in Dreiecke. Dieser Dreiecke entstehen so viele, als Seiten der Ecke *A* gegenüber liegen, also, da 2 Seiten ihr anliegen, n Seiten im Ganzen sind, $n - 2$ Dreiecke. Die Bestimmung der Summe sämmtlicher Winkel der Dreiecke ist hiernach leicht.

Zusatz. Die Summe der Winkel eines jeden Vierecks ist also 4, die eines Fünfecks 6, eines Sechsecks 8 Rechte u. s. w.

Fig. 22.

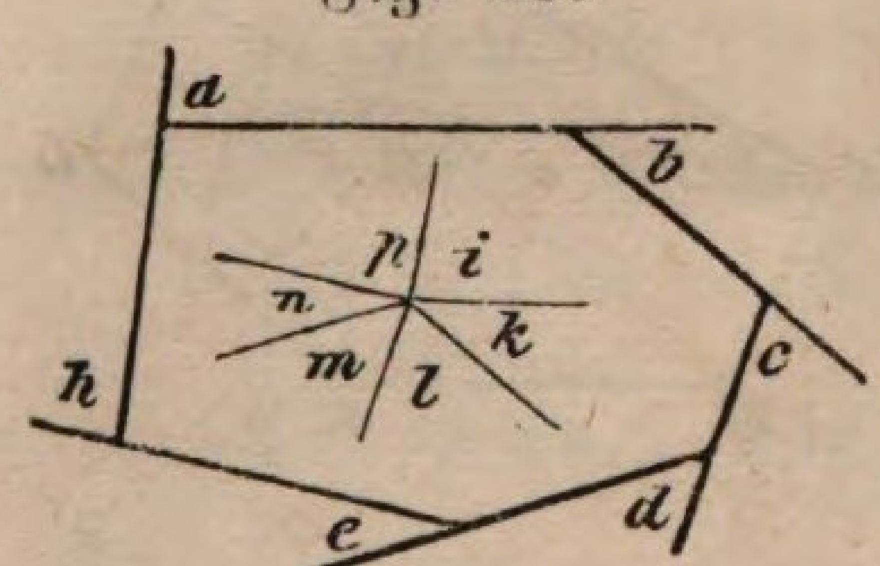


Bemerkung. Bei einem Vielecke von nebenstehender Form, welches die hohlen Winkel A, C, D, F, H, und die erhabenen B, G, E enthält, kann man weder von einem Punkte innerhalb, noch von einem Punkte im Umfange die Theilung in Dreiecke vornehmen. Es läßt sich jedoch das Achteck $ABCDEFGH$ durch die Diagonale EC in ein Dreieck DEC und in ein Siebeneck $ECBAHGFE$, letzteres durch die Diagonale BE in ein Dreieck BEC, und in ein Sechseck $BEFGHA$, letzteres durch die Diagonale BF in ein Dreieck BFE und in ein Fünfeck $BFGHA$, dieses durch die Diagonale BG in ein Dreieck BFG und in ein Viereck $BGHA$, und letzteres endlich in zwei Dreiecke zerlegen. Die Anzahl der sämmtlichen Dreiecke ist bei diesem Achtecke gleich 6, und überhaupt bei einem n-Ecke $= n - 2$. Die Summe der Winkel des Vielecks, welche mit der Summe der Winkel der Dreiecke zusammenfällt, beträgt somit $2\,(n - 2)\,R$.

29. Satz. **Die Summe der Außenwinkel eines Vielecks, dessen Winkel alle hohl sind, beträgt $4\,R$.**

1. Beweis. Die Summe der Innen- und Außenwinkel eines n-Ecks beträgt $2\,n\,R$; zieht man hiervon die Summe der Innenwinkel $= 2n\,R - 4\,R$ ab, so erhält man $4\,R$.

Fig. 23.



2. Beweis. Legt man durch einen beliebigen Punkt mit den Seiten des Vielecks Parallelen, so wird $\measuredangle\, a = \measuredangle\, i$, $\measuredangle\, b = \measuredangle\, k$, $\measuredangle\, c = \measuredangle\, l$, $\measuredangle\, d = \measuredangle\, m$, $\measuredangle\, e = \measuredangle\, n$, $\measuredangle\, h = \measuredangle\, p$. Es ist also $a + b + c + d + e + h = i + k + l + m + n + p = 4\,R$, folglich $a + b + c + d + e + h = 4\,R$.

Zusatz. Derselbe Satz findet Statt, wenn man für den Fall, daß das Vieleck erhabene Winkel besitzt, die Ueberschüsse dieser erhabenen Winkel über 2 Rechte von der Summe der übrigen Außenwinkel abzieht.

II. Capitel.

Eigenschaften der Dreiecke, Parallelogramme, Trapeze und Polygone, mit Rücksicht auf die Seiten und Winkel.

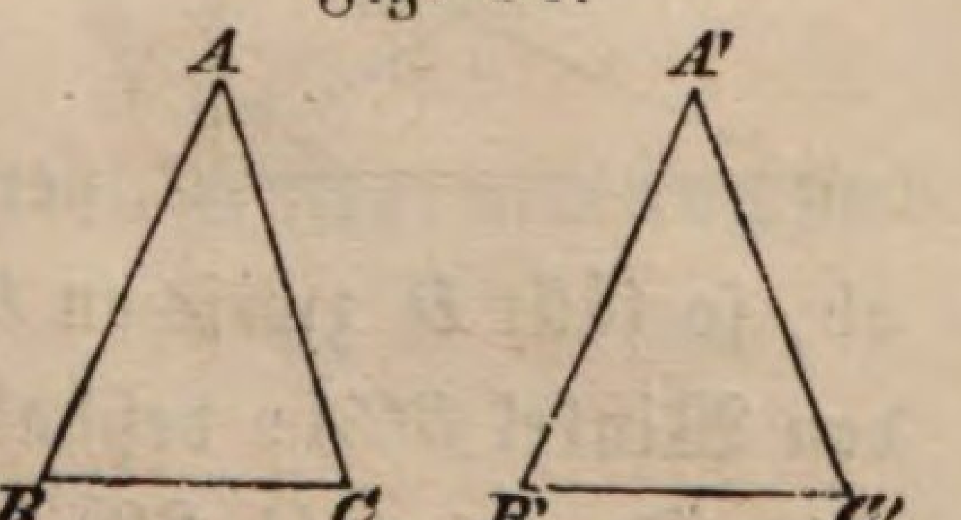
Erster Abschnitt.

Von den Seiten eines einzelnen Dreiecks.

1. Erklärung. Ein gleichschenkeliges Dreieck ist ein solches, welches zwei gleiche Seiten hat. Die dritte Seite heißt die Grundlinie desselben, die gegenüber stehende Ecke vorzugsweise die Spitze. Ein gleichseitiges Dreieck ist ein solches, dessen drei Seiten einander gleich sind.

2. Satz. **In jedem Dreiecke stehen zwei gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüber, oder: Die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks sind einander gleich.**

Fig. 24.



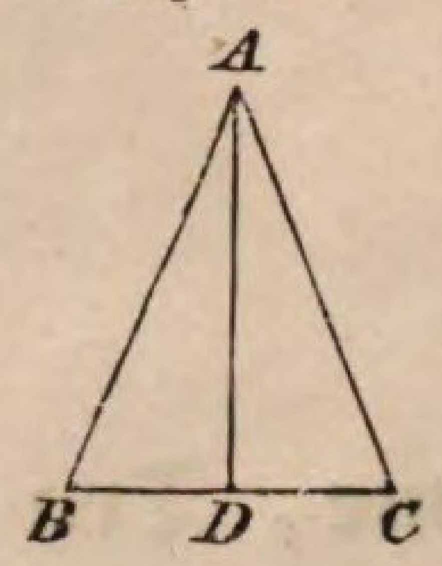
Im $\triangle ABC$ sei $AB = AC$; es soll bewiesen werden, daß $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ sei.

1. Beweis. Man denke sich das Dreieck ABC noch einmal als $A'B'C'$*). Legt man nun das erste Dreieck ABC so auf das zweite $A'C'B'$ daß Seite AB auf $A'C'$ und der Punkt A in A' fällt, so wird, da $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, auch der Schenkel AC des ersten Dreiecks auf den Schenkel $A'B'$ des zweiten fallen und wegen Gleichheit der vier Schenkel AB, AC, $A'B'$, $A'C'$ der Punkt B in C' und der Punkt C in B' fallen, und somit die Linie BC die Linie $C'B'$ decken. Der $\sphericalangle B$ deckt also dann auch den $\sphericalangle C'$, und der $\sphericalangle C$ den $\sphericalangle B'$. Da nun der Winkel C sowohl, als auch der Winkel B demselben Winkel B' gleich ist, so muß auch $B = C$ sein.

---

*) Man spreche A Strich, B Strich, C Strich.

Fig. 25.



2. Beweis. Man denke sich den Winkel an der Spitze A durch eine die Grundlinie in D schneidende Gerade AD halbirt. Dreht man nun das Dreieck BAD um AD als Axe, bis es auf DAC zu liegen kommt, so muß wegen der Gleichheit der Winkel BAD, DAC die Seite AB der Richtung nach auf AC, und wegen der gleichen Länge derselben B in C fallen; mithin deckt BD die DC und Winkel B den Winkel C.

1. Zusatz. Ein gleichseitiges Dreieck ist auch ein gleichwinkeliges.

2. Zusatz. Jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks beträgt $\frac{2}{3}$ Rechte.

3. Zusatz. In einem gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreiecke beträgt jeder Winkel an der Grundlinie einen halben Rechten.

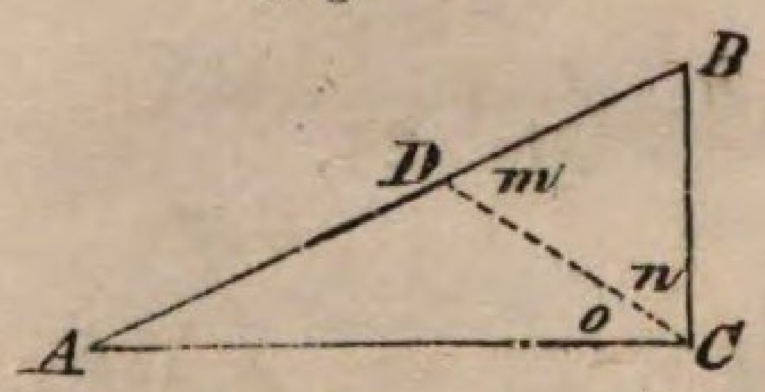
Beweise leicht.

4. Zusatz. In jedem gleichschenkeligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie spitze Winkel.

Beweis leicht, entweder direct oder indirect zu führen.

3. Satz. In jedem Dreiecke liegt der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber.

Fig. 26.



Es sei $AB > BC$; alsdann ist auch $\measuredangle BCA > BAC$.

1. Beweis. Schneidet man von der größeren Seite BA von B aus ein Stück $BD = BC$ ab, so fällt D zwischen B und A, und, verbindet man D mit C, DC in den Winkel BCA; deßhalb ist $\measuredangle ACB > \measuredangle n$; $\measuredangle n = \measuredangle m$ (II. 2), $\measuredangle m > \measuredangle A$ (I. 26), mithin ist $\measuredangle BCA > \measuredangle BAC$.

2. Beweis. Trägt man die BA auf BC von B aus und verbindet den Endpunkt dieser aufgetragenen Linie mit A, so läßt sich auf ähnliche Art, wie oben, zeigen, daß $\measuredangle BCA > \measuredangle BAC$ ist.

1. Zusatz. Von den beiden Winkeln, in welche der größere $\measuredangle BCA$ durch die Hülfslinie CD getheilt wird, ist der eine, nämlich BCD, der halben Summe, der andere DCA der halben Differenz der beiden Winkel ACB und BAC des Dreiecks BAC gleich.

Beweis. 1) $\measuredangle B + m + n = 2R = B + A + BCA$, mithin $m + n = A + BCA$ und da $m = n$, so ist $n = \frac{1}{2}(A + BCA)$.

2) $\sphericalangle BCA = o + n$; $n = m = o + A$, mithin $\sphericalangle BCA = 2o + A$; folglich $\sphericalangle BCA - A = 2o$ und $o = \frac{1}{2}(BCA - A)$.

2. Zusatz. Derjenigen Seite eines Dreiecks, welche nicht die größte ist, liegt stets ein spitzer Winkel gegenüber.

Beweis indirect.

4. Satz. In jedem Dreiecke liegen gleichen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüber.

Der Beweis ist entweder indirect mit Berücksichtigung des Satzes 3 zu führen, oder direct in ähnlicher Weise wie Satz 2.

Zusatz. Ein gleichwinkeliges Dreieck ist auch ein gleichseitiges.

5. Satz. In jedem Dreiecke liegt dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber.

Beweis. Die Annahme des Gegentheils würde auf Folgerungen führen, welche nach 2 und 3 mit der Voraussetzung unvereinbar sind. Der Schüler versuche einen directen Beweis dieses Satzes unter folgender Anleitung zu führen: Man schneide von dem größern Winkel ein Stück ab gleich der halben Summe der beiden Winkel und zwar so, daß der eine Schenkel auf der Seite des Dreiecks zu liegen kommt, welcher dem kleinern Winkel des Dreiecks gegenüber steht.

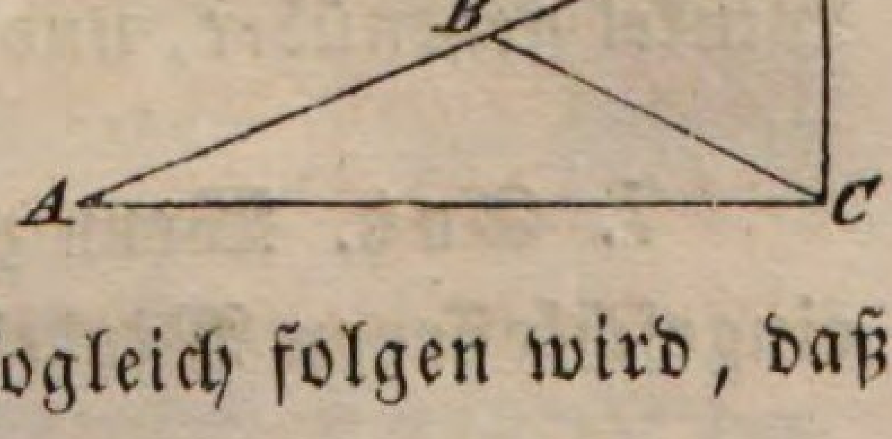
Zusatz 1. Die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist die größte Seite des Dreiecks.

Zusatz 2. In jedem stumpfwinkeligen Dreiecke liegt dem stumpfen Winkel die größte Seite gegenüber.

Die Beweise dieser Zusätze sind leicht.

6. Satz. Die Summe je zweier Seiten eines Dreiecks ist größer, ihr Unterschied kleiner als die dritte Seite.

Fig. 27.

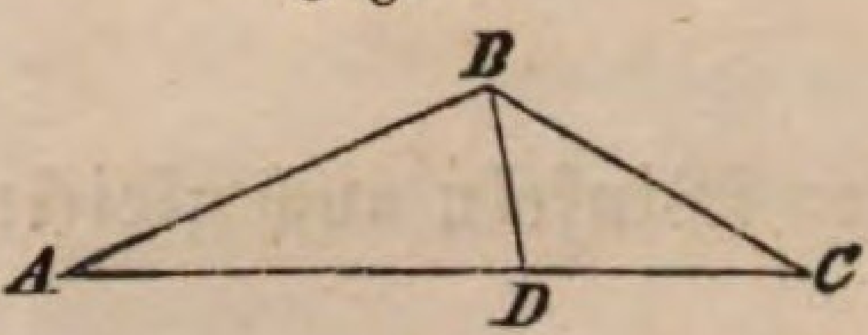


ABC sei ein Dreieck, dessen größte Seite AC und dessen kleinste BC ist. Daß $AC + AB > BC$, und $AC + CB > AB$, ferner $AB - BC < AC$, ergibt sich auf der Stelle; es bleibt nur zu beweisen, daß die Summe der beiden kleineren Seiten $AB + BC > AC$, woraus sogleich folgen wird, daß $AB > AC - BC$, und $BC > AC - AB$ ist.

Zum Beweise, daß $AB + BC > AC$, hat man nur AB um ein Stück

$BD = BC$ zu verlängern und D mit C zu verbinden. Das Dreieck BDC ist nun ein gleichschenkeliges und daher (2) $\sphericalangle BCD = BDC$. Da aber $\sphericalangle ACD > BCD$, so ist auch $\sphericalangle ACD > \sphericalangle D$, daher (5) $AD > AC$, d. i. $AB + BC > AC$.

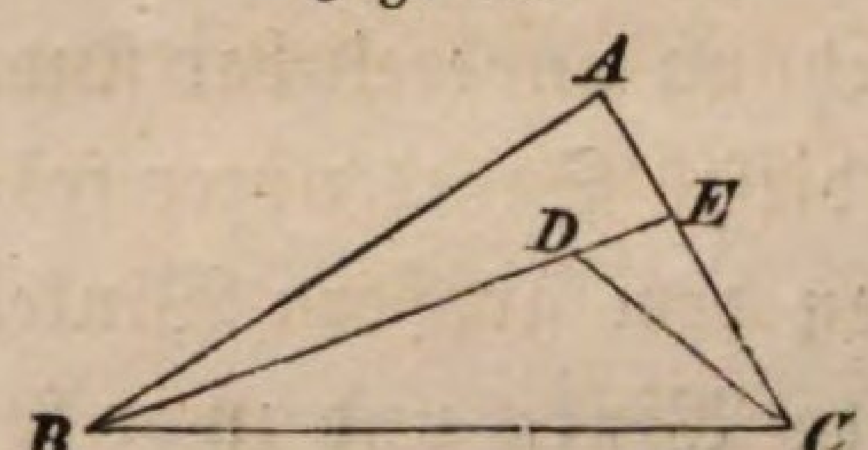
Fig. 28.



Die zweite Behauptung, daß $AC - AB < BC$ sei, läßt sich auch allein durch Construction beweisen, indem man von A aus auf AC ein Stück $AD = AB$ abträgt und B mit D verbindet. Es ist alsdann $\sphericalangle BDA$ ein spitzer Winkel (2, 4. Zus.), mithin BDC ein stumpfer, folglich $DC < BC$ (5, 2. Zus.), d. i. $AC - AB < BC$.

Zusatz. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist auch größer als die zweier Geraden, die einen inneren Punkt desselben mit den Endpunkten der dritten Seite verbinden.

Fig. 29.



Es soll bewiesen werden, daß, wenn D innerhalb ABC liegt, $AB + AC > DB + DC$.

Beweis. Man verlängere DB bis zum Durchschnitte E mit AC; und vergleiche zuerst die Summe $BA + AC$ mit der Summe $BE + EC$, hierauf diese letztere mit $BD + DC$.

Zweiter Abschnitt.

Von der Congruenz der Dreiecke.

Gemäß Nr. 16 der Vorbegriffe sind Dreiecke, Vierecke u. s. w., Vielecke congruent, oder decken sich, wenn sie in allen Stücken des Umfanges d. h. in allen Seiten und Winkeln, der Größe und Ordnung nach völlig übereinstimmen. Das Zeichen der Congruenz ist $\cong$.

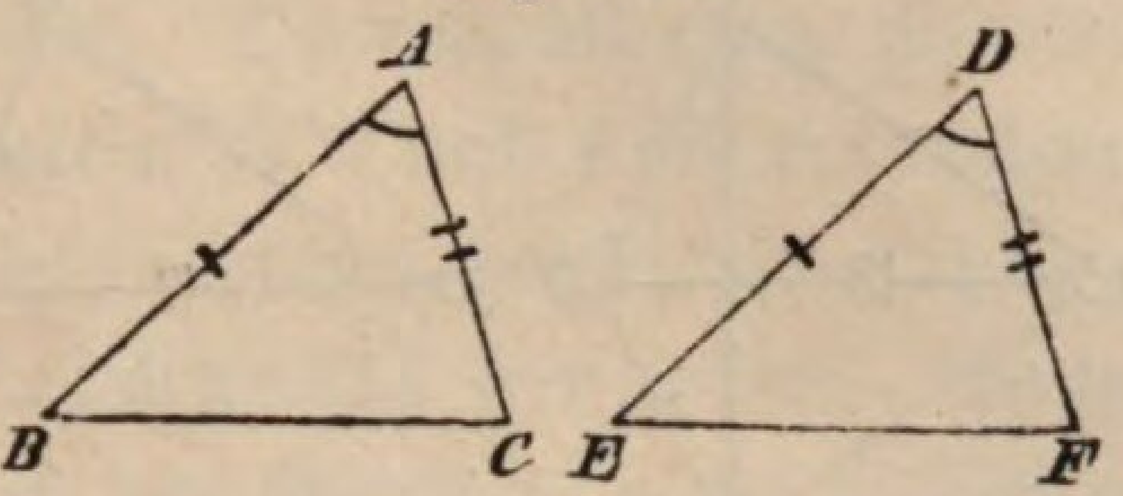
Zusatz. In congruenten Dreiecken stehen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber, und umgekehrt.

7. Satz. **Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so sind sie congruent.**

Es sei $AB = DE$, $AC = DF$ und $\sphericalangle A = \sphericalangle D$; alsdann ist zu zeigen, daß $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Beweis. Man denke sich $\triangle DEF$ mit seiner Ebene so auf $\triangle ABC$ gelegt, daß Seite DE der Richtung nach auf Seite AB, und Punkt D in A zu liegen kommt. Da $DE = AB$, so wird auch Punkt E in B, da ferner $\sphericalangle D = \sphericalangle A$, der Schenkel DF der Richtung nach auf AC fallen, und weil endlich $DF = AC$, der Punkt F in C zu liegen kommen. E liegt nun in B, F in C, daher fallen auch die Seiten EF und BC der Richtung und Länge nach zusammen (Einleitung 8, 1.) und die beiden Dreiecke DEF und ABC decken sich völlig; es wird nun auch $EF = BC$, $\sphericalangle F = \sphericalangle C$, $\sphericalangle E = \sphericalangle B$ sein.

Fig. 30.

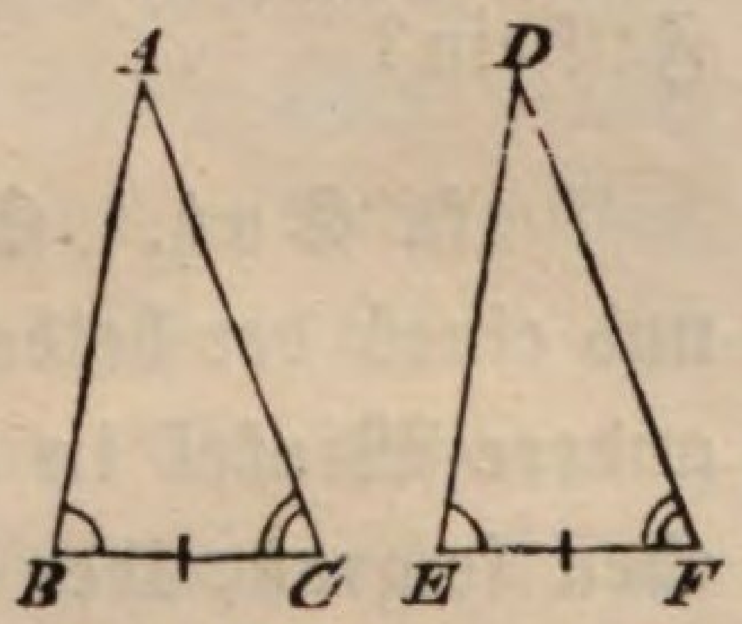


Zusatz. Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind congruent, wenn sie in den Katheten übereinstimmen.

8. Satz. **Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, so sind sie congruent.**

Ist $BC = EF$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, $\sphericalangle C = \sphericalangle F$, so ist $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Fig. 31.



Beweis. Man lege auf dieselbe Weise wie bei Satz 7 die beiden Dreiecke DEF und ABC auf einander, und zwar zunächst so, daß EF auf BC, Punkt E in B zu liegen kommt u. s. w.

Der Schluß des Beweises führt auf Einleitung 8, 2. zurück.

1. Zusatz. Zwei Dreiecke sind auch congruent, wenn sie in einer Seite einem anliegenden und einem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Der Beweis führt mit Hülfe von I. 27, 3. Zusatz gleich auf den Hauptsatz zurück, kann aber auch unabhängig von diesem, indirect mit Hülfe von I. 26 geführt werden.

2. Zusatz. Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind congruent, wenn sie in der Hypotenuse und einem der spitzen Winkel, oder wenn sie in der Kathete und dem anliegenden oder gegenüberstehenden spitzen Winkel übereinstimmen.

9. Satz. **Wenn die drei Seiten eines Dreieckes paarweise den drei Seiten eines andern Dreieckes gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.**

Fig. 32.

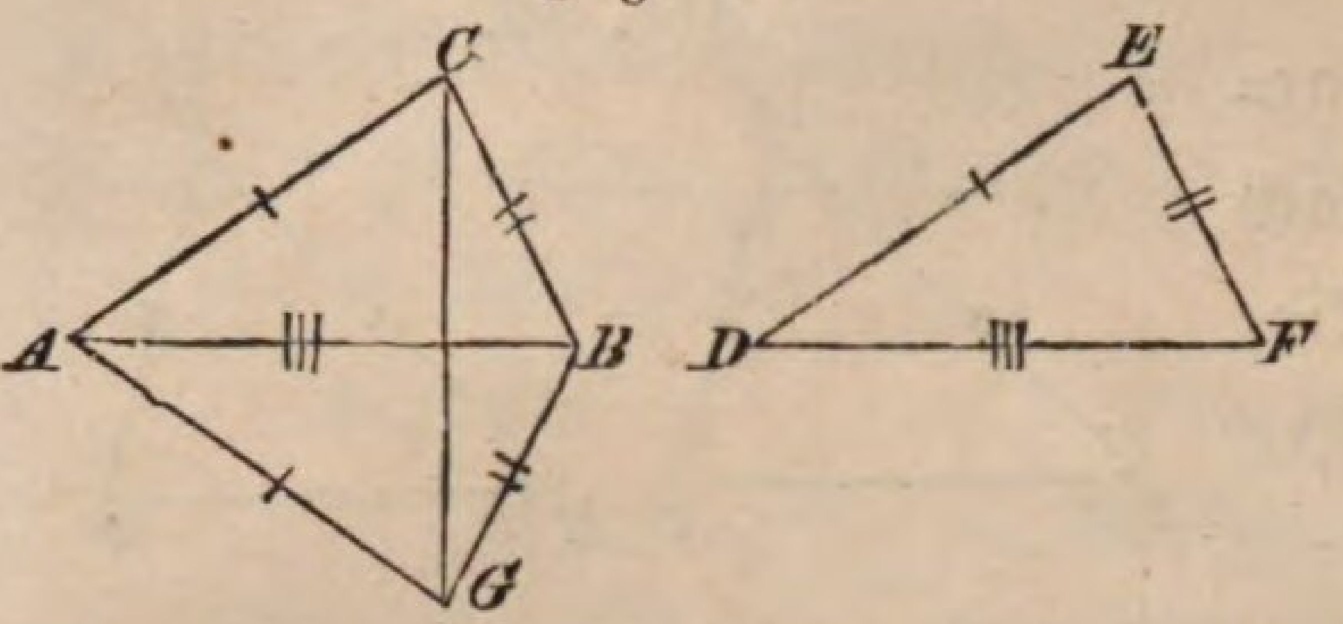
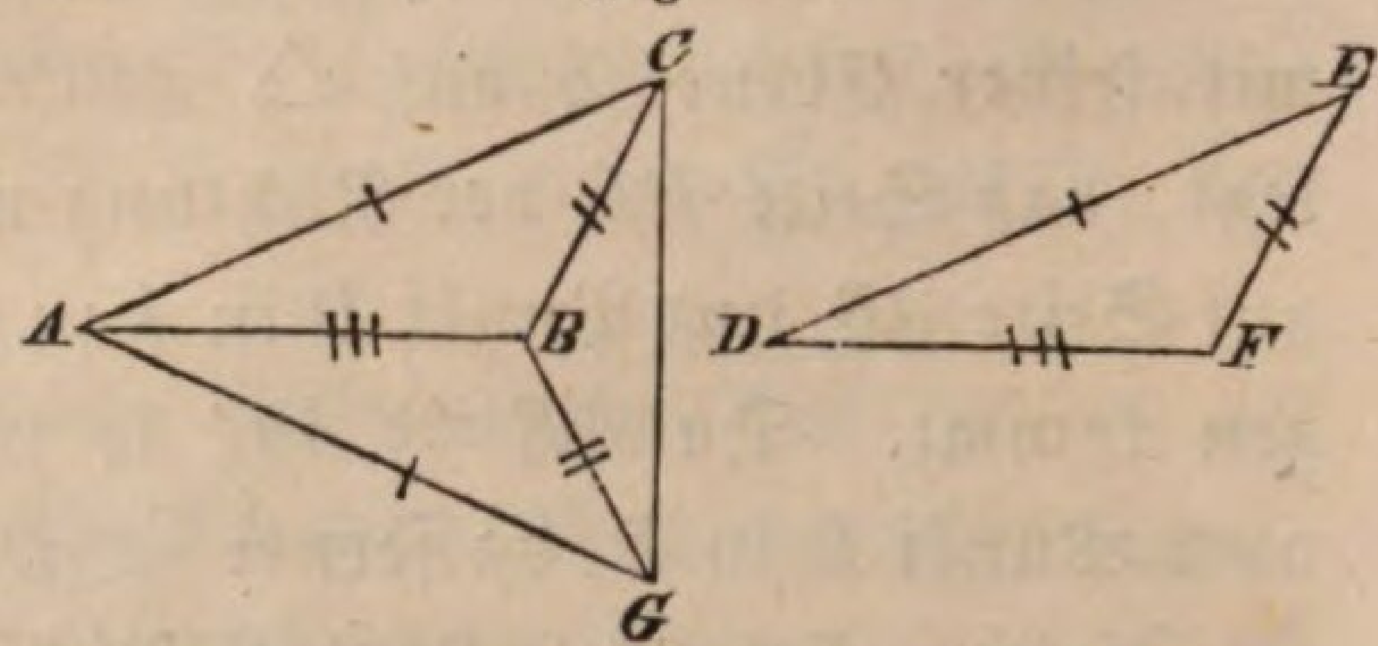


Fig. 33.

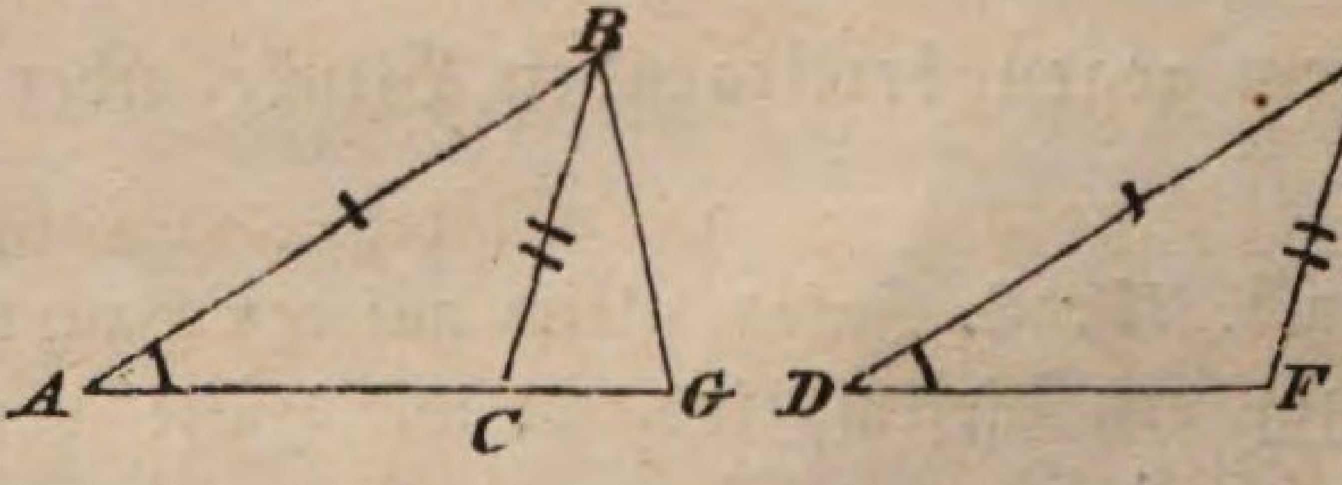


Es sei $AC = DE$, $BC = EF$, $AB = DF$; alsdann ist $\triangle ABC \cong \triangle DFE$.

Beweis. Man trage $\triangle DEF$ so an $\triangle ABC$, daß Seite DF auf AB und Punkt D auf A zu liegen kommt. F wird alsdann in B fallen. Verbindet man nun C mit G, so wird diese Verbindungslinie entweder innerhalb des $\triangle ABC$ (Fig. 32) fallen oder außerhalb (Fig. 33) oder durch einen der Punkte A, B gehen. Durch zweimalige Anwendung des Satzes 2 suche man sowol in Fig. 32 als in Fig. 33 nachzuweisen, daß $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AGB$ ist. Der Beweis wird hierdurch auf 7 zurückgeführt. Im dritten Falle endlich folgt die Congruenz sogleich aus 2. in Verbindung mit 7. — Wann tritt dieser Fall ein?

10. Satz. Stimmen zwei Dreiecke in der Größe zweier Seiten und eines der beiden gegenüber liegenden Winkel überein, und ist der andere Winkel in beiden von derselben Art, d. h. in beiden größer, eben so groß, oder kleiner als ein Rechter, so sind die beiden Dreiecke congruent.

Fig. 34.

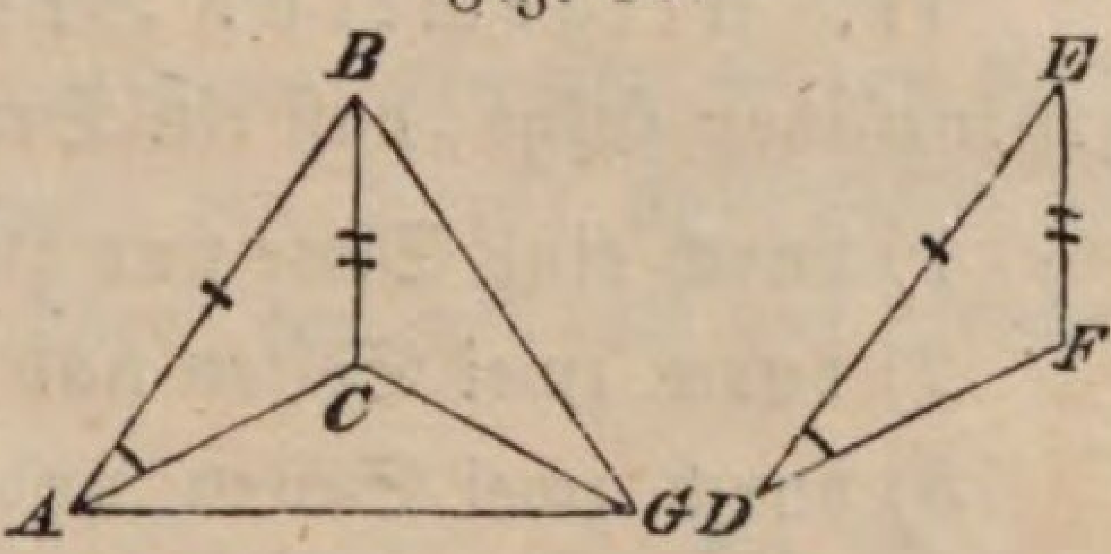


Es sei: $AB = DE$, $BC = EF$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, die Winkel C und F aber seien gleichartig; alsdann ist zu zeigen, daß $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ sei.

1. Beweis. Man denke das $\triangle DEF$ so mit seiner Ebene auf $\triangle ABC$ gelegt, daß Seite DE auf AB, und Punkt D in A zu liegen kommt; der Punkt E fällt dann in B, weil $DE = AB$. Da ferner $\sphericalangle EDF = BAC$, so wird der Schenkel DF der Richtung nach auf den Schenkel AC fallen, und der Punkt F wird nun entweder in C, zwischen A und C, oder in die Verlängerung von AC fallen. Gesetzt, F fiele in die Verlängerung von AC, etwa in G, EF also in die Richtung von BG, so wäre $BC = BG$. In dem gleichschenkeligen Dreiecke BCG wären als-

dann nach 2. 4. Zus. die Winkel *BCG* und *BGC* beide spitze Winkel, der Winkel *BCA* müßte also ein stumpfer sein. Da nun aber der Winkel $G = \sphericalangle F$, so wäre von den beiden Winkeln *BCA* und *EFD* der erstere ein stumpfer, der zweite ein spitzer Winkel, welches der Voraussetzung widerspricht, daß diese beiden Winkel gleichartig sein sollen. Ganz in derselben Weise läßt sich darthun, daß der Punkt *F* nicht zwischen *A* und *C* liegen kann, es bleibt daher nichts übrig, als anzunehmen, daß der Punkt *F* in *C* selbst falle, die Dreiecke daher sich decken.

Fig. 35.



2. Beweis. Man lege das Dreieck *DEF* so neben das $\triangle ABC$, daß die Seite *EF* auf die ihr gleiche Seite *BC*, und der Punkt *E* in den Punkt *B* zu liegen kommt. Da nach der Voraussetzung die beiden Winkel *F* und *BCA*, oder *BCG* und *BCA* gleichartig sind, so wird, der besondere Fall ausgenommen, wo die Winkel *ACB* und *GCB* beide rechte sind, die Linie *ACG* eine gebrochene sein, indem die beiden Winkel *ACB* und *BCG* entweder zusammen mehr oder weniger, als 2 Rechte betragen. Verbindet man nun den Punkt *A* mit *G*, so ist: $\sphericalangle BAG = \sphericalangle BGA$, ferner $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BGC$, mithin, es mag *AG* über oder unter *C* fallen, $\sphericalangle CAG = \sphericalangle CGA$, folglich $CG = CA$ (4) oder $FD = CA$. Die Dreiecke *ABC* und *DEF* stimmen aber nun in den drei Seiten überein, sind somit congruent. Was aber den oben ausgenommenen Fall, wo beide Winkel rechte sind, anbelangt, so braucht für denselben die Congruenz nicht weiter dargethan zu werden, indem sie sich aus 8. Zus. ergiebt.

1. Zusatz. Sind zwei Dreiecke, welche in zwei Seiten und dem einer dieser Seiten gegenüber stehenden Winkel übereinstimmen, nicht congruent, so sind die anderen gegenüberstehenden Winkel Supplemente zu einander.

Die Richtigkeit der Behauptung aus der Figur des 1. Beweises des vorstehenden Satzes zu folgern.

2. Zusatz. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem einer dieser Seiten gegenüber stehenden Winkel überein, und sind die anderen gegenüber stehenden Winkel nicht Supplemente, so sind die Dreiecke congruent.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Zusatz 1.

3. Zusatz. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberstehenden Winkel überein, so sind die Dreiecke congruent.

Es ist zu zeigen, daß die beiden anderen gegenüber stehenden Winkel spitz, also gleichartig sind, wodurch der Beweis dieses Zusatzes auf den Hauptsatz zurückgeführt wird.

4. Zusatz. Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind congruent, wenn sie übereinstimmen in der Hypotenuse und in einer Kathete.

11. Allgemeine Bemerkung. Aus den bewiesenen Congruenzsätzen folgt, daß ein Dreieck völlig bestimmt ist:

1) durch eine Seite und zwei der Winkel;

2) durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel;

3) durch zwei Seiten und einen der Gegenwinkel, wofern dabei die Art des andern Gegenwinkels gegeben ist;

4) durch die drei Seiten;

also überhaupt durch drei Stücke des Umfanges, wofern unter diesen eine Seite ist.

Ist das Dreieck rechtwinkelig und wird der rechte Winkel als Bestimmungsstück nicht gerechnet, so bleiben nur zwei solcher Stücke übrig, nämlich:

1) die Hypotenuse und ein spitzer Winkel.

2) die Kathete und ein spitzer Winkel,

3) die Hypotenuse und eine Kathete,

4) die beiden Katheten.

Was die Bestimmung der Polygone aus gegebenen Stücken überhaupt betrifft, so würde deren Erörterung hier zu weit führen, daher nur Folgendes darüber bemerkt wird: Im Allgemeinen sind, um ein Polygon von n Ecken zu bestimmen, $2n-3$ von einander unabhängige Stücke erforderlich (worunter also wenigstens $n-2$ Seiten sein müssen), womit jedoch nicht gesagt ist, daß durch jede $2n-3$ Stücke, worunter $n-2$ Seiten, ein Polygon völlig bestimmt werde, und nicht in einzelnen Fällen die eine oder andere Nebenbestimmung hinzu treten müsse, wovon die Congruenz der Dreiecke ein Beispiel liefert.

Unter denjenigen Fällen, wo $2n-3$ Stücke ausreichen, und wo also auch solche Polygone, die in diesen Stücken übereinstimmen, congruent sind, sind vorzugsweise folgende zwei zu merken:

1) wenn alle Seiten außer einer, und die davon eingeschlossenen Winkel gegeben sind;

2) wenn alle Seiten außer zwei aneinander stoßenden, und alle Winkel außer einem gegeben sind.

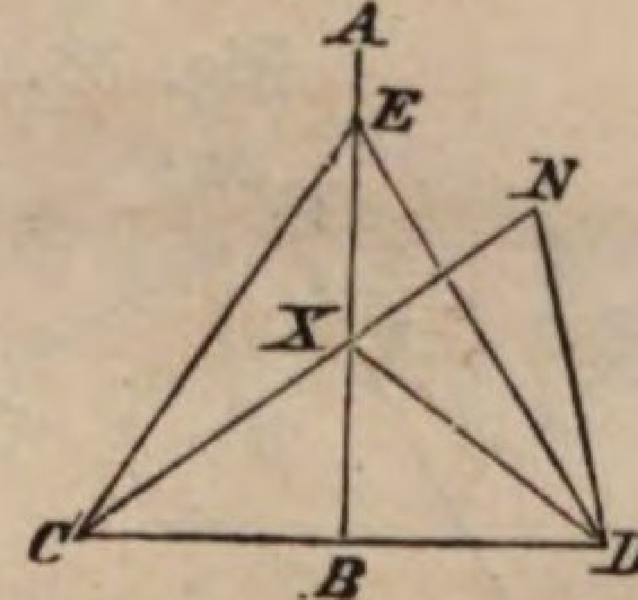
Zugabe einiger Sätze, welche sich unmittelbar aus der Congruenz der Dreiecke ergeben.

12. **Satz. Eine von der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks ausgehende gerade Linie, welche von den drei Bedingungen: 1) den Winkel an der Spitze zu halbiren, 2) die Grundlinie zu halbiren, 3) auf der Grundlinie senkrecht zu stehen, eine erfüllt, erfüllt auch die übrigen.**

Die Beweise sind leicht.

13. **Satz. Steht eine gerade Linie auf einer anderen in der Mitte senkrecht, so ist jeder Punkt der ersteren von den beiden Endpunkten der letzteren gleich weit entfernt; ein Punkt außerhalb der Senkrechten ist demjenigen Endpunkte näher, der mit ihm auf gleicher Seite der Senkrechten liegt.**

Fig. 36.



Es sei $CB = BD$, $AB \perp CD$, E ein beliebiger Punkt in AB, N aber ein Punkt außerhalb AB; alsdann wird $EC = ED$, dagegen $NC > ND$ sein.

Beweis. Der erste Theil der Behauptung ergibt sich leicht aus der Congruenz der Dreiecke EBC und EBD. Den zweiten Theil, daß $NC > ND$ sei, suche man dadurch zu beweisen, daß man nach Ziehung der Hülfslinie XD darzuthun sucht, daß $\sphericalangle NDC > NCD$ ist, woraus sich alsdann nach Satz 5 die Richtigkeit der Behauptung ergibt.

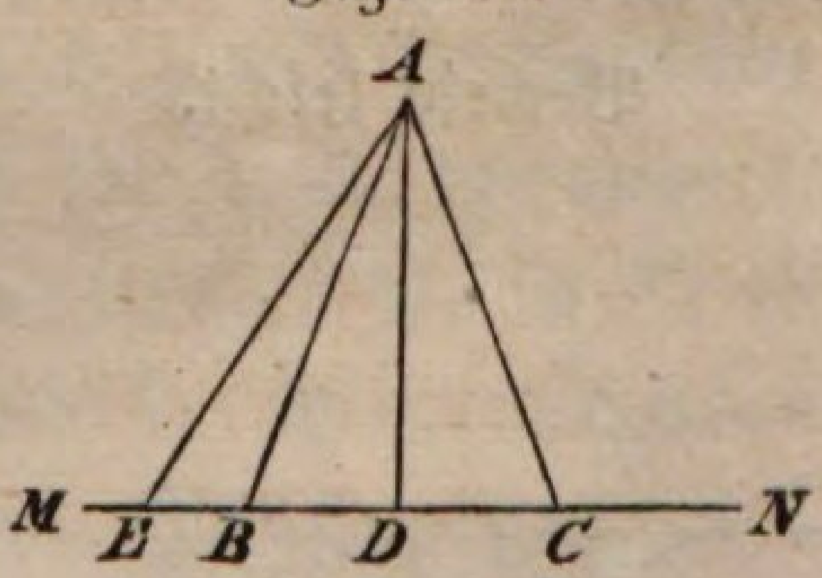
Zusatz 1. Ist ein Punkt von den Endpunkten einer geraden Linie gleichweit entfernt, so liegt derselbe auf der in der Mitte dieser Linie errichteten Senkrechten; sind die Entfernungen ungleich, so liegt er außerhalb der Senkrechten.

Indirect zu beweisen.

Zusatz 2. Sind zwei Punkte einer geraden Linie von den Endpunkten einer anderen gleich weit entfernt, so steht die erste Linie auf der zweiten in deren Mitte senkrecht.

Der Beweis kann direct geführt werden.

Fig. 37.



Satz 14. Von allen geraden Linien, die sich von einem Punkte (A), der außerhalb einer geraden Linie (MN) liegt, nach MN ziehen lassen, ist 1) die Senkrechte (AD) die kürzeste, sind 2) zwei Schiefe (AB, AC), die gleich weit im Winkel von der Senkrechten abstehen,

gleich, ist 3) eine von der Senkrechten entferntere Schiefe (*AE*) größer als die nähere (*AB* oder *AC*).

Beweis. 1) Ist auf 5, 2) auf 8, 3) auf 5 zu gründen.

1. Zusatz. Alle diese Bestimmungen gelten auch umgekehrt. Wie lauten sie umgekehrt?

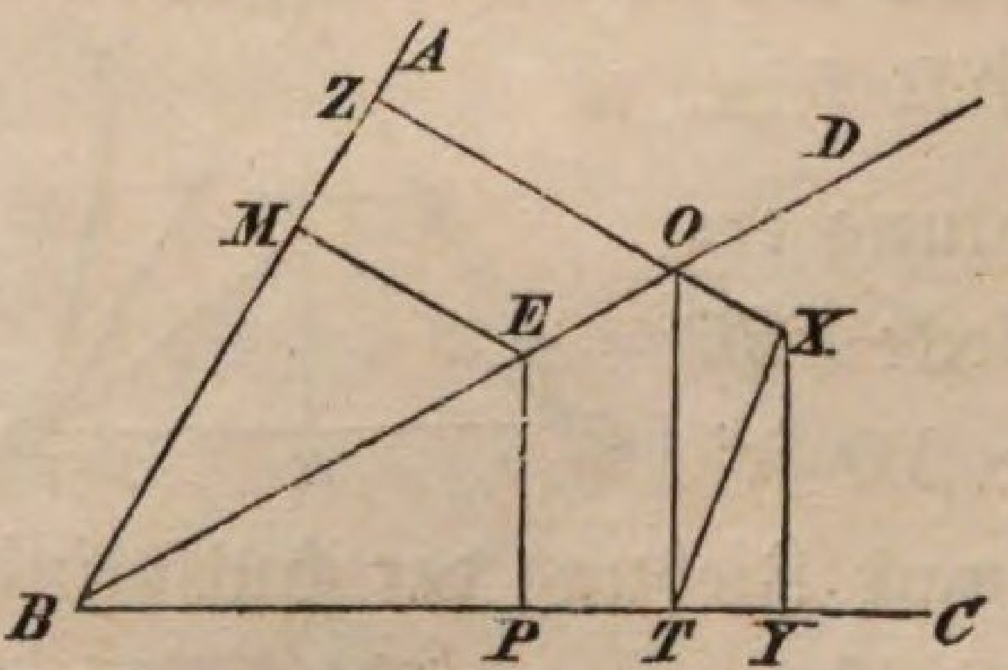
2. Zusatz. Von einem Punkte lassen sich nach einer und derselben geraden Linie nicht mehr als zwei gerade Linien ziehen.

Beweise leicht und zum Theile indirect zu führen.

Bemerkung. Ist von der Entfernung eines Punktes von einer geraden Linie die Rede, so wird hierunter immer die kürzeste, also die vom Punkte auf die Linie gefällte Senkrechte, verstanden.

15. Satz. **Ist ein beliebiger Winkel durch eine gerade Linie halbirt, so ist jeder Punkt dieser Linie von den Schenkeln des Winkels gleich weit entfernt; ein Punkt außerhalb der Halbirungslinie liegt demjenigen Schenkel näher, der mit ihm auf einerlei Seite der Halbirungslinie liegt.**

Fig. 38.



Es sei $\sphericalangle ABC$ durch *BD* halbirt; alsdann ist der Punkt *E* von den Schenkeln *AB* und *BC* gleich weit entfernt, der Punkt *X* ist aber von denselben ungleich weit entfernt.

Beweis. Der erste Theil der Behauptung folgt aus der Congruenz der Dreiecke *EMB* und *EPB* (II. 8. Zus.), aus der sich ergiebt, daß $EM = EP$. Um zu zeigen, daß die Senkrechte *XZ* größer als die Senkrechte *XY* sei, fälle man vom Durchschnittspunkte *O* der *XZ* mit *BD* auf *BC* die Senkrechte *OT* und ziehe *TX*, alsdann ist: $OT = OZ$, $OT + OX > TX$, ferner $TX > XY$, mithin auch $OT + OX$, oder $OZ + OX$, d. i. $XZ > XY$.

Zusatz. Ist ein Punkt von zwei sich durchschneidenden geraden Linien gleich weit entfernt, so liegt derselbe auf der Halbirungslinie des Winkels der beiden Linien.

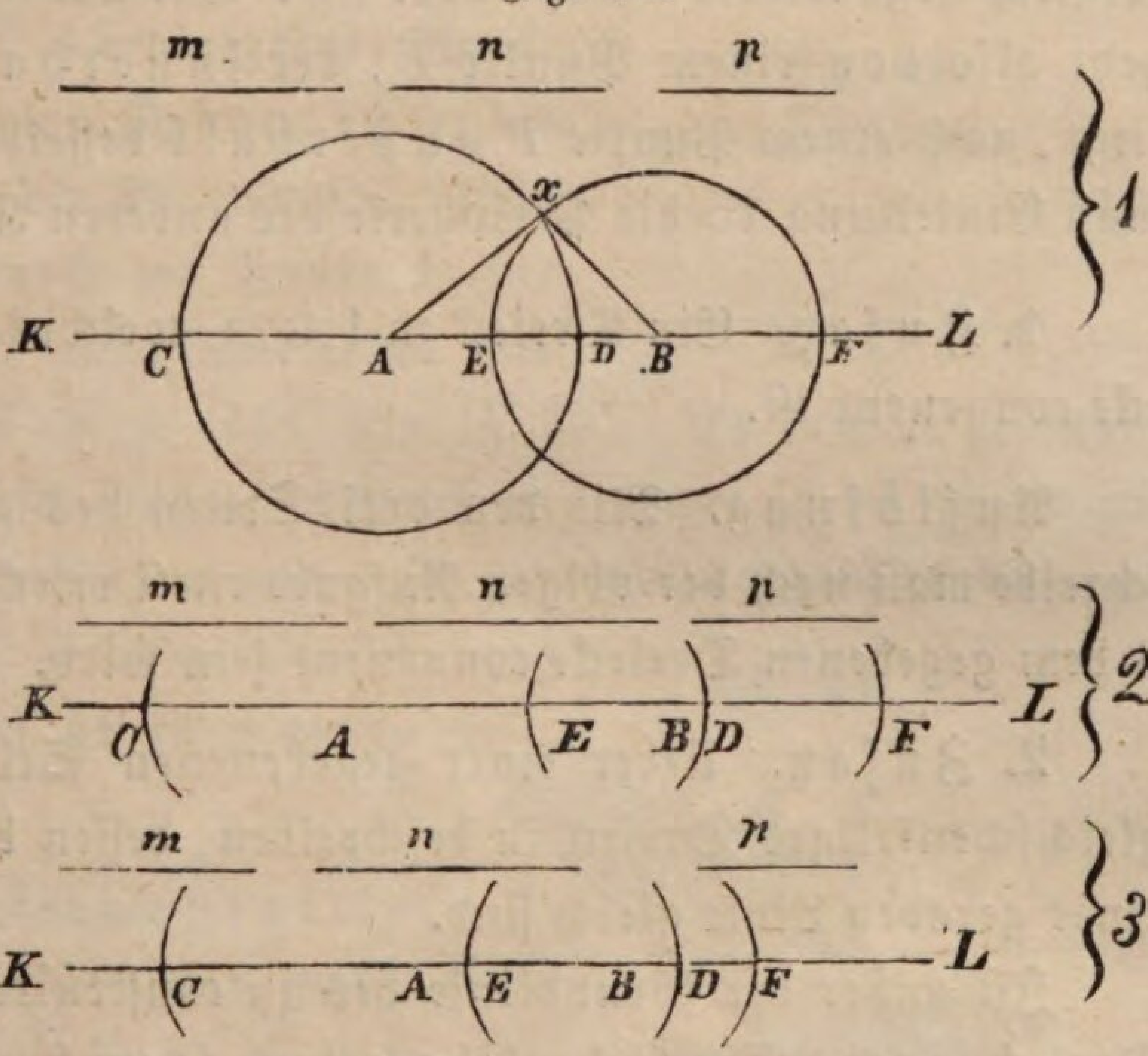
Beweis leicht.

Dritter Abschnitt.

Geometrische Elementar-Aufgaben, deren Auflösung unmittelbar auf der Congruenz der Dreiecke beruht.

16. Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, dessen drei Seiten gegebenen Linien: m, n, p gleich sind.

Fig. 39.



Einschränkung (Determination). Nach S. 6 ist das Dreieck nur möglich, wenn im Falle einer Ungleichheit unter den gegebenen Längen die größte derselben kleiner als die Summe der beiden anderen ist; denn es sind dann je zwei zusammen größer als die dritte. Genügen nun m, n, p dieser Bedingung, so nehme man auf einer geraden Linie KL ein Stück AB gleich einer der drei gegebenen Längen, z. B. gleich m, beschreibe aus A als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $= n$, so wie um B einen Kreis mit einem Radius $= p$. Schneiden diese Kreise sich in einem Punkte x, so hat man diesen nur mit A und B zu verbinden, um das verlangte Dreieck xAB zu erhalten.

Es wird nun zu beweisen sein, daß die Kreise, wenn obige Bedingung erfüllt ist, sich wirklich schneiden. Zu dem Ende ist nur nachzuweisen, daß von den beiden Punkten, in welchen der um B beschriebene Kreis die Linie KL trifft, der eine innerhalb, der andere außerhalb des um A beschriebenen Kreises liegt. Der um A beschriebene Kreis treffe die Linie KL nach K hin in C, nach L hin in D; der andere, um B beschriebene, dieselbe Linie nach K hin in E, nach L hin in F; es ist dann $BC = CA + AB = n + m$; da nun gemäß der Determination $p < n + m$ und $p = BE$, so ist auch $BE < BC$. Ist ferner $m > n$

(Fig. 1), so ist $p > m - n$, daher $BE > AB - AD$, d. i. $BE > BD$. Es liegt also in diesem Falle E zwischen C und D. Ist $m = n$ (Fig. 2), oder $m < n$ (Fig. 3), so erhellt ohne Weiteres, daß E nicht über D hinaus nach L zu liegen kann, also ebenfalls zwischen C und D liegen muß. Was den Punkt F anbelangt, so liegt derselbe, wenn $m > n$, oder $m = n$ (Fig. 1 und 2) seitwärts B nach L zu, folglich außerhalb der Strecke CD. Im Falle aber $m < n$ (Fig. 3) ist nach der Determination $p > n - m$, d. i. $BF > AD - AB$, oder $BF > BD$, folglich liegt wieder F außerhalb CD. Die um B beschriebene Kreislinie geht also von einem Punkte E, der innerhalb des Kreises um A liegt, nach einem Punkte F außerhalb desselben, und muß daher gemäß Einleitung 15 die Peripherie des anderen Kreises um A treffen.

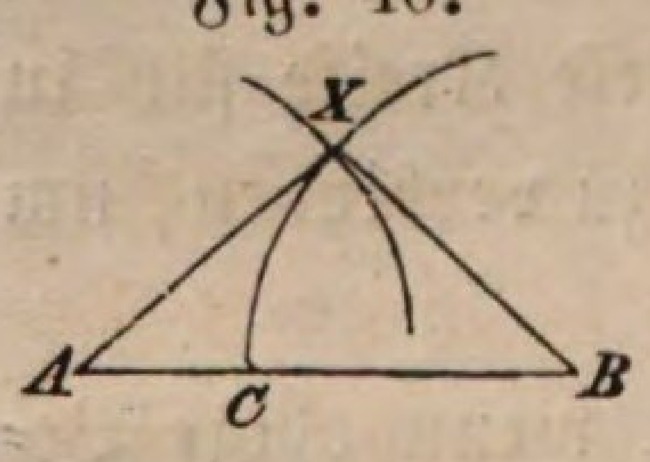
1. Zusatz. Ein Dreieck zu bilden, welches einem gegebenen Dreiecke congruent ist.

Auflösung. Mit den drei Seiten des gegebenen Dreiecks beschreibe man nach der obigen Aufgabe ein Dreieck, welches alsdann nach 9 dem gegebenen Dreiecke congruent sein wird.

2. Zusatz. Ueber einer gegebenenen Seite als Grundlinie ein gleichschenkeliges Dreieck zu beschreiben, dessen beide übrige Seiten jede einer geraden Linie gleich sind.

Ist außer der Grundlinie des zu construirenden gleichschenkeligen Dreiecks noch dessen Schenkel gegeben, so muß die Grundlinie kleiner sein, als der doppelte Schenkel. Die Construction geschieht gemäß obiger Lösung.

Fig. 40.



Soll über AB ein beliebiges gleichschenkeliges Dreieck construirt werden, so theile man AB in zwei ungleiche Theile AC und CB, und beschreibe mit der größeren BC oder einem anderen Radius, der länger als BC ist, aus A und B als Mittelpunkten Kreise; den Durchschnittspunkt X verbinde man mit den Endpunkten A und B der gegebenen Geraden, wodurch man das verlangte gleichschenkelige Dreieck AXB erhält.

3. Zusatz. Ueber einer gegebenen Seite als Grundlinie ein gleichseitiges Dreieck zu construiren.

Auflösung leicht.

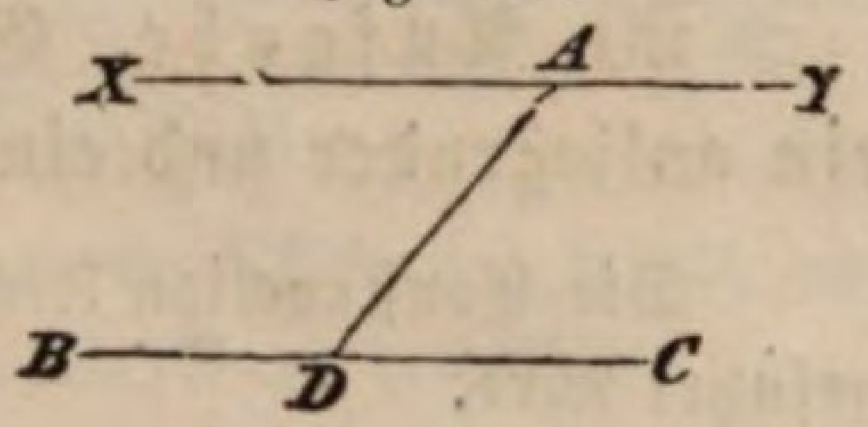
17. Aufgabe. An einer gegebenen Linie in einem gegebenen

Punkte derselben einen Winkel anzutragen, welcher einem gegebenen Winkel gleich ist.

Auflösung. Man suche den gegebenen Winkel in ein Dreieck, am besten in ein gleichschenkeliges Dreieck zu bringen, und trage in zweckmäßiger Lage an die gegebene Linie ein diesem congruentes Dreieck an.

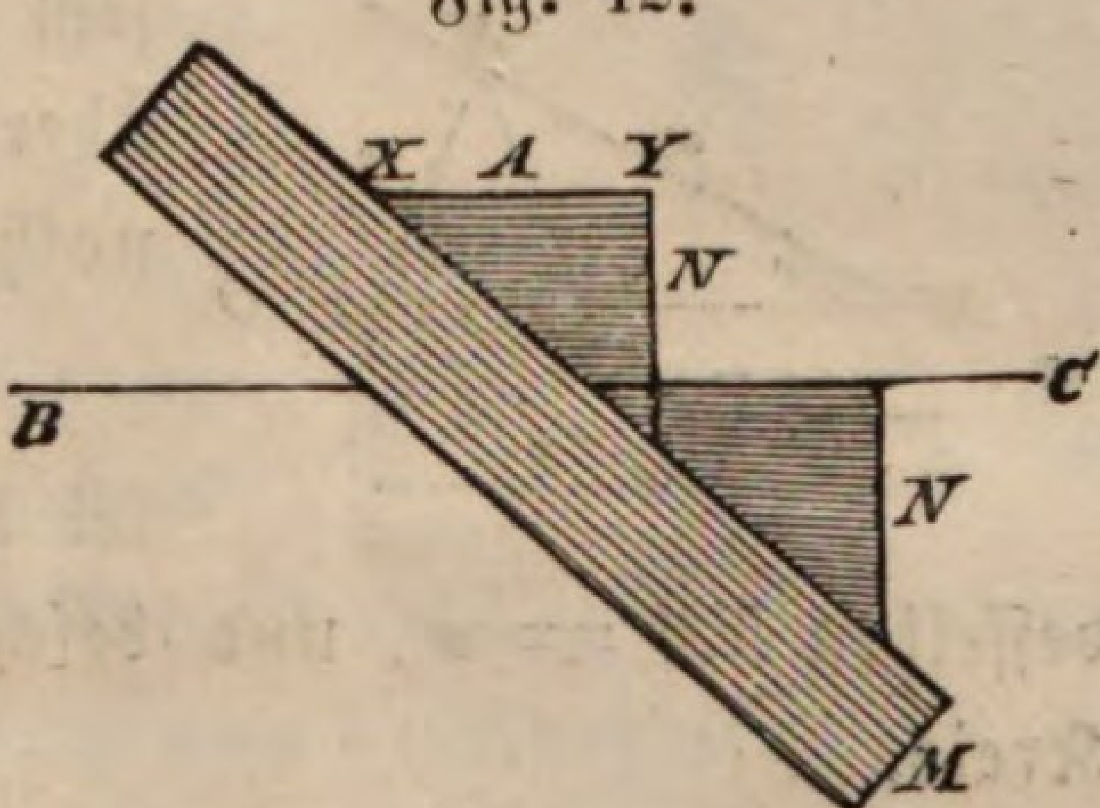
18. **Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt eine Parallele mit einer gegebenen geraden Linie zu ziehen.**

Fig 41.



Analysis. Es sei A der gegebene Punkt und BC die gegebene Linie. Gesetzt, XY sei die gesuchte Linie, welche der BC parallel läuft, so wird, wenn man durch den Punkt A eine beliebige, die BC in D durchschneidende Gerade AD zieht, $\sphericalangle XAD = \sphericalangle ADC$ sein (I. 20). Es kommt demnach bei der Construction dieser Aufgabe darauf an, A mit einem beliebigen Punkte D der BC zu verbinden und nach der vorhergehenden Aufgabe einen dem Winkel ADC gleichen Winkel an die andere Seite von AD in A anzutragen.

Fig. 42.

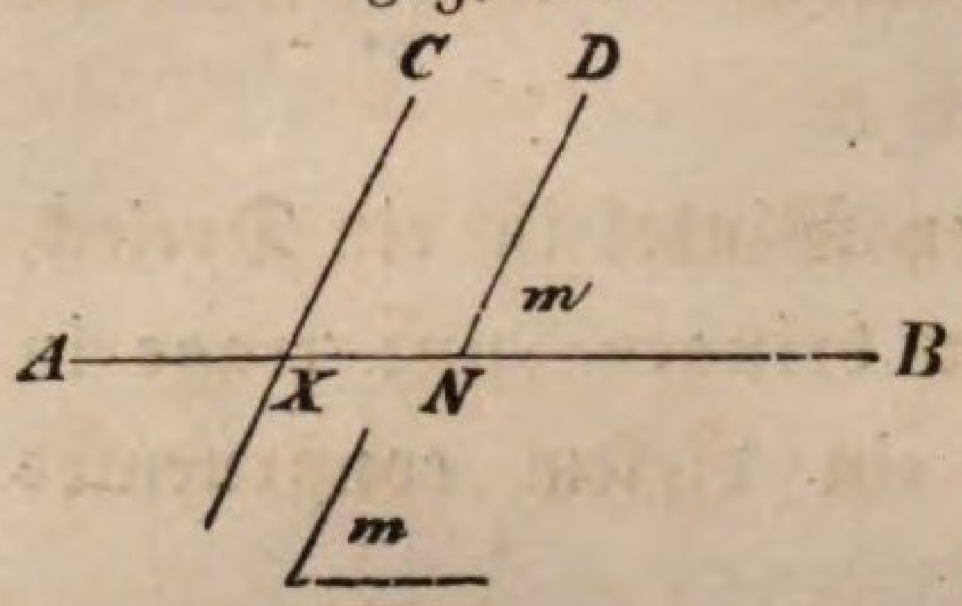


Bemerk. Die bekannte praktische Lösung dieser Aufgabe mit Hülfe zweier Lineale, eines festen M und eines verschiebbaren dreieckigen N, beruht auf demselben Princip, wie obige theoretische. Legt man nämlich zuerst das dreieckige Lineal N mit einer der Kanten an die gegebene Linie BC an, hierauf an eine andere Kante desselben das Lineal M und schiebt, indem man M fortwährend fest hält, das erstere Lineal so lange fort, bis die früher an BC liegende Kante nun durch A geht, so wird eine längs dieser Kante gezogene Gerade XY der Linie BC parallel sein.

19. **Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer geraden Linie an diese eine andere zu ziehen, die mit jener einen gegebenen Winkel macht.**

Es soll von dem gegebenen Punkte C nach der Linie AB eine gerade Linie CX so gezogen werden, daß der Winkel CXB einem gegebenen Winkel m gleich werde.

Fig. 43.



Analysis. Gesetzt, CX sei die verlangte Linie, also $\sphericalangle CXB = m$. Legt man den gegebenen Winkel m an die Linie AB in einem beliebigen Punkte N an, so daß $\sphericalangle DNB = \sphericalangle m$, so ist auch $\sphericalangle CXB = DNB$, also $DN \parallel CX$. Die Aufgabe ist also auf die vorhergehende zurückgeführt.

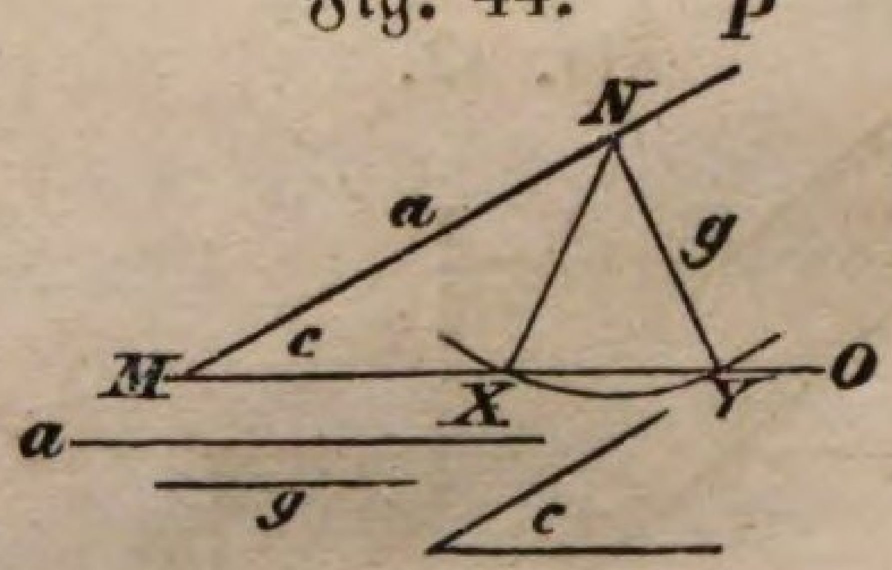
Ist der gegebene Winkel m kein Rechter, so lassen sich von C aus zwei Linien ziehen, welche mit der Linie AB den Winkel m bilden.

20. Aufgabe. Ein Dreieck zu bilden, von welchem eine Seite, ein anliegender und ein gegenüber stehender Winkel gegeben sind.

Die Construction leicht, indem die Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt wird.

21. Aufgabe. Ein Dreieck aus zwei Seiten und einem gegenüber stehenden Winkel zu construiren.

Fig. 44.



Es sei c der gegebene Winkel, a die diesem Winkel anliegende, und g die ihm gegenüberstehende Seite, welche wenn $c \geqq R$ ist, nothwendig größer als a sein muß.

Construction. Man mache einen Winkel $PMO = c$; nehme auf dem Schenkel MP desselben $NM = a$, und beschreibe dann um N mit g als Radius einen Kreis.

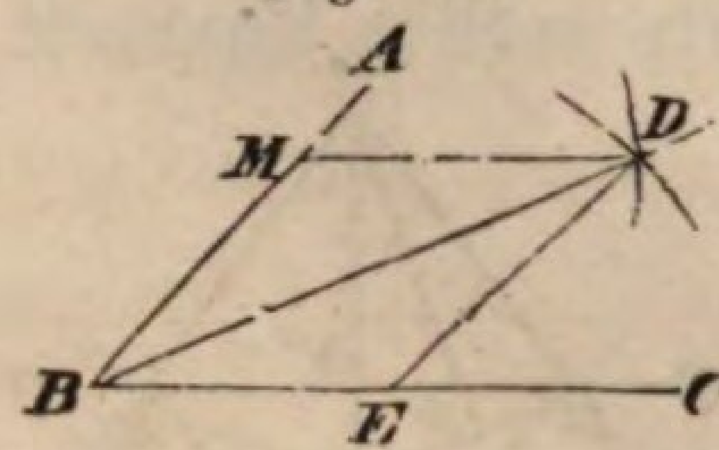
Ist $g > a$, so wird dieser Kreis jedenfalls, es mag $c \gtreqless 1\,R$ sein, den Schenkel MO nur in einem Punkte außerhalb M treffen. Ist $c < 1\,R$ und $g < a$, so darf g nicht kleiner als der Abstand des Punktes N von MO sein. Den aus N mit a beschriebenen Kreis wird die Linie MO in zwei Punkten X und Y treffen, wenn g größer ist als der Abstand des Punktes N von MO. Verbindet man nun N mit dem Durchschnittspunkte X oder Y des Kreises und der MO, so genügt sowohl MNX als MNY den Bedingungen der Aufgabe.

22. Aufgabe. Einen gegebenen Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen.

Construction. Man trage von B aus auf BA und BC die beiden gleichen Stücke BM und BE ab, beschreibe über ME als Grundlinie ein

beliebiges gleichschenkeliges Dreieck *MDE* (II. 16, Zus. 2) und verbinde die Spitze desselben *D* mit *B*, so wird durch diese Linie *BD* der Winkel *ABC* halbirt werden.

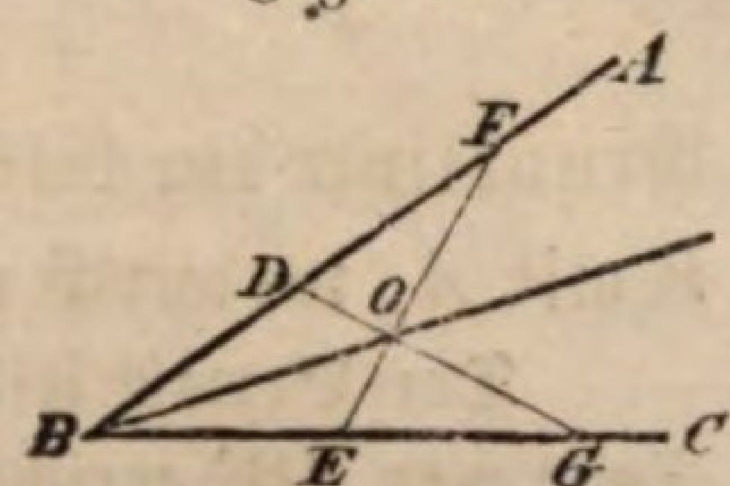
Fig. 45.



Der Beweis ergiebt sich aus 9.

Zweite Lösung. Man trage von *B* an auf *BA* und *BC* die beiden gleichen Linien *BD* und *BE* so wie die beiden gleichen Linien *BF* und *BG* ab, verbinde *D* mit *G*, *F* mit *E* und den Durchschnittspunkt *O* der beiden Linien *DG* und *EF* mit *B*; alsdann wird der Winkel *ABC* durch die Linie *OB* halbirt.

Fig. 46.

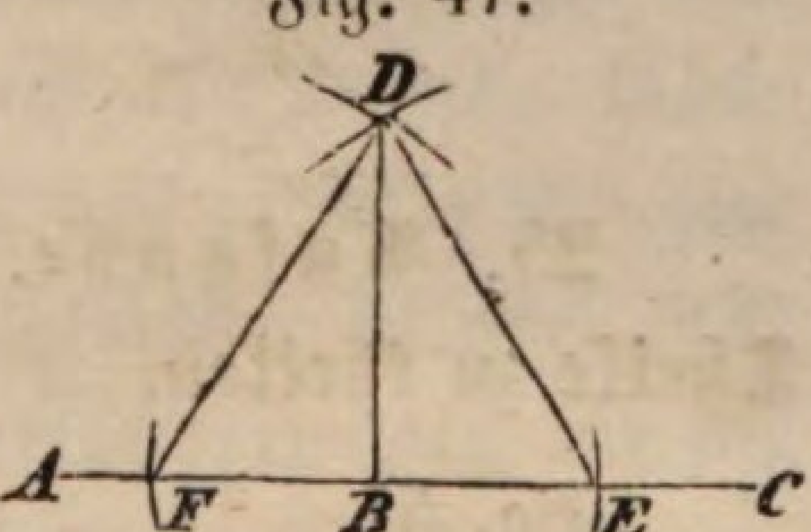


Man suche zuerst die Congruenz der beiden Dreiecke *BEF* und *BDG*, und hieraus die Congruenz der beiden Dreiecke *BOE* und *BOD* zu beweisen.

23. Aufgabe. Auf einer gegebenen Linie in einem gegebenen Punkte derselben eine Senkrechte zu errichten.

Es soll auf *AC* in dem Punkte *B* eine Senkrechte errichtet werden. Da *ABC* ein flacher Winkel ist, so kommt es nach Anleitung der vorhergehenden Aufgabe nur darauf an, den flachen Winkel *ABC* zu halbiren. Man trage also, wie vorhin, von *B* aus auf *BA* und *BC* die gleichen Stücke *BF* und *BE* ab, beschreibe über *FE* als Grundlinie ein beliebiges gleichschenkeliges Dreieck *FDE* und verbinde *D* mit *B*, so ist *DB* die verlangte Senkrechte.

Fig. 47.



Beweis wie oben.

24. Aufgabe. Von einem Punkte außerhalb einer gegebenen geraden Linie eine Senkrechte auf dieselbe zu fällen.

Es soll von dem gegebenen Punkte *A* auf die gegebene Linie *BC* eine Senkrechte gefällt werden.

Analysis. Gesetzt, *AX* sei die verlangte Senkrechte. Macht man *XD* = *XE* und verbindet *A* mit *D* und *E*, so wird $\triangle DAX \cong \triangle EAX$ (II. 8), mithin *AD* = *AE* und $\sphericalangle DAX = \sphericalangle XAE$ sein. Es kommt also nur darauf an, von *A* aus die beiden gleichen Linien *AD* und *AE* an die Linie *BC* zu ziehen und den Winkel *DAE* zu halbiren.

Fig. 48.

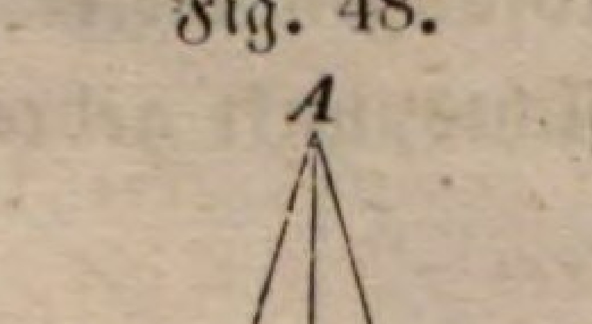
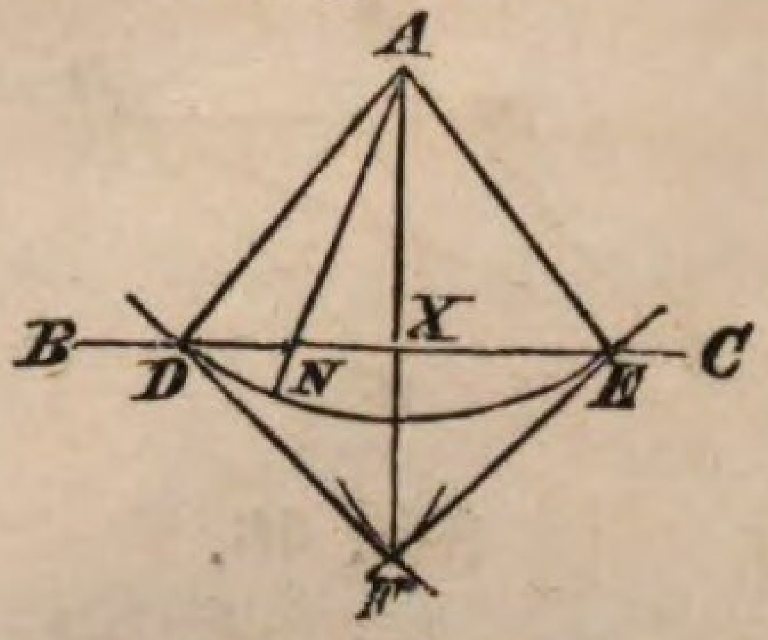


Fig. 49.

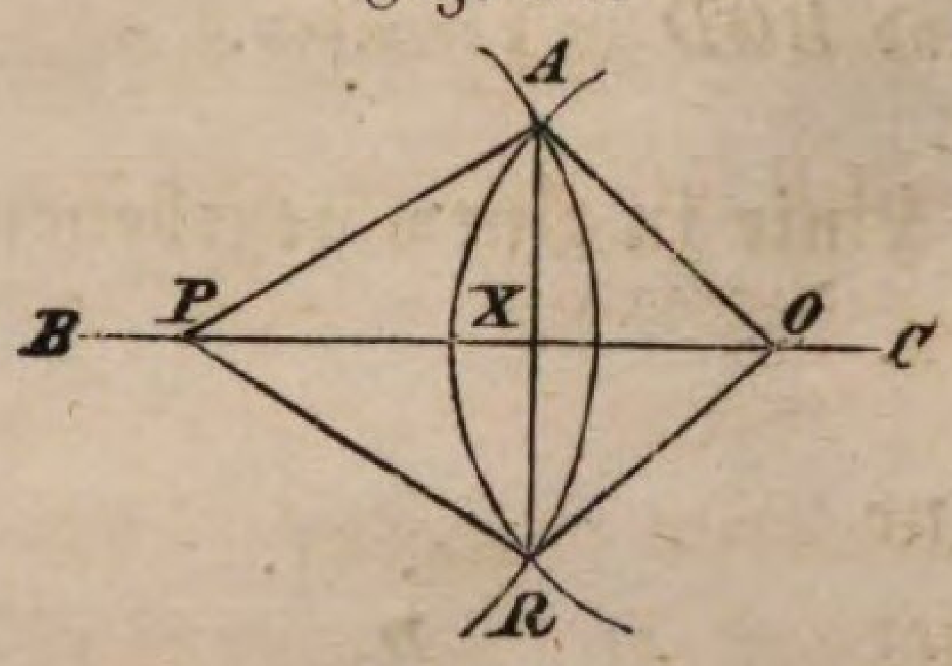


C o n s t r u c t i o n. Man verbinde den Punkt *A* mit einem beliebigen Punkte *N* auf der entgegengesetzten Seite der Linie *BC*, beschreibe aus *A* mit *AN* einen Kreis und verbinde die Durchschnittspunkte *D* und *E* dieses Kreises und der Linie *BC* mit dem Punkte *A*. Um den Winkel *DAE* zu halbiren, beschreibe man über *DE* als Grundlinie ein beliebiges gleichschenkeliges Dreieck *DFE* und verbinde *F* mit *A*, wodurch man die verlangte Senkrechte *AX* erhält.

Der Beweis leicht. — Darf man das Dreieck *DEF* auch auf derselben Seite von *DE* errichten, auf welcher *ADE* liegt.

Eine zweite Construction derselben Aufgabe ist folgende:

Fig. 50.

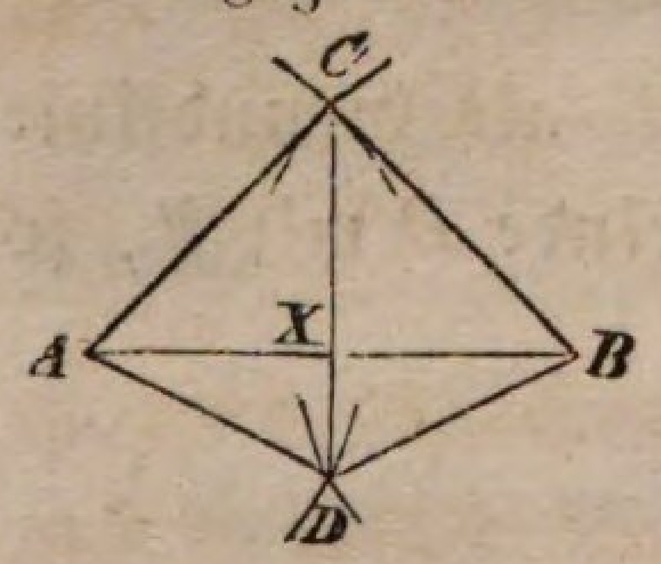


Man nehme auf *BC* zwei Punkte *P* und *Q*, und beschreibe aus *P* und *Q* mit *PA*, *QA* als Radien zwei Kreise, die sich außer in *A* noch einmal auf der entgegengesetzten Seite von *PQ* in *R* treffen. Die Verbindungslinie *AR* ist die verlangte Senkrechte.

Der Beweis ist leicht.

25. Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Fig. 51.



C o n s t r u c t i o n. Man errichte auf der gegebenen Linie *AB* ein beliebiges gleichschenkeliges Dreieck *ABC* und halbire den Winkel *ACB* dadurch, daß man auf *AB* noch ein zweites gleichschenkeliges Dreieck *ADB* errichtet. Verbindet man *C* mit *D*, so wird diese Verbindungslinie *CD* die gegebene *AB* in *X* halbiren.

Der Beweis ist einfach.

B e m e r k u n g zu den drei vorhergehenden Aufgaben: Die Auflösungen dieser Aufgaben werden unter einen gemeinschaftlichen Gesichtspunkt gebracht, wenn man dieselben auf II. 13, Zusatz 2, gründet.

Vierter Abschnitt.

Nichtcongruenz der Dreiecke.

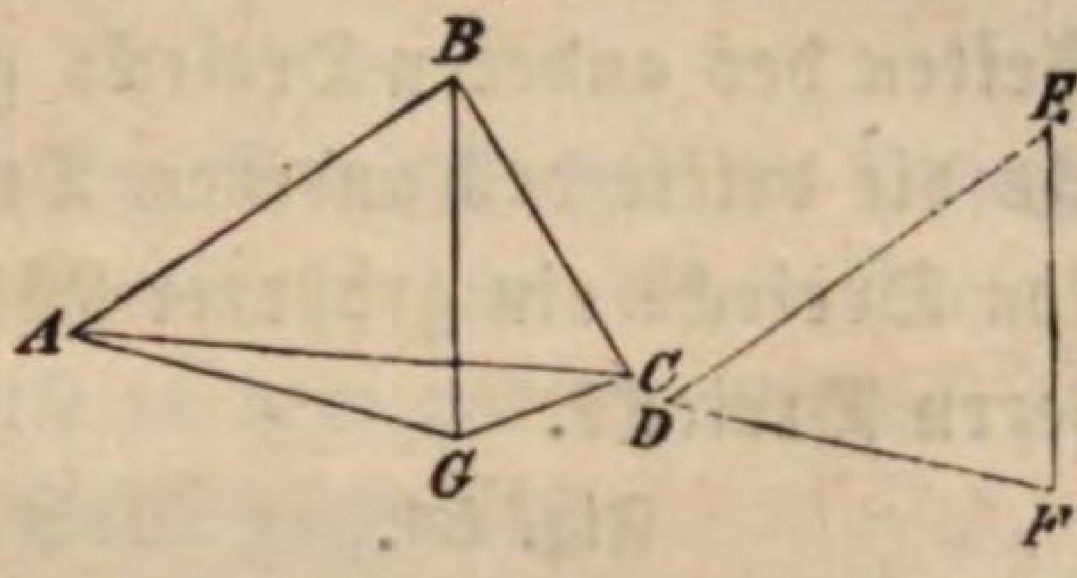
26. Satz. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen, zweien Seiten des anderen Dreiecks gleich, und ist der eingeschlossene Winkel

des ersteren Dreiecks größer, als der eingeschlossene Winkel des anderen Dreiecks, so ist die dritte Seite des ersteren Dreiecks größer als die dritte Seite des zweiten Dreiecks.

Es sei: $BA = ED$,
$BC = EF$,
$\measuredangle ABC > \measuredangle DEF$, alsdann ist

$AC > DF$.

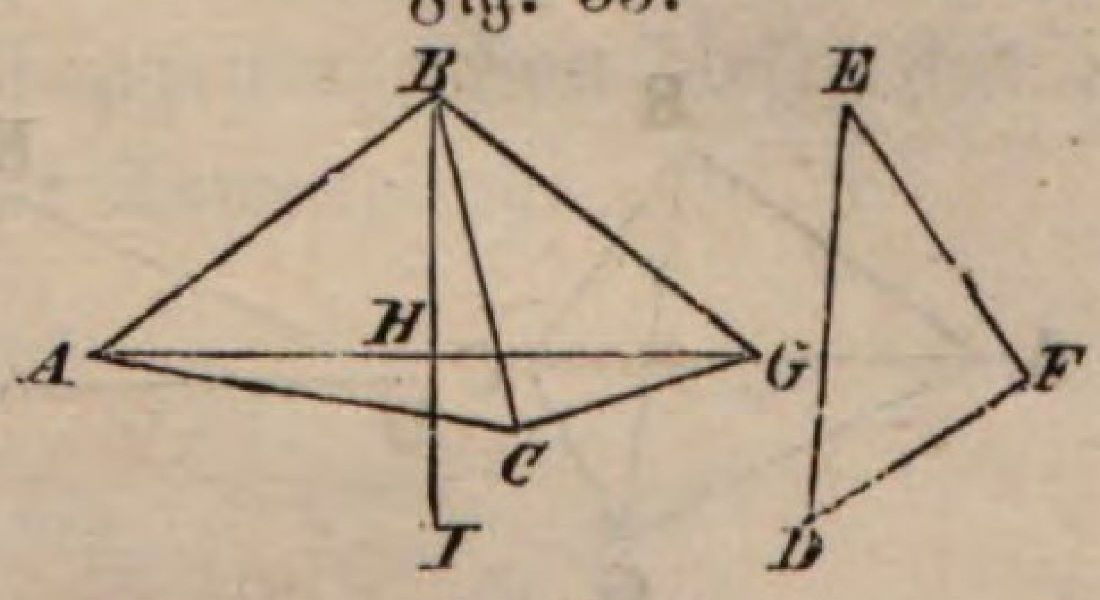
Fig. 52.



1. Beweis. Man lege $\triangle DEF$ so auf $\triangle ABC$, daß DE auf AB, und Punkt E in B zu liegen kommt; DEF nehme alsdann die Lage von ABG an, wobei, da $\measuredangle DEF = ABG$, und $DEF < ABC$, BG innerhalb der Ebene des Winkels ABC fällt. Der Punkt G kann hierbei entweder auf die Linie AC, oder außerhalb oder innerhalb des Dreiecks ABC fallen. Fällt G in AC zwischen A und C, so ist AG als Theil von AC kleiner als AC, mithin auch $DF < AC$; fällt G außerhalb des $\triangle ABC$, so ziehe man GC; alsdann ist, weil $BG = BC$, $\measuredangle BGC = \measuredangle BCG$. Da nun $\measuredangle AGC > BGC$ und $\measuredangle BCG > ACG$, so ist um so mehr $\measuredangle AGC > \measuredangle ACG$, mithin $AC > AG$ (II. 5), also auch $AC > DF$. Fällt endlich G innerhalb des Dreiecks ABC, so läßt sich auf dieselbe Art zeigen, daß $AC > DF$, wenn man statt der beiden gleichen Winkel BGC und BCG deren Nebenwinkel nimmt, welche die Verlängerungen der BG und BC mit GC bilden oder auch, wenn man AG über G hinaus verlängert und bemerkt, daß AGC in diesem Falle nothwendig ein stumpfer Winkel ist.

Ein 2. Beweis ergiebt sich bei derselben Hülfsconstruction durch Anwendung des Satzes 6 auf die Dreiecke AOG, BOC, wenn O den Durchschnittspunkt von BG und AC bezeichnet. Der Schüler suche denselben.

Fig. 53.

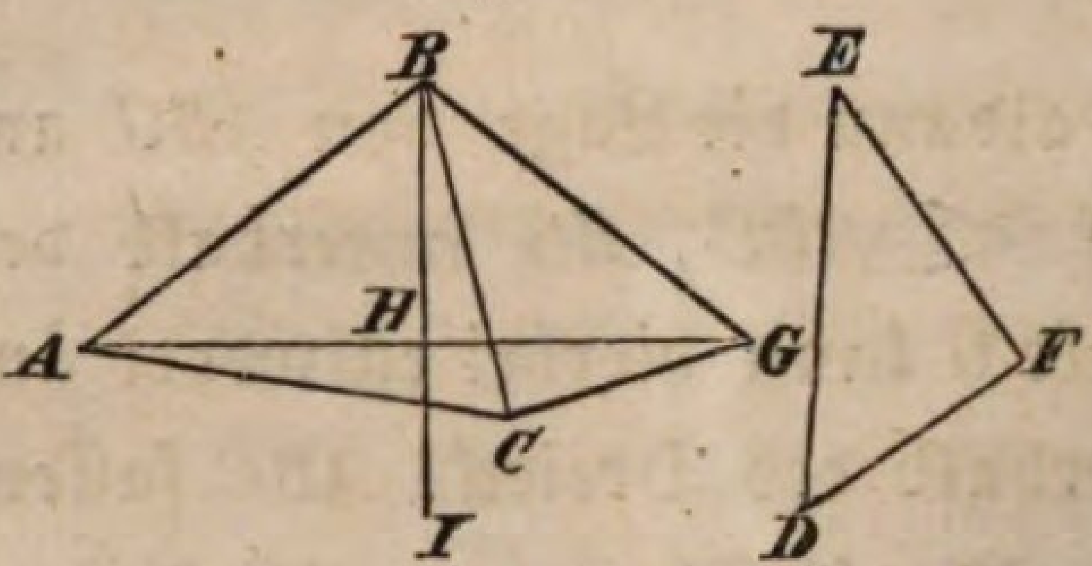


3. Beweis. Man lege das Dreieck DEF so neben ABC, daß Seite EF auf BC, und Punkt E in B zu liegen kommt; es sei $\triangle BCG \cong \triangle EFD$. Verbindet man A mit G, so ist, weil $BA = BG$, das $\triangle BAG$ ein gleichschenkeliges. Halbirt man den Winkel ABG durch die Gerade BI, so muß diese Linie BI, weil $\measuredangle ABC$ nach der Voraussetzung größer als CBG ist, nothwendig

zwischen die Schenkel des größeren Winkels ABC fallen. Da nun aber BH auf AG in der Mitte H senkrecht steht, so wird nach Satz 13 $CA > CG$, also auch $CA > DF$ sein, wodurch also der Satz bewiesen ist.

27. Satz. **Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen zweien Seiten des anderen Dreiecks gleich, und ist die dritte des einen größer als die dritte des anderen Dreiecks, so steht der dritten Seite des ersten Dreiecks ein größerer Winkel gegenüber, als der dritten des anderen Dreiecks.**

Fig. 54.



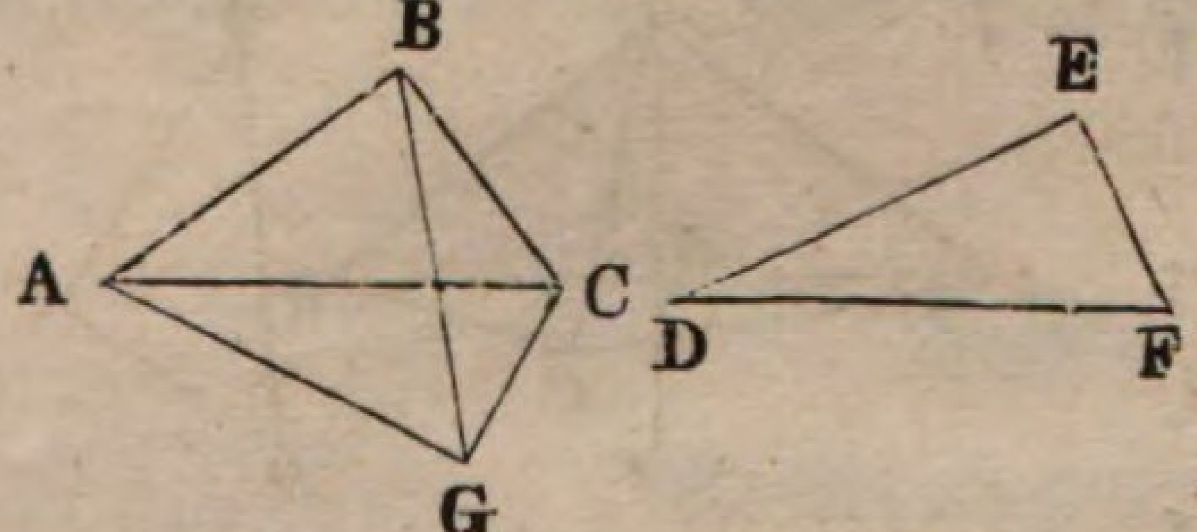
Es sei $AB = DE$, $BC = EF$ und $AC > DF$; alsdann ist $\sphericalangle ABC > \sphericalangle DEF$.

1. Beweis. Wäre $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$, so wäre nach S. 7 $\triangle ABC \cong DEF$ und daher $AC = DF$; wäre aber $\sphericalangle ABC < DEF$, so müßte nach dem vorhergehenden Satze $AC < DF$ sein. Beides widerspricht der Voraussetzung; daher $\sphericalangle ABC > DEF$.

2. Beweis. Man lege das $\triangle DEF$ ganz auf dieselbe Weise, wie bei dem vorhergehenden Satze, neben das $\triangle ABC$ und halbire den Winkel ABG durch die Linie BH, welche auf AG in der Mitte senkrecht stehen wird. Nach der Voraussetzung ist $AC > CG$, daher kann der Punkt C weder auf BI noch auf der Seite des Punktes A liegen (II. 13, Zus. 1), sondern muß mit dem Punkte G auf gleicher Seite der Linie BI liegen. Da nun $\sphericalangle ABH = HBG$, so ist offenbar: $\sphericalangle ABC > CBG$, d. i. $\sphericalangle ABC > DEF$.

28. Satz. **Haben zwei rechtwinkelige Dreiecke gleiche Hypotenusen, und ist eine Kathete des ersteren Dreiecks kleiner als eine Kathete des zweiten Dreiecks, so ist die zweite Kathete des ersteren Dreiecks größer als die zweite Kathete des anderen Dreiecks.**

Fig. 55.



In den bei B und E rechtwinkeligen Dreiecken ABC und DEF sei $AC = DF$, $AB < DE$, dann wird $BC > EF$ sein.

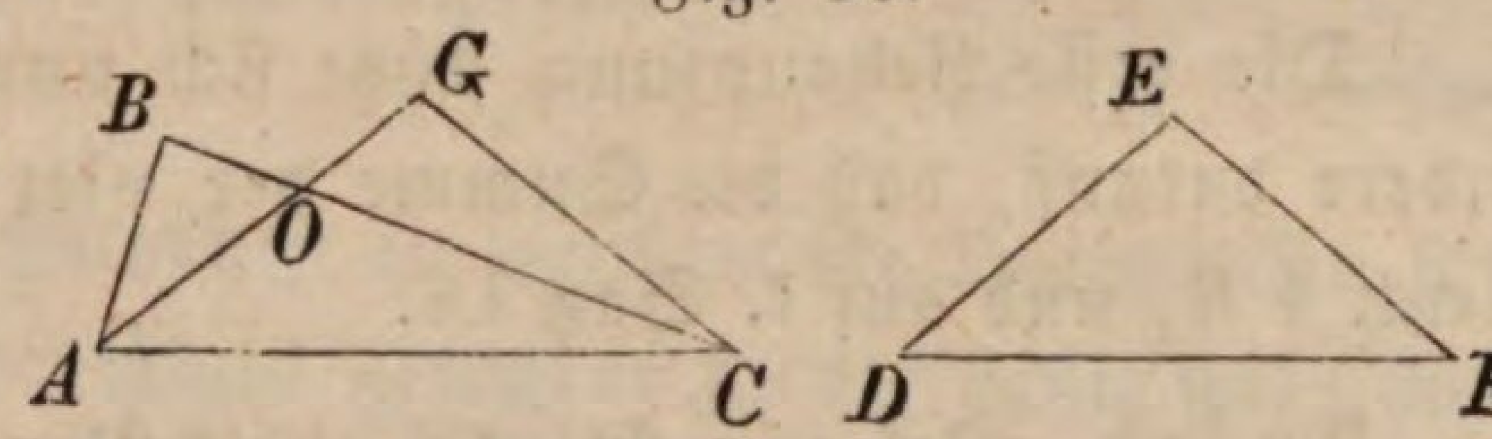
Beweis. Man lege das $\triangle DEF$ so neben das $\triangle ABC$, daß DF auf AC und Punkt D auf A zu liegen kommt; der Punkt F wird dann in C fallen, und $\triangle DEF$ in die Lage von AGC kommen. Verbindet

man nun den Punkt B mit G, so werden die rechten Winkel ABC und AGC beide in zwei Stücke getheilt. Da $AB < AG$, so ist $\sphericalangle AGB < \sphericalangle ABG$. Zieht man diese beiden Winkel von den rechten Winkeln ABC und AGC ab, so ist $\sphericalangle CGB > \sphericalangle CBG$, mithin auch $CB > CG$ (II. 5), also $CB > EF$.

29. **Satz. Haben zwei rechtwinkelige Dreiecke gleiche Hypotenusen und ist der Winkel an der Hypotenuse in dem einen Dreiecke größer als der Winkel an der Hypotenuse in dem andern Dreiecke, so steht dem größern Winkel eine größere Seite gegenüber.**

In den bei B und E rechtwinkeligen Dreiecken ABC, DEF sei $AC = DF$, $\sphericalangle BAC > EDF$, dann wird $BC > EF$ sein.

Fig. 56.



Beweis. Man lege das Dreieck DEF so auf BAC, daß DF auf AC, Punkt D in A zu liegen kommt. Der Punkt F wird dann in C und $\triangle DEF$ in die Lage von ACG kommen, wobei sich leicht nachweisen läßt, daß der Punkt G außerhalb des Dreiecks ABC fallen muß. Heißt O der Durchschnitt der AG mit BC, so ist $CB > CO > CG$. Einen zweiten Beweis erhält man durch Verbindung des Punktes B mit dem Punkte G durch eine Gerade.

30. **Satz. Sind die drei Winkel eines Dreiecks gleich den drei Winkeln eines anderen Dreiecks, eine Seite des einen aber größer als die entsprechende des anderen, so sind auch die übrigen Seiten des ersten Dreiecks größer als die entsprechenden des anderen Dreiecks.**

Der Beweis ist dadurch zu führen, daß man das Dreieck mit der kleineren Seite auf das andere so legt, daß zwei entsprechende gleiche Winkel auf einander fallen.

Bemerkung. Die Nichtcongruenz der Dreiecke bietet eine größere Zahl von Combinationen dar, als die Congruenz. Von diesen sind die vorgenannten Sätze die wichtigsten in der Anwendung.

Fünfter Abschnitt.

Von den Parallelogrammen und Trapezen.

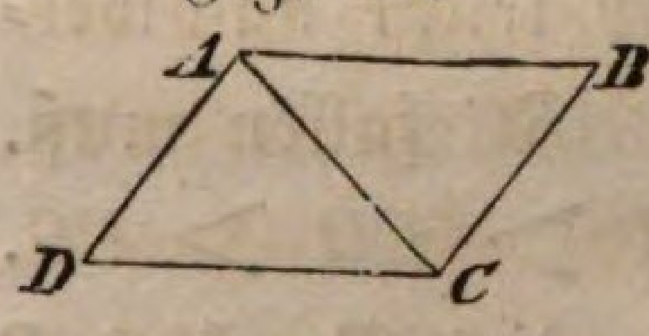
31. Definition. Ein Parallelogramm ist ein Viereck, dessen gegenüber stehende Seiten einander parallel sind.

32. Satz. **In jedem Parallelogramm sind die gegenüber stehenden Winkel einander gleich; und umgekehrt: sind in einem Vierecke die gegenüber stehenden Winkel einander gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm.**

Die erste Behauptung stützt sich unmittelbar auf I. Satz 23, die andere darauf, daß die Summe der vier Winkel eines jeden Vierecks gleich 4 R, und auf I. Satz 18.

Zusatz. Ist ein Winkel eines Parallelogramms ein Rechter, so sind es auch die übrigen.

Fig. 57.



33. Satz. **In jedem Parallelogramm sind die gegenüber stehenden Seiten einander gleich; und umgekehrt: Sind in einem Vierecke die gegenüberstehenden Seiten einander gleich, so ist das Viereck ein Parallelogramm.**

Die Beweise leicht.

1. Zusatz. Die Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke.

2. Zusatz. Zwei Parallellinien sind überall gleich weit von einander entfernt.

3. Zusatz. Sind zwei aneinander stoßende Seiten eines Parallelogramms einander gleich, so sind es alle vier.

34. Satz. **Sind in einem Vierecke zwei gegenüber stehende Seiten einander gleich und parallel, so ist das Viereck ein Parallelogramm.**

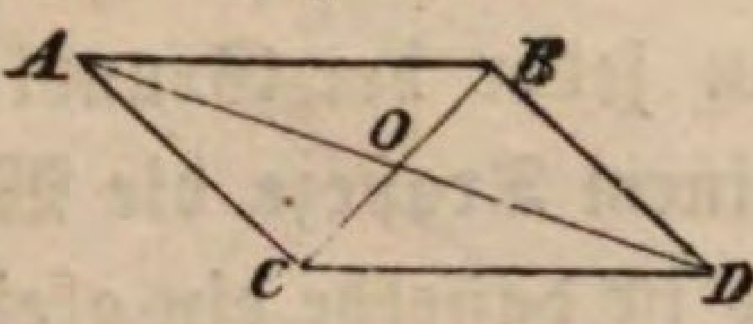
Der Beweis beruht auf II. 7 und I. 18.

35. Definition. Die Parallelogramme werden rücksichtlich der Winkel in rechtwinkelige (Rechtecke) und schiefwinkelige, und in Hinsicht auf die Seiten in gleichseitige und ungleichseitige eingetheilt. Ein gleichseitiges rechtwinkeliges Parallelogramm

heißt ein Quadrat, ein ungleichseitiges rechtwinkeliges Parallelogramm ein Oblongum, ein gleichseitiges schiefwinkeliges Parallelogramm ein Rhombus, und ein ungleichseitiges schiefwinkeliges Parallelogramm ein Rhomboïd.

36. Satz. **In jedem Parallelogramm halbiren die Diagonalen einander, und umgekehrt: Halbiren in einem Vierecke die Diagonalen einander, so ist dasselbe ein Parallelogramm.**

Fig. 58.

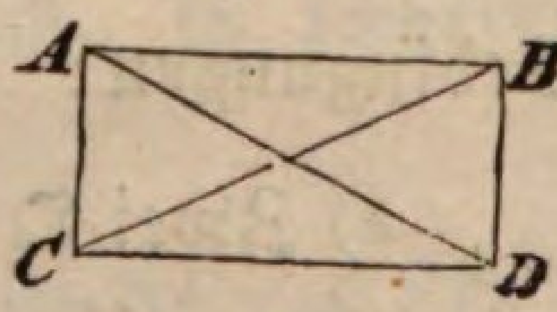


Man beweise die Congruenz der gegenüberliegenden Dreiecke *AOB* und *COD*, und gründe sie für die erste Behauptung auf 8, für die zweite auf 7.

Zusatz. Jede durch den Punkt *O*, in welchem die Diagonalen sich schneiden, bis zum Umfange der Figur gezogene gerade Linie wird, wie sich leicht beweisen läßt, in *O* halbirt. Der Punkt *O* wird deßhalb als die Mitte des ganzen Parallelogramms betrachtet.

37. Satz. **In jedem rechtwinkeligen Parallelogramm sind die Diagonalen einander gleich, und umgekehrt: Sind die Diagonalen in einem Parallelogramm einander gleich, so ist dasselbe ein rechtwinkeliges.**

Fig. 59.



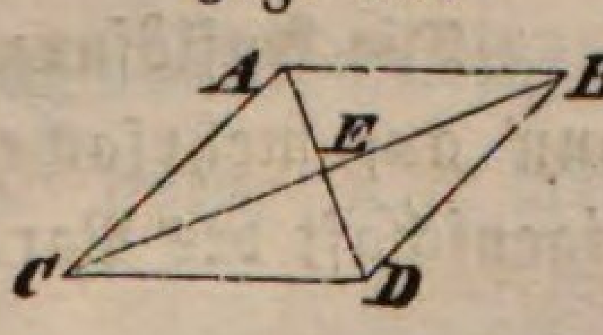
Man beweise für beide Fälle die Congruenz der beiden an einer Seite des Vierecks liegenden Dreiecke, z. B. *ACD* und *BDC*.

38. Satz. **In jedem schiefwinkeligen Parallelogramm sind die Diagonalen ungleich, und zwar liegt dem stumpfen Winkel die größere Diagonale gegenüber; und umgekehrt: Sind die Diagonalen eines Parallelogramms ungleich, so ist dasselbe ein schiefwinkeliges.**

Die Beweise sind auf 26 und 27 zurückzuführen.

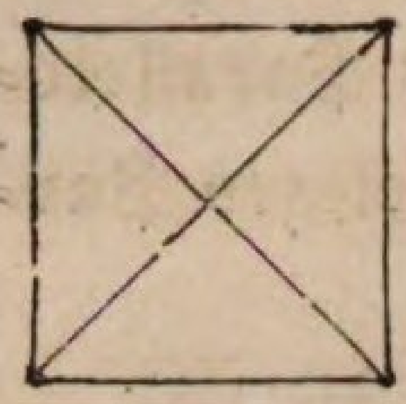
39. Satz. **In jedem gleichseitigen Parallelogramme stehen die Diagonalen senkrecht auf einander; und umgekehrt: Stehen in einem Parallelogramm die Diagonalen auf einander senkrecht, so ist dasselbe ein gleichseitiges.**

Fig. 60.



Man zeige die Congruenz zweier, an eine halbe Diagonale anstoßenden Dreiecke, z. B. *AEC* und *AEB*.

Fig. 61.

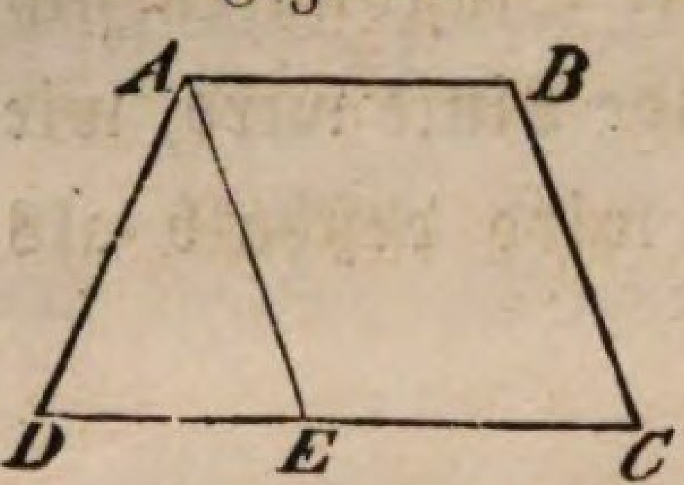


Zusatz. In einem Quadrate stehen die Diagonalen auf einander senkrecht und sind einander gleich.

40. **Erklärung.** Unter einem Trapez (Paralleltrapez) versteht man ein Viereck mit nur zwei gegenüber stehenden parallelen Seiten. Diese Seiten heißen die Grundlinien. Ein gleichschenkeliges Trapez ist ein solches, dessen beide nicht parallele Seiten einander gleich sind.

41. Satz. In einem gleichschenkeligen Trapeze sind die Winkel an jeder der Grundlinien einander gleich; und umgekehrt: Sind in einem Trapeze die Winkel an einer der Grundlinien einander gleich, so ist dasselbe ein gleichschenkeliges.

Fig. 62.



Ist $AB \parallel DC$ und $AD = BC$, so ist $\sphericalangle D = \sphericalangle C$ und $\sphericalangle DAB = \sphericalangle B$.

Beweis. Man ziehe durch A eine Parallele AE mit BC, so ist $AE = BC = AD$ und $\sphericalangle ADE = AED$; $\sphericalangle AED = C$, mithin $\sphericalangle D = C$. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß wenn $\sphericalangle D = C$, die Seite $AD = BC$ sei.

Zusatz. In einem gleichschenkeligen Paralleltrapeze sind die Diagonalen einander gleich.

42. Satz. Parallelogramme sind congruent unter folgenden Bedingungen:

a) Zwei Quadrate, wenn eine Seite des einen gleich einer Seite des anderen ist.

b) Zwei Rechtecke, wenn zwei anstoßende Seiten des einen zwei anstoßenden Seiten des anderen gleich sind.

c) Zwei Rhomben, wenn sie in einer der Seiten und einem der Winkel übereinstimmen.

d) Zwei Rhomboide, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

43. Aufgabe. Aus einer hinreichenden Anzahl gegebener Bestimmungsstücke, seien es Seiten, Winkel oder Diagonalen, ein Parallelogramm von vorgeschriebener Art zu bilden.

Die Auflösung der verschiedenen Fälle, welche diese Aufgabe darbietet, kann auf mehrfache Weise geschehen, je nachdem man die eine oder andere Eigenschaft des Parallelogramms dabei zu Grunde legt.

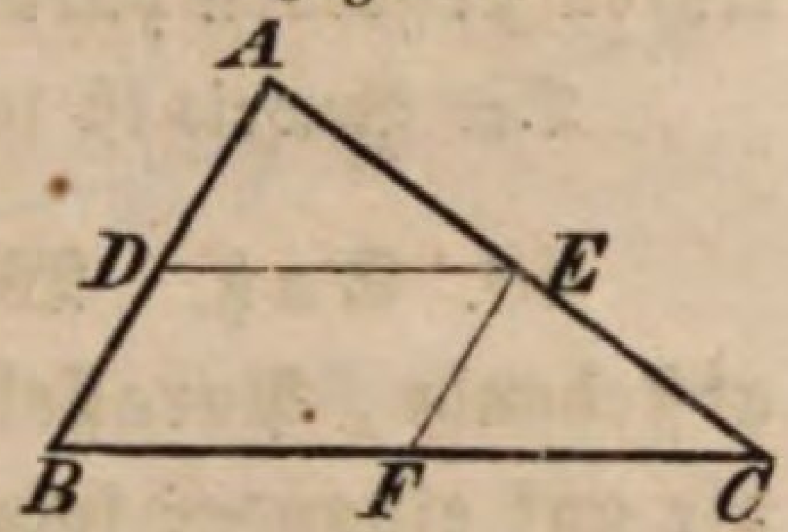
Sechster Abschnitt.

Eigenschaften mehrerer gleich weit abstehenden Parallellinien.

44. Satz. Zieht man durch die Mitte einer Dreiecksseite eine Parallele mit einer anderen Seite, so wird durch dieselbe die dritte Seite des Dreiecks halbirt.

Wenn $AD = DB$ und $DE \parallel BC$, so ist auch $AE = EC$.

Fig. 63.



Beweis. Man ziehe durch E mit AB eine Parallele EF und zeige, daß $\triangle ADE \cong \triangle FEC$, woraus sich die Richtigkeit der Behauptung ergiebt.

45. Satz. Verbindet man die Mitten zweier Dreiecksseiten, so ist die Verbindungslinie der dritten Seite parallel.

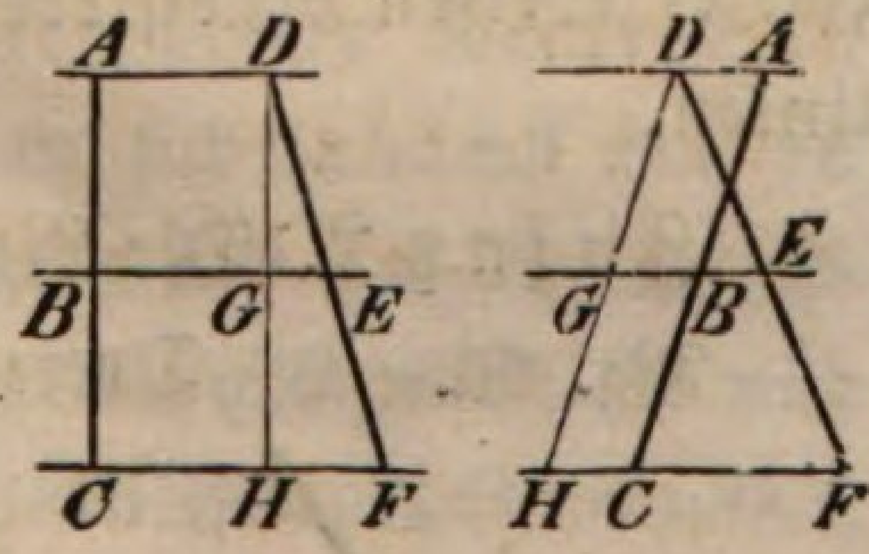
Der Beweis ist indirect zu führen.

Zusatz. Die geraden Linien, welche die Mitten der Seiten eines Dreiecks verbinden, theilen dasselbe in vier congruente Dreiecke.

46. Satz. Schneiden drei Parallellinien auf einer von zweien sie treffenden Geraden gleiche Stücke zwischen sich ab, so schneiden sie auch auf der anderen gleiche Stücke ab.

Es sei $AD \parallel BE \parallel CF$, und $AB = BC$; alsdann ist $DE = EF$.

Fig. 64.



Beweis. Man ziehe durch D eine Parallele mit AC, welche EB in G, FC in H trifft; dann sind DB, GC Parallelogramme, daher $AB = DG$, $BC = GH$. Da nun aber $AB = BC$ (Hyp.), so folgt, daß $DG = GH$. Es ist also auch $DE = EF$ (44).

Zusatz 1. Die mittlere von drei Parallelen, die auf einer sie treffenden Geraden gleiche Stücke abschneiden, hat von den beiden äußeren gleichen Abstand.

Zum Beweise zieht man eine die BE rechtwinkelig durchschneidende Gerade, welche alsdann auch auf AD und CF senkrecht steht. Die Richtigkeit der Behauptung ergiebt sich aus obigem Satze.

Zusatz 2. Hat von drei Parallelen die mittlere gleichen Abstand von den beiden äußeren, so halbirt sie jede gerade Linie, die von jenen begrenzt ist.

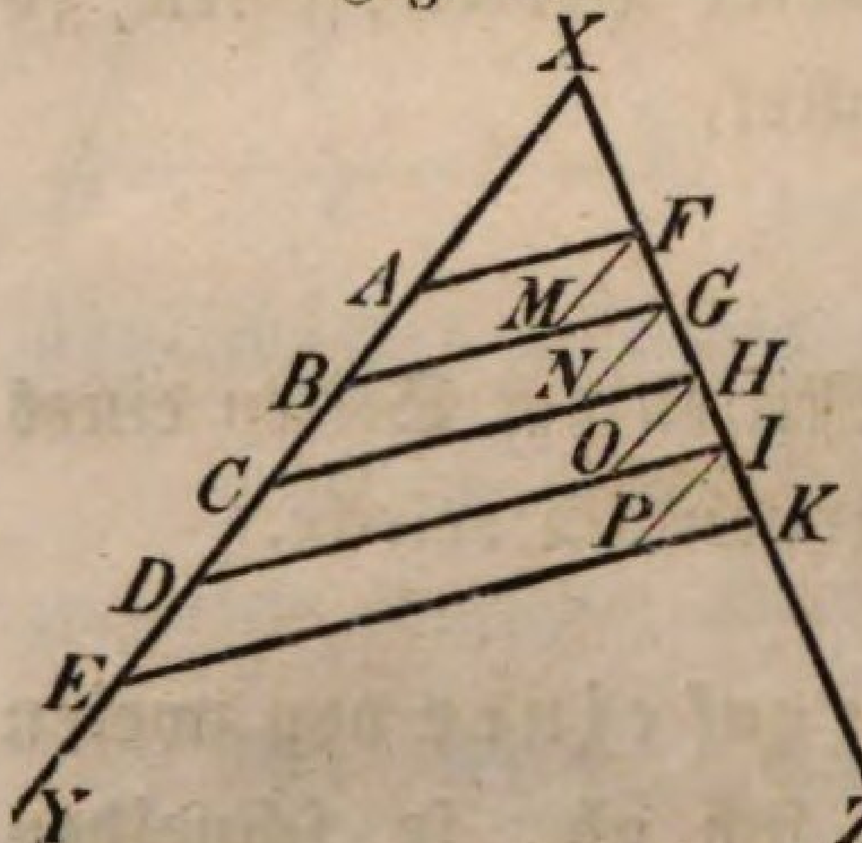
Zusatz 3. Wird eine gerade Linie von mehreren Parallellinien in gleiche Theile getheilt, so geschieht dieses auch mit jeder anderen geraden Linie, die von den Parallelen geschnitten wird.

47. Satz. **Die Linie, welche die Mitte der nicht parallelen Seiten eines Paralleltrapezes verbindet, ist mit den beiden Grundlinien desselben parallel.**

Der Beweis ist indirect zu führen.

48. Satz. **Werden mehrere, jede von der folgenden gleich weit abstehende, Parallelen von zwei geraden Linien begrenzt, so nehmen die auf einander folgenden Parallelen um dasselbe Stück zu.**

Fig. 65.



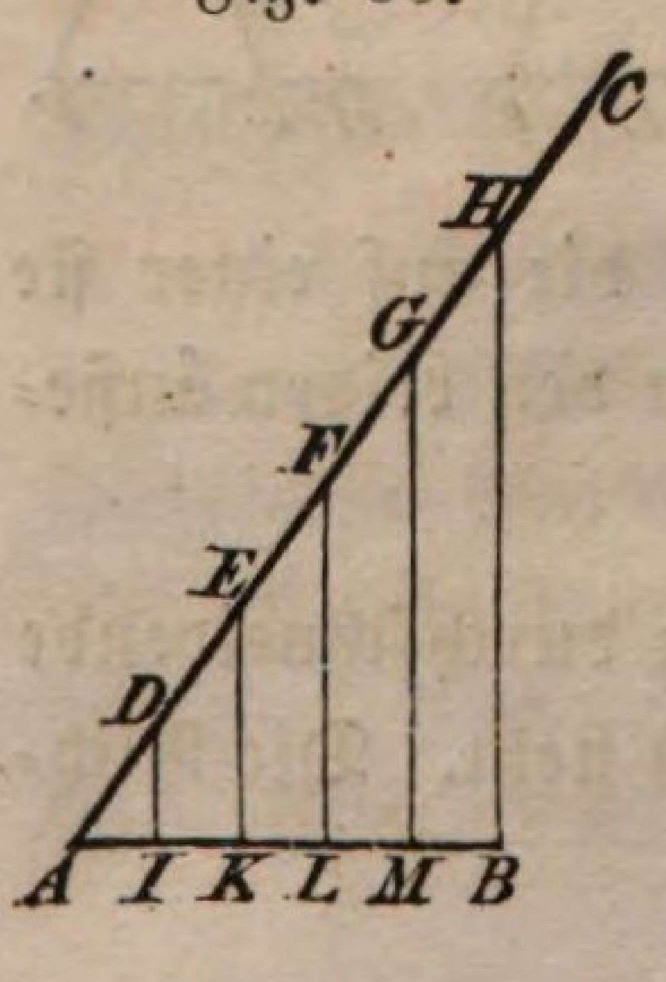
Ist $AB = BC = CD = DE$, und $AF \parallel BG \parallel CH \parallel DI \parallel EK$, so nehmen diese Parallelen AF, BG, CH, DI, EK um gleich viel zu.

Beweis. Zieht man durch F, G, H, I mit AE die Parallelen FM, GN, HO, IP, so sind die $\triangle\triangle$ FMG, GNH, HOI, IPK einander congruent, mithin $GM = HN = IO = KP$. Diese Linien sind aber, wie sich leicht nachweisen läßt, die Unterschiede je zweier der auf einander folgenden Linien AF, BG, CH, DI, EK.

Zusatz 1. Bei jedem Trapeze ist die Linie, welche die Mitten zweier Seiten verbindet, gleich der halben Summe der beiden Grundlinien.

Zusatz 2. Die Linie, welche die Mittelpunkte zweier Seiten eines Dreiecks verbindet, ist der Hälfte der dritten Seite gleich.

Fig. 66.



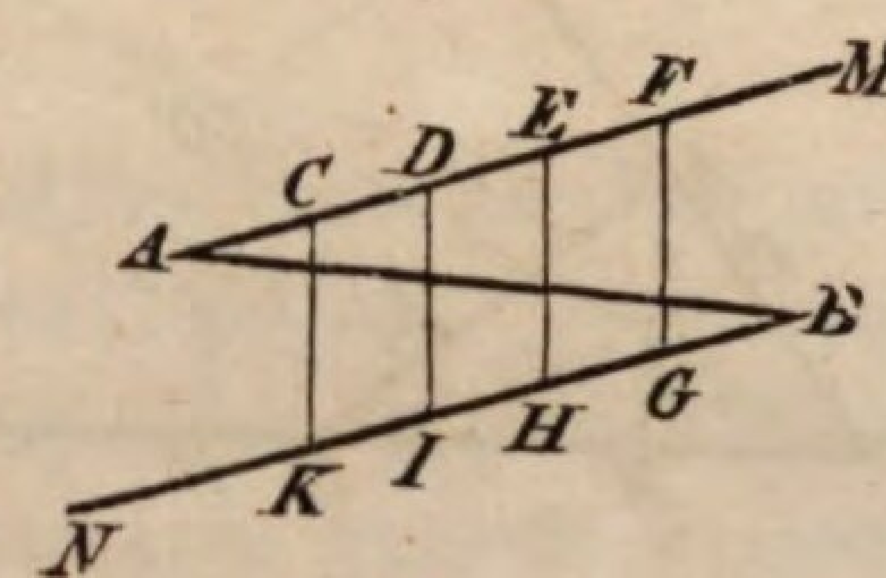
49. Aufgabe. **Eine begrenzte gegebene gerade Linie in eine gegebene Zahl gleicher Theile zu theilen.**

Auflösung. Um die gegebene gerade Linie AB in fünf gleiche Theile zu theilen, lege man an den Endpunkt A dieser Linie eine Linie AC unter beliebigem hohlen Winkel CAB, trage von A aus auf diese

Linie fünf gleiche Theile *AD*, *DE*, *EF*, *FG*, *GH* ab und verbinde den letzten Punkt *H* mit *B*. Zieht man nun durch die Punkte *D*, *E*, *F* und *G* mit *HB* die Parallelen *DI*, *EK*, *FL*, *GM*, so wird nach S. 46, Zus. 3, die gegebene Gerade *AB* in fünf gleiche Theile getheilt.

Auch folgende Construction erfüllt denselben Zweck und wird zur Uebung im Beweisen hier angeführt.

Fig. 67.

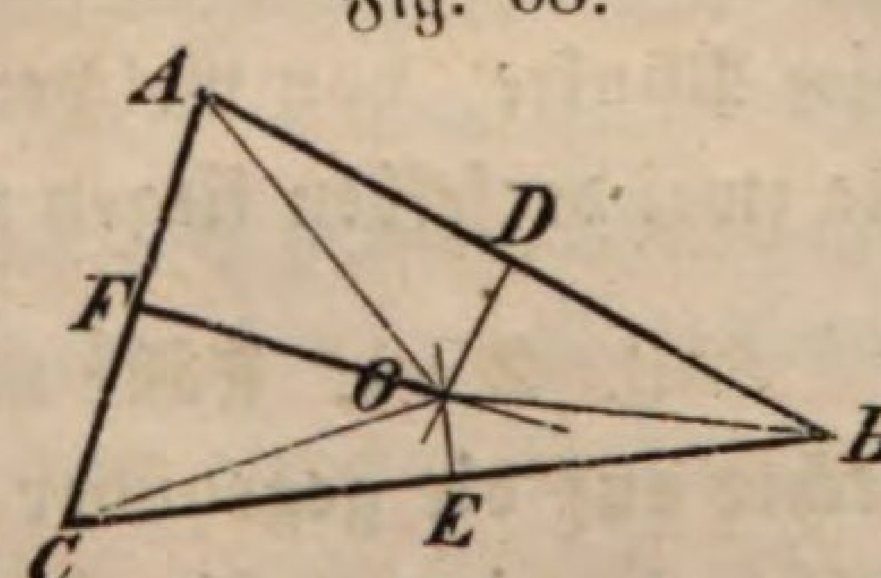


Durch die Endpunkte *A* und *B* der in 5 gleiche Theile zu theilenden Linie *AB* ziehe man zwei unter sich parallele Geraden *AM* und *BN*, jedoch zu verschiedenen Seiten von *AB*, darauf acht gleiche Theile, vier von *A* und vier von *B* aus, nämlich *AC*, *CD*, *DE*, *EF*, *BG*, *GH*, *HI*, *IK*. Verbindet man nun noch *F* mit *G*, *E* mit *H* u. s. w., so theilen diese Verbindungslinien *AB* in fünf gleiche Theile.

Siebenter Abschnitt.

Die merkwürdigen Punkte im Dreiecke.

Fig. 68.



50. Satz. Errichtet man auf den drei Seiten eines Dreiecks in der Mitte einer jeden Senkrechte, so durchschneiden sich dieselben in einem Punkte, der von den drei Ecken gleich weit entfernt ist.

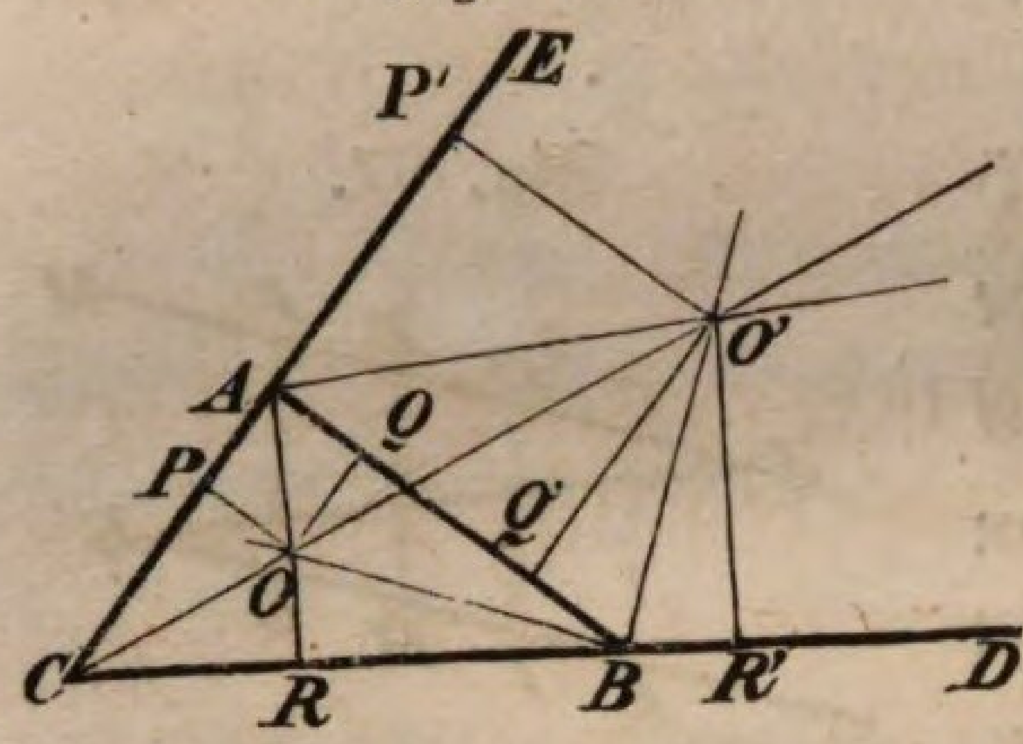
Beweis. Um zu beweisen, daß die drei auf *AB*, *BC* und *AC* in der Mitte einer jeden errichteten Senkrechten sich in einem Punkte durchschneiden, denke man sich zunächst auf *AB* und *BC*, in deren Mitten *D* und *E*, die Senkrechten *DO* und *EO* errichtet, die sich in *O* durchschneiden mögen. Verbindet man *O* mit *C*, *B* und *A*, so ist $OC = OB$ und $OB = OA$ (13), mithin ist auch $OC = OA$, folglich geht auch nach S. 13, Zusatz 1, die auf *AC* in der Mitte errichtete Senkrechte durch denselben Punkt *O*.

Zusatz. Der Punkt *O* liegt innerhalb, auf dem Umfange oder außerhalb des Dreiecks *ABC*, je nachdem dieses spitz-, recht- oder stumpfwinkelig ist.

Zum Beweise betrachte man dasjenige Dreieck, welches durch Verbindung der Mitten der drei Seiten des Dreiecks *ABC* entsteht

51. Satz. Halbirt man entweder die drei inneren Winkel eines Dreiecks oder einen inneren und die Nebenwinkel der beiden anderen, so durchschneiden sich die Halbirungslinien in einem Punkte, der von den Seiten oder deren Verlängerungen gleich weit absteht.

Fig. 69.



Beweis. AO und BO seien die beiden Halbirungslinien der inneren Winkel CAB und ABC des $\triangle ABC$. Fällt man von ihrem Durchschnittspunkte O die Senkrechten OP, OQ, OR auf die drei Seiten des Dreiecks, so ist nach S. 15. $OP = OQ$, $OQ = OR$, mithin auch $OP = OR$, der Punkt O liegt somit nach 15, Zusatz, auf der Halbirungslinie des dritten Winkels ACB des $\triangle ACB$.

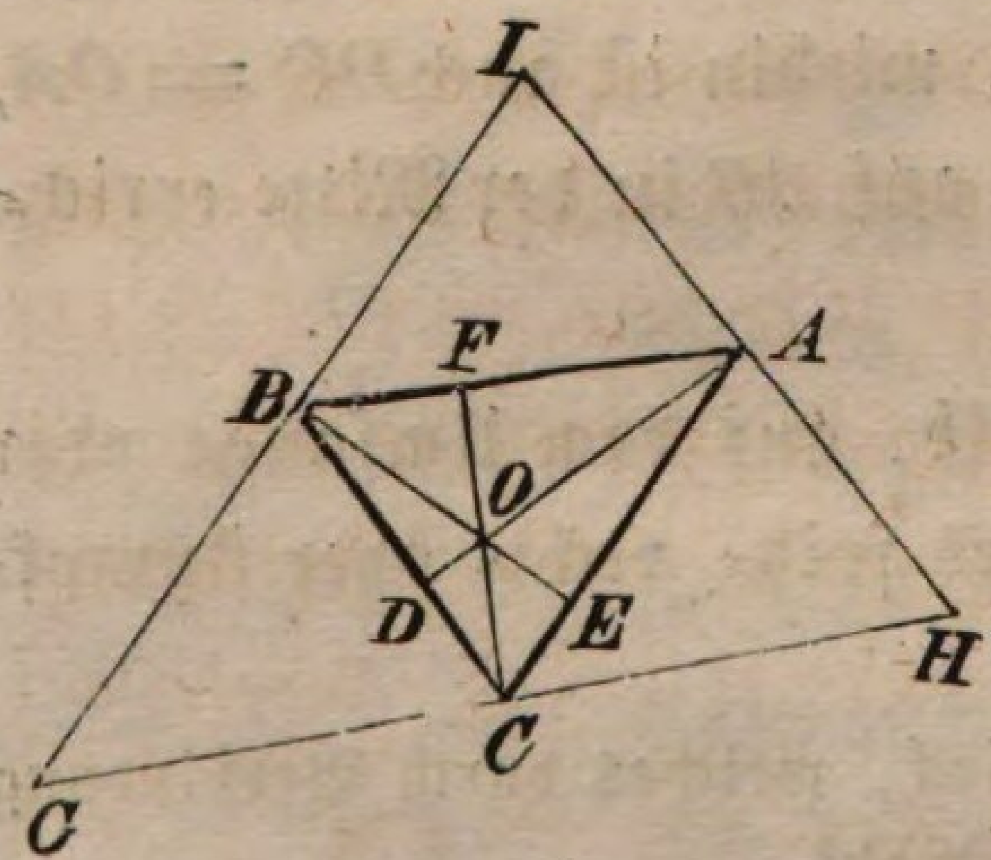
Halbirt man eben so die beiden Außenwinkel EAB und DBA des $\triangle ABC$ durch die Linien AO', BO', und fällt aus dem Durchschnittspunkte O' derselben auf die Seite AB und die Verlängerung der beiden übrigen die Perpendikel $O'Q'$, $O'R'$, $O'P'$, so wird in ganz gleicher Art bewiesen, daß O' in der Halbirungslinie des inneren Winkels ACB liegen müsse.

Zusatz. Sind drei Linien gegeben, die sich zu je zwei schneiden und daher ein Dreieck zwischen sich einschließen, so giebt es im Ganzen vier Punkte, von welchen jeder gleich weit von den drei Linien absteht. Je zwei derselben liegen mit einer Ecke jenes Dreiecks in gerader Linie.

52. Satz. Fällt man von den drei Spitzen eines Dreiecks Senkrechte auf die gegenüber stehenden Seiten, so durchschneiden sich dieselben in einem Punkte, der Höhendurchschnitt genannt wird.

Von den Spitzen A, B, C des Dreiecks ABC seien auf die gegenüber stehenden Seiten die Perpendikel AD, BE, CF gefällt.

Fig. 70.



Beweis. Zieht man durch die drei Spitzen A, B, C mit den Seiten BC, AC und AB Parallelen, die sich in G, H, I durchschneiden, so ist $BC = AH$ und $BC = AI$ (32), mithin $AH = AI$. Eben so ist $HC = CG$ und $BG = BI$. Da nun CF auf AB senkrecht steht, so steht diese Linie auch auf HG senkrecht (I, 21, 3. Zus.), eben so EB auf IG und DA auf HI. Die drei Linien

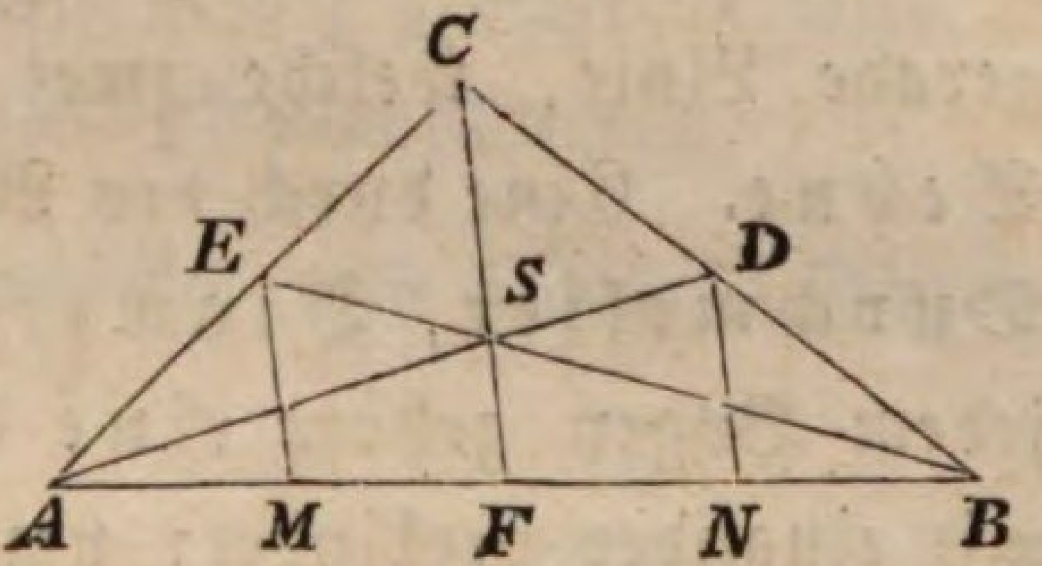
AD, *FC* und *EB* stehen auf den drei Seiten *HI*, *HG* und *GI* in deren Mitten senkrecht, durchschneiden sich also nach S. 50 dieses Capitels in einem Punkte *O*.

Zusatz. Der Punkt *O* liegt innerhalb des △ *ABC*, in einer Ecke desselben oder außerhalb, je nachdem das Dreieck spitz-, recht- oder stumpfwinkelig ist.

Vergleiche Satz 50, Zusatz.

53. Satz. **Die drei Linien, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Mitten der drei Seiten verbinden (Mittellinien), treffen sich in einem Punkte, und dieser theilt jede Mittellinie in zwei Theile, von welchen der an den Ecken des Dreiecks liegende doppelt so groß, als der andere ist.**

Fig. 71.



Beweis. *D*, *E*, *F* seien die Mittelpunkte der drei Seiten *BC*, *AC*, *AB*. Betrachtet man zunächst den Durchschnittspunkt *S* zweier Mittellinien, z. B. der *BE* und *CF*, so läß sich darthun, daß jede derselben, z. B. *BE*, durch den Punkt *S* in zwei ungleiche Theile, *BS* und *SE* getheilt wird, so daß $BS = 2SE$. Zieht man durch die Punkte *D* und *E* mit *FC* die Parallelen *DN* und *EM*, so ist (44) $AM = MF$, $FN = NB$. Da nun aber $AF = FB$, so ist die Linie *AB* durch die Punkte *M*, *F*, *N* in vier gleiche Theile getheilt. Nach II. S. 46, Zus. 3, werden aber durch die drei Parallelen *EM*, *CF* und *DN*, welche auf der Linie *MB* die drei gleichen Stücke *NB*, *FN*, *MF* abschneiden, auch auf der Linie *EB* drei gleiche Stücke abgeschnitten; der Punkt *S* der Mittellinie *BE* liegt demnach so, daß $BS = 2SE$.

Eben so läßt sich zeigen, daß derselbe Punkt *S* auf der Mittellinie *CF* so liegt, daß $SC = 2SF$. Zieht man nun die dritte Mittellinie *AD*, so muß diese Linie ebenfalls jede der beiden Mittellinien in zwei Theile theilen, von welchen der an der Spitze liegende Theil doppelt so groß ist, als der andere Theil. Die Mittellinie *AD* kann also nur durch den Durchschnittspunkt *S* der beiden Linien *BE* und *CF* gehen.

III. Capitel.

Der Kreis.

Erster Abschnitt.

Elementar-Eigenschaften des Kreises.

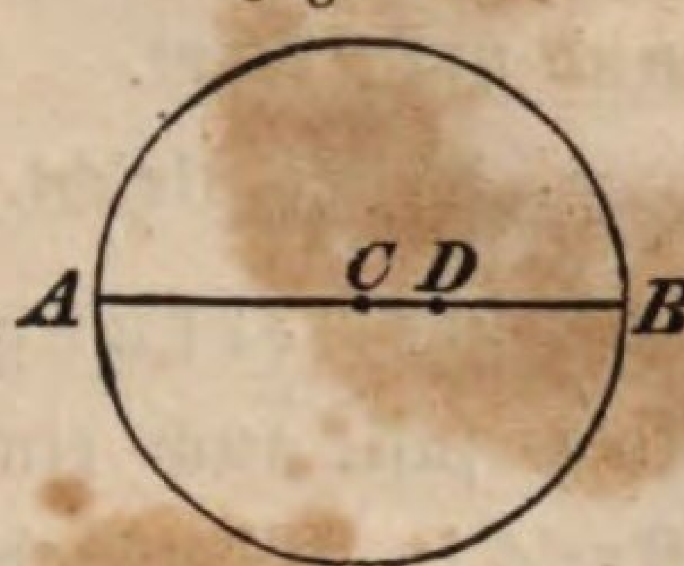
1. Ueber die Erklärung des Kreises sehe man Einleitung 14. Jede gerade Linie, welche zwei Punkte der Kreislinie verbindet, heißt Sehne. Eine durch den Mittelpunkt des Kreises gehende Sehne heißt Durchmesser, Diameter; er besteht aus zwei Halbmessern. Zu jedem Bogen gehört eine Sehne, welche die Endpunkte des Bogens mit einander verbindet; umgekehrt gehören aber zu jeder Sehne zwei Bogen, die mit der Sehne gleiche Endpunkte haben, und welche einander zum ganzen Kreisumfange ergänzen.

Centri-Winkel oder Mittelpunkts-Winkel ist jeder von zwei Radien des Kreises gebildete Winkel; sein Scheitel ist also der Mittelpunkt des Kreises. Der zum Centri-Winkel gehörige Bogen ist der in dem Winkelraume zwischen den Schenkeln liegende Theil der Kreislinie. Der von zwei Radien und dem zwischenliegenden Bogen begrenzte Theil des Kreises heißt Kreisausschnitt oder Sector; derjenige Theil des Kreises aber, welcher zwischen einem Bogen und der dazu gehörigen Sehne liegt und davon begrenzt wird, heißt Kreisabschnitt oder Segment.

Jede gerade Linie, welche, soweit man sie auch fortsetze, mit dem Kreise nur einen Punkt gemeinschaftlich hat, heißt Berührende, Berührungslinie oder Tangente; jener gemeinschaftliche Punkt heißt Berührungspunkt. Dagegen wird eine gerade Linie, welche mit der Kreislinie mehr als einen Punkt gemeinschaftlich hat, Secante, d. i. Schneidende, Schneidelinie, genannt.

2. **Satz. Jeder Kreis hat nur einen Mittelpunkt.**

Fig. 70.



Beweis. C sei der Mittelpunkt eines Kreises, also ein Punkt, der von allen Punkten des Umfanges gleich weit absteht; D irgend ein anderer Punkt außer ihm, doch innerhalb des Kreises. Verbindet man C mit D und verlängert CD zu beiden Seiten, so muß nach Einleitung 15, 2 die Verlängerung den Umfang zweimal treffen, es geschehe in A, B. Dann ist, weil C Mittelpunkt, $AC = CB$, mithin AD, welches $> AC$, auch $> CB$ und um so mehr $> DB$; daher kann nicht D, und eben so wenig jeder andere Punkt, außer C, Mittelpunkt sein.

3. Satz. Alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich.

. Beweis leicht.

4. Satz. Der Durchmesser theilt die Peripherie des Kreises und den Kreis selbst in zwei congruente, also völlig gleiche, Theile.

Der Beweis ist durch Aufeinanderlegen und Decken zu führen.

5. Satz. Kreise von gleichem Halbmesser und gleichem Durchmesser sind einander congruent.

Beweis leicht.

6. Satz. Jeder Punkt im Innern des Kreises liegt dem Mittelpunkte näher, jeder Punkt außerhalb des Kreises ist von ihm entfernter, als ein Punkt des Umfanges; und umgekehrt: Je nachdem der Abstand eines Punktes vom Mittelpunkte größer, eben so groß, oder kleiner als der Radius ist, liegt jener Punkt außerhalb des Kreises, im Umfange oder innerhalb des Kreises.

Beweise leicht.

7. Satz. In einem Kreise oder in zwei gleichen Kreisen gehören zu gleichen Mittelpunkts-Winkeln auch gleiche Bogen, Sehnen, Kreisausschnitte und Kreisabschnitte.

Durch Decken zu beweisen.

1. Zusatz. Umgekehrt: Zu gleichen Bogen gehören gleiche Mittelpunktswinkel, Sehnen, Abschnitte und Ausschnitte.

2. Zusatz. Gleiche Sehnen haben gleiche Bogen, wenn dieselben gleichartig, d. h. beide kleiner, eben so groß oder größer als ein Halbkreis sind.

3. Zusatz. Zum doppelten, dreifachen, vierfachen Mittelpunkts-

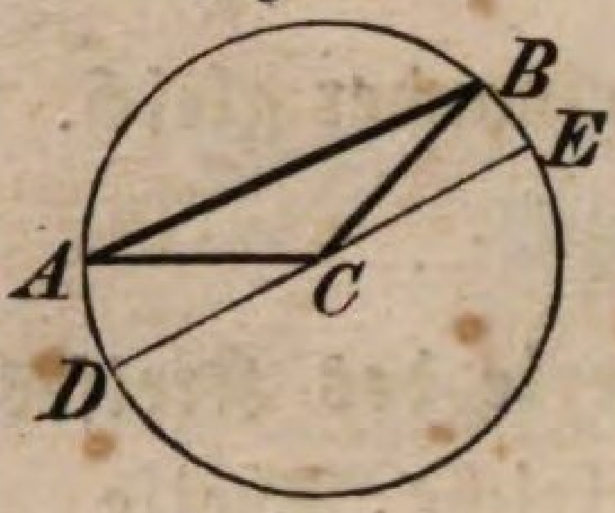
Winkel gehört auch ein doppelter, dreifacher, vierfacher u. s. w. Bogen, und umgekehrt.

Beweise leicht.

Bemerkung. So wie der rechte Winkel in 90 Grade zerfällt, so zerfällt auch ein Viertelkreis, Quadrant, in 90, und der ganze Kreis in 360 Grade.

8. Satz. **Der Durchmesser eines Kreises ist größer als jede andere Sehne.**

Fig. 71.



Beweis. Um zu beweisen, daß die Sehne AB kleiner als der Durchmesser DE sei, verbinde man den Mittelpunkt C des Kreises mit den beiden Endpunkten A und B der Linie AB; alsdann ist $CA + CB > AB$, $CA = CD$ u. s. w.

9. Satz. **Von allen geraden Linien, die sich aus einem gegebenen Punkte, der jedoch nicht Mittelpunkt ist, er mag übrigens in oder außer dem Kreise liegen, nach der Peripherie eines Kreises ziehen lassen, ist diejenige die größte, welche durch den Mittelpunkt geht, die kleinste diejenige, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht. Von allen übrigen geraden Linien ist jede um so kleiner, je kleiner der Bogenabstand des Endpunktes der Linie vom Endpunkte der kürzesten Linie ist.**

Fig. 72.

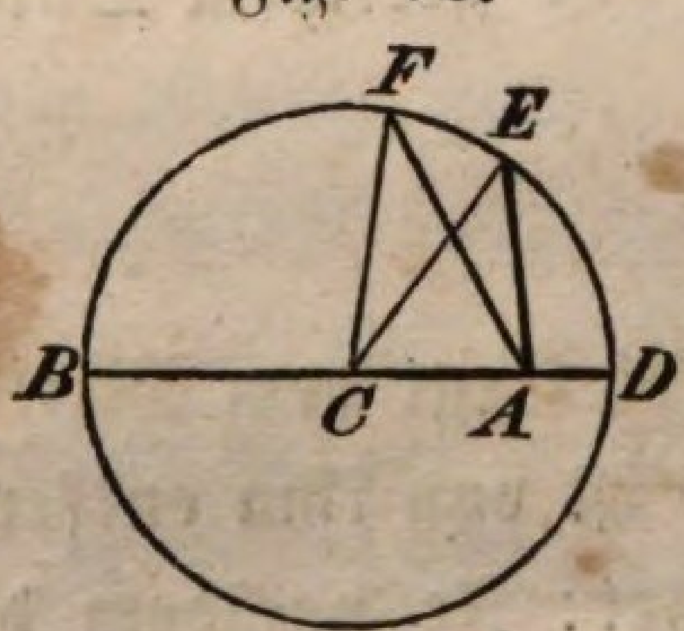
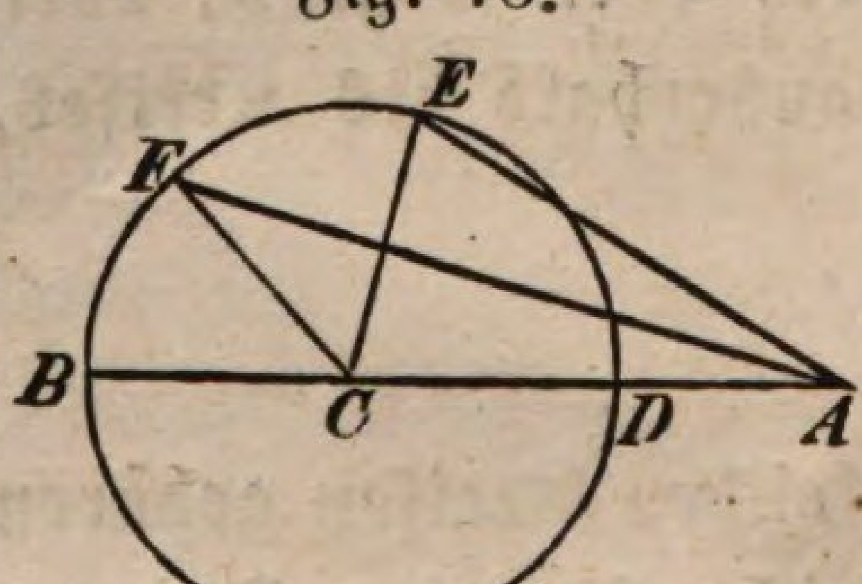


Fig. 73.



Geht durch den gegebenen Punkt A der Durchmesser BD (Fig. 72), oder dessen Verlängerung (Fig. 73), so ist AB die größte, AD die kleinste aller Linien, die sich von A aus nach dem Umfange ziehen lassen. Von zwei anderen Geraden AE, AF, die von A aus bis zur Peripherie gezogen sind, ist $AE < AF$, da Bogen $DE <$ Bogen DF ist.

Beweis. Verbindet man den Punkt F mit dem Mittelpunkt C, so ist (II, 6) 1) $FC + CA > FA$, d. i. $BA > FA$; 2) $FC - CA$ (Fig. 72) oder $AC - CF < AF$ (Fig. 73), d. i. $DA < AF$. Verbindet man noch E mit C, so ist in beiden Dreiecken FCA und ECA

1) $FC = EC$, 2) $CA = CA$, und 3) $\sphericalangle FCA > \sphericalangle ECA$, mithin $FA > AE$ (II, 26).

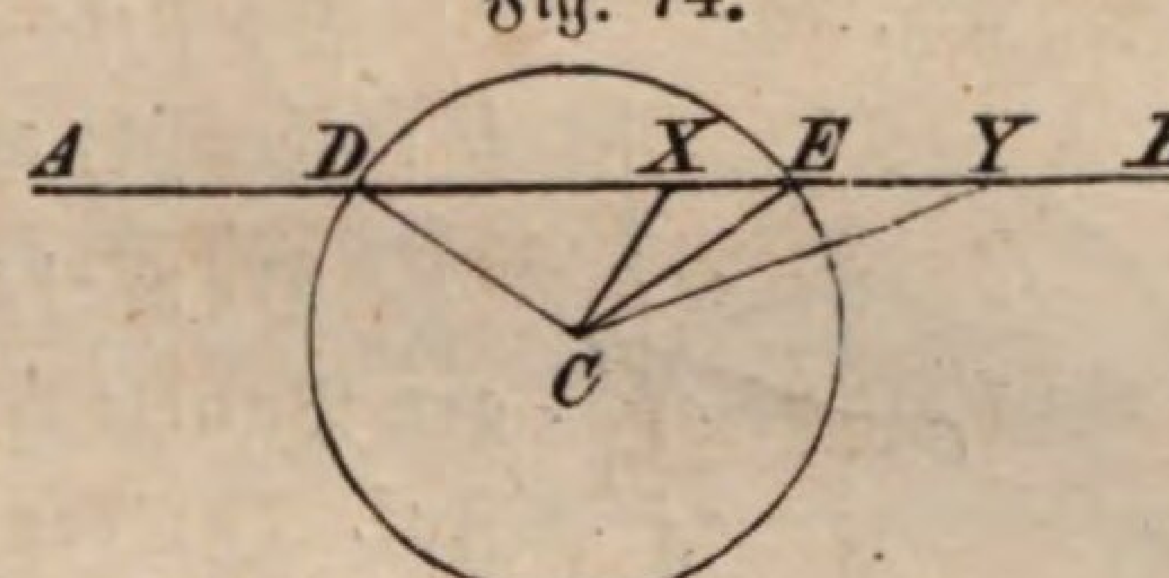
Zusatz. Der Satz gilt auch umgekehrt, und ist dann indirect zu beweisen.

Zweiter Abschnitt.

Lage einer geraden Linie und einer Kreislinie zu einander, Sehnen, Tangenten, Sekanten.

10. Satz. **Eine gerade Linie kann mit einer Kreislinie nicht mehr als zwei Punkte gemeinschaftlich haben.**

Fig. 74.

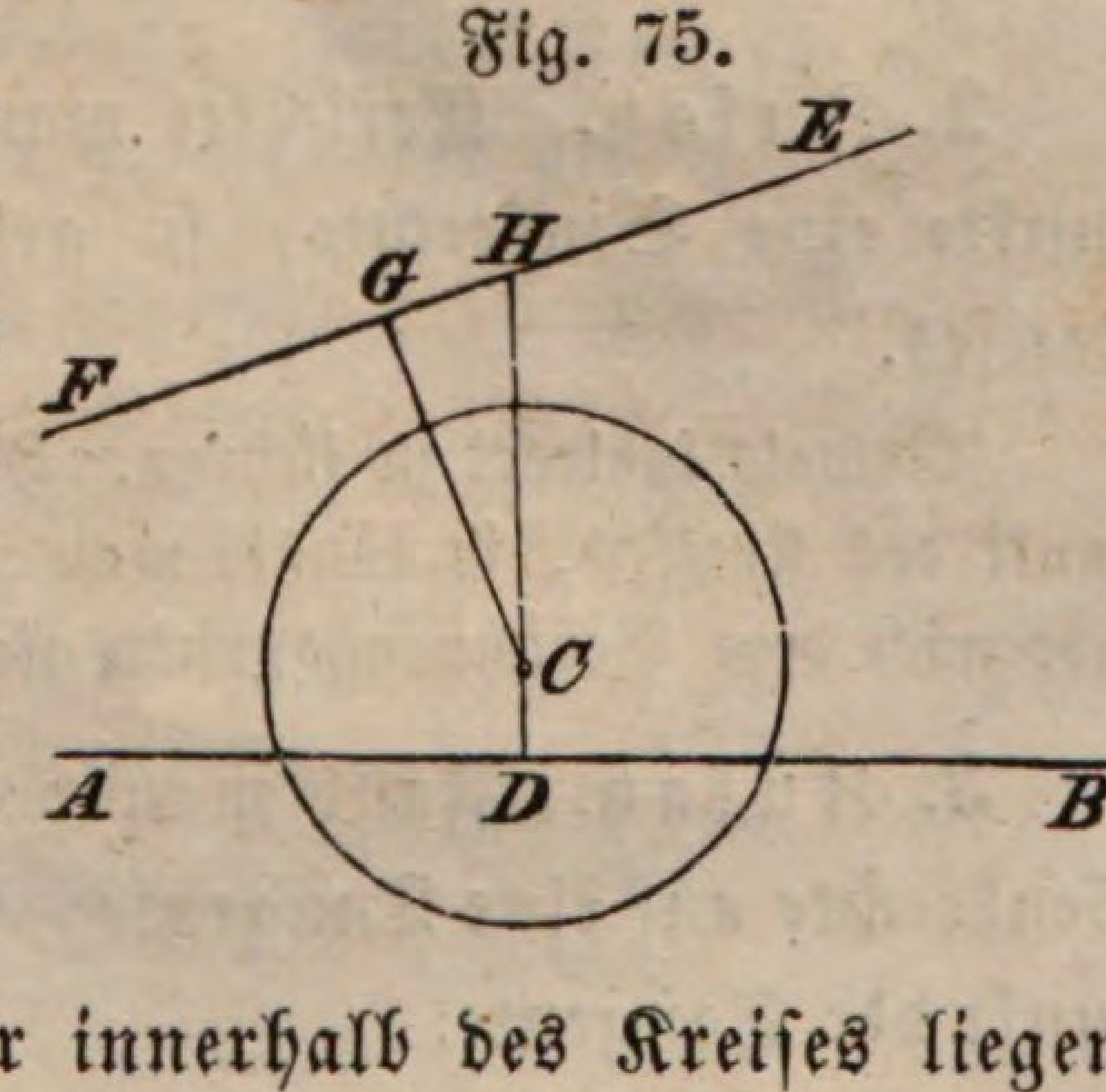


Beweis. Sind D und E die Durchschnittspunkte der Geraden AB und der Kreislinie, so läßt sich leicht mit Hülfe von II. 5 zeigen, daß jede Linie CX, die von dem Mittelpunkte C nach einem Punkte X zwischen D und E gezogen wird, kleiner als CE, und daß jede Linie CY, die von C nach einem außerhalb des Stückes DE liegenden Punkte Y der AB gezogen wird, größer, als der Radius CE ist. Hieraus ergiebt sich, daß alle Punkte der Linie AB zwischen D und E innerhalb, und alle Punkte der AB außerhalb DE außerhalb des Kreises liegen müssen (III. 6).

Zusatz. Die Kreislinie ist eine krumme Linie, denn auch nicht der kleinste Theil der Peripherie ist gerade.

11. Satz. **Je nachdem der Abstand einer geraden Linie vom Mittelpunkte eines Kreises kleiner oder größer, als der Radius ist, trifft die gerade Linie die Kreislinie in zwei Punkten oder in keinem.**

Fig. 75.



Beweis. Es sei 1) der Abstand CD der geraden Linie AB von dem Mittelpunkte C des Kreises kleiner als der Radius. Der Punkt D wird offenbar innerhalb des Kreises liegen, und somit wird die gerade Linie AB nach Einleitung 15. 2 den

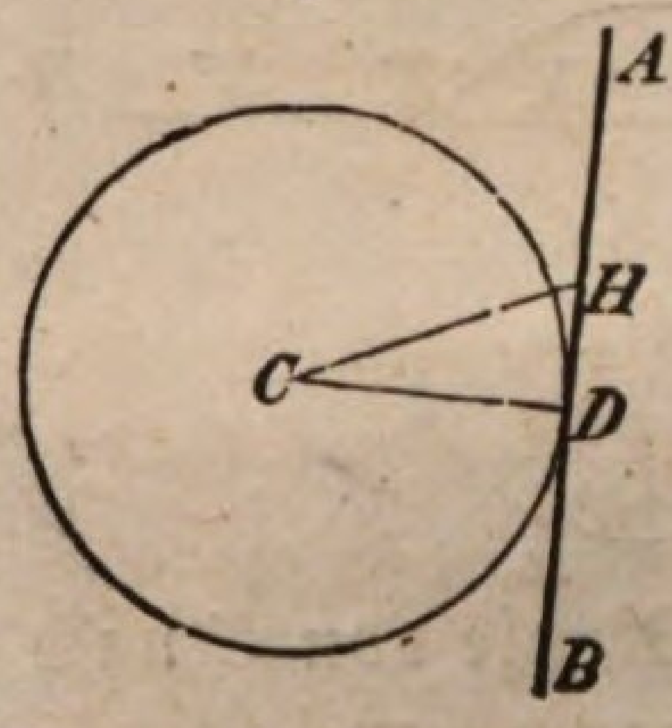
Kreis in zwei Punkten schneiden. Ist 2) der Abstand der Linie *EF* vom Mittelpunkte *C* des Kreises größer als der Radius, so hat diese Linie mit dem Kreise keinen Punkt gemeinschaftlich; denn nicht allein der Punkt *G*, sondern jeder beliebige Punkt der Linie *EF*, *H* z. B., liegt, da $CH > CG$ (II. 5, Zus. 1) ist, außerhalb des Kreises.

Zusatz. Schneidet eine gerade Linie einen Kreis, so ist ihr Abstand vom Mittelpunkte kleiner, als der Radius; trifft sie den Kreis gar nicht, so ist ihr Abstand größer, als der Radius.

Beweise leicht.

12. Satz. Eine durch den Endpunkt des Radius gehende gerade Linie berührt oder schneidet den Kreis, je nachdem sie auf dem Radius senkrecht steht oder nicht.

Fig. 76.



Es stehe *AB* auf dem Radius *CD* im Endpunkte *D* senkrecht; alsdann ist *AB* eine Tangente.

Beweis. Verbindet man *C* mit einem beliebigen Punkte *H* der Linie *AB*, so ist $HC > CD$ (II. 5, Zus. 1); der Punkt *H* liegt also außerhalb des Kreises. Sämmtliche Punkte der Linie *AB* außer dem Punkte *D* liegen somit außerhalb des Kreises. Geht aber durch *D* eine nicht senkrechte Linie, so ist ihr Abstand von *C* offenbar kleiner als der Radius (II. 5, Zus. 1), daher muß sie nach dem vorhergehenden Satze den Kreis in zwei Punkten schneiden.

1. Zusatz. Umgekehrt: Berührt eine gerade Linie den Kreis, so steht sie senkrecht auf dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Radius.

Der Beweis ist indirect zu führen.

2. Zusatz. Errichtet man auf einer Tangente im Berührungspunkte eine Senkrechte, so geht dieselbe durch den Mittelpunkt des Kreises.

Beweis indirect zu führen. Ginge die Senkrechte nicht durch den Mittelpunkt des Kreises, so könnte man von dem Mittelpunkte des Kreises eine Gerade nach dem Berührungspunkte ziehen u. s. w.

3. Zusatz. Fällt man von dem Mittelpunkte eines Kreises eine Senkrechte auf eine Tangente, so geht dieselbe durch den Berührungspunkt der Tangente.

Beweis indirect.

13. Satz. Ein Halb- oder Durchmesser, der auf einer Sehne senkrecht steht, theilt diese Sehne und die zugehörigen Bogen in zwei gleiche Theile. Umgekehrt: Ein Halb- oder Durchmesser, der eine Sehne oder den Bogen einer Sehne halbirt, steht auf der Sehne senkrecht.

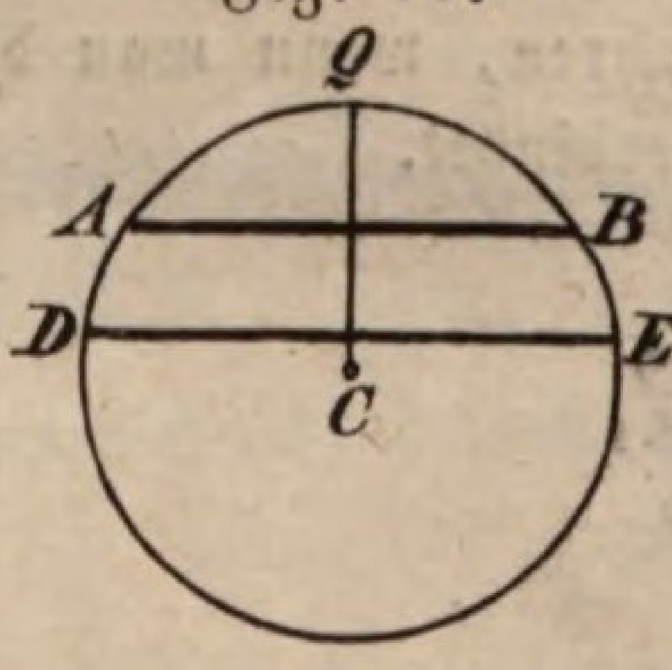
Die Beweise sind auf die Congruenz der Dreiecke und auf III. 7 zu stützen.

Zusatz. Eine gerade Linie, die entweder 1) auf einer Sehne in deren Mitte senkrecht steht, oder 2) sowohl eine Sehne, als den zugehörigen Bogen halbirt, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Beweise leicht.

14. Satz. Parallele Sehnen eines Kreises schneiden auf dem Umfange gleiche Bogen zwischen sich ab.

Fig. 77.



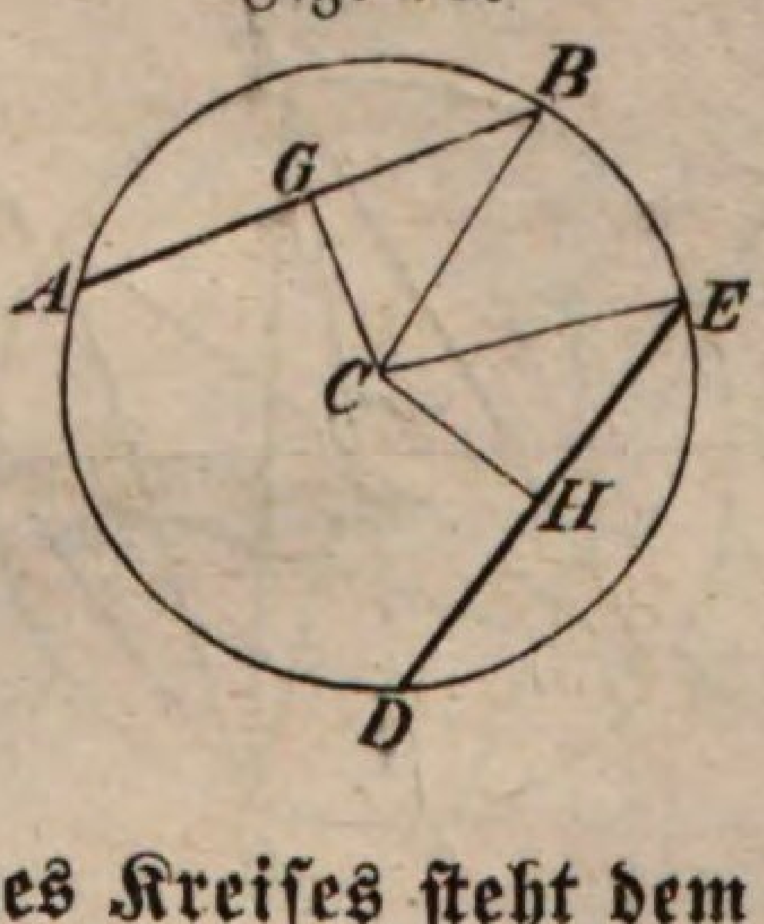
Beweis. Fällt man von C auf eine der Parallelen eine Senkrechte, so steht diese auch auf der anderen senkrecht. Ist Q der Durchschnittspunkt dieser Senkrechten mit dem Kreise, so ist 1) $DQ = QE$, 2) $AQ = QB$ (III. 13), mithin $AD = BE$.

1. Zusatz. Dasselbe findet Statt, wenn an die Stelle einer der Sehnen oder beider eine Tangente tritt. Der Berührungspunkt vertritt dann die Stelle des Endpunktes.

2. Zusatz. Schneiden zwei Sehnen, oder eine Sehne und eine Tangente oder zwei Tangenten gleiche Bogen zwischen sich ab, so sind sie parallel.

15. Satz. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleiche Entfernungen vom Mittelpunkte, und umgekehrt: Haben Sehnen gleiche Entfernungen vom Mittelpunkte, so sind sie einander gleich.

Fig. 78.



Beweis. Es seien CG und CH die Entfernungen der beiden Sehnen AB und DE vom Mittelpunkte. Zum Beweise verbinde man C mit B und E und zeige nach II. 10, Zus. 4 und mit Hülfe von III. 13, daß $\triangle CGB \cong \triangle CHE$ sei, woraus sich die Richtigkeit beider Behauptungen ergiebt.

16. Satz. Die größere von zwei Sehnen eines Kreises steht dem

Mittelpunkte näher als die kleinere, und umgekehrt: Je kleiner der Abstand einer Sehne vom Mittelpunkte des Kreises ist, desto größer ist die Sehne.

Man suche die Sätze mit Anwendung von III. 13. und II. 28 zu beweisen.

Zusatz. Von allen durch einen Punkt innerhalb eines Kreises gehenden Sehnen ist diejenige die kleinste, welche auf dem durch den Punkt gehenden Radius senkrecht steht.

Der Beweis ergibt sich leicht durch Anwendung des Hauptsatzes.

17. Satz. **Die beiden von einem Punkte außerhalb eines Kreises an denselben gezogenen Tangenten sind einander gleich, und der Winkel, welchen dieselben mit einander bilden, wird von der Verbindungslinie jenes Punktes mit dem Mittelpunkte des Kreises halbirt.**

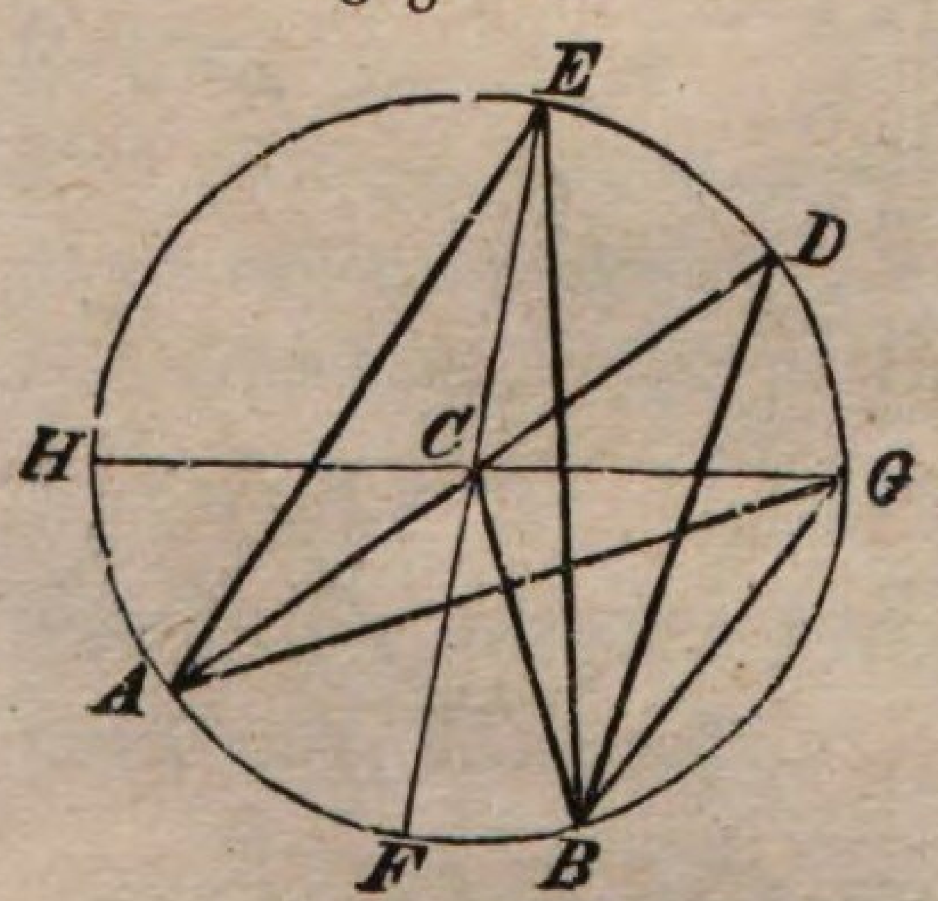
Der Beweis leicht durch Congruenz zweier rechtwinkeligen Dreiecke zu führen, wenn man die Berührungspunkte mit dem Mittelpunkte des Kreises verbindet.

Dritter Abschnitt.

Die Peripherie-Winkel.

18. Erklärung. Unter Peripherie-Winkel eines Kreises versteht man einen Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie liegt, und der entweder durch zwei Sehnen oder durch eine Sehne und eine Tangente gebildet wird. Der zum Peripherie-Winkel gehörige Bogen ist der innerhalb des Winkelraums desselben liegende Theil der Kreisperipherie. Man sagt auch wohl, der Winkel stehe auf diesem Bogen.

Fig. 79.



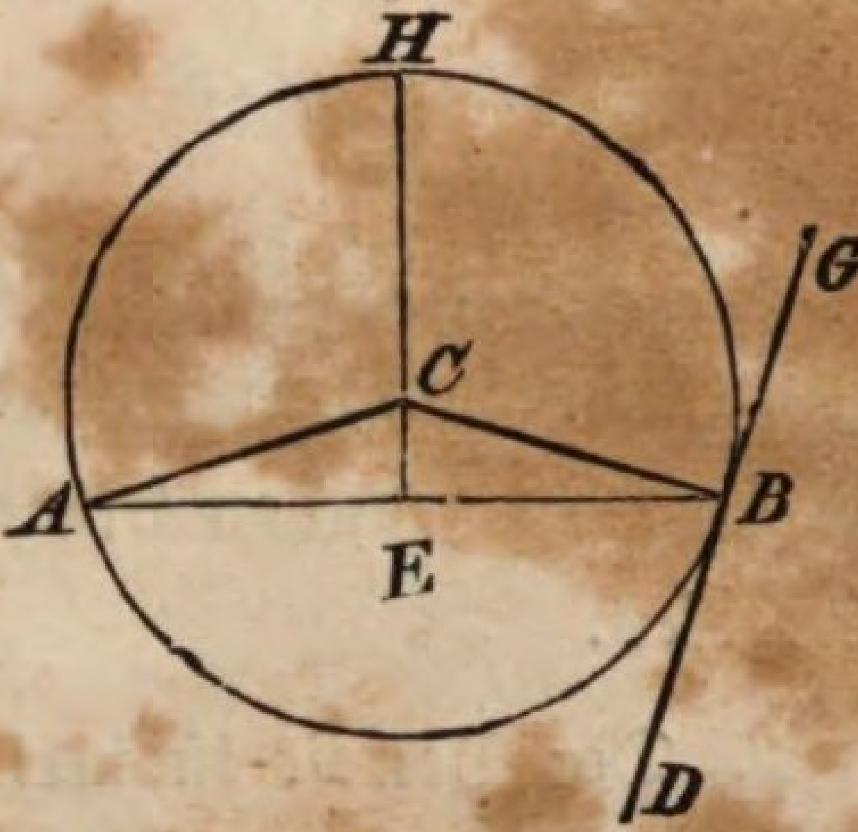
19. Satz. **Der Peripherie-Winkel in einem Kreise ist halb so groß, als der Centri-Winkel, der mit ihm auf gleichem Bogen steht.**

Beweis. Der Mittelpunkt *C* kann entweder auf einem der Schenkel des Peripherie-Winkels *ADB*, oder innerhalb des Peripherie-Winkels *AEB* oder außerhalb des Peripherie-Winkels *AGB* liegen.

Der erste Fall läßt sich leicht aus I. 27, 2. Zus. in Verbindung mit II. 2. beweisen.

Der zweite Fall $AEB = \frac{1}{2} ACB$ läßt sich mit Hülfe des ersten leicht beweisen, wenn man durch die Spitze E den Durchmesser ECF zieht, ebenso läßt sich leicht der dritte Fall $\sphericalangle AGB = \frac{1}{2} ACB$ beweisen, wenn man durch die Spitze G den Durchmesser GCH legt.

Fig. 80.



Der Satz findet endlich für den Fall Statt, wo der Peripherie-Winkel durch eine Sehne AB und eine Tangente GBD gebildet wird. Um zu beweisen, daß der spitze Winkel $ABD = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB$, fälle man vom Mittelpunkt C auf AB die Senkrechte CE. Alsdann ist, weil die beiden Winkel ECB und ABD Complemente desselben Winkels EBC sind, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ECB$, ECB ist aber gleich $\frac{1}{2} \sphericalangle ACB$, mithin $\sphericalangle ABD = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB$.

Was den stumpfen Winkel ABG betrifft, so ist derselbe gleich BCH, gleich der Hälfte des überstumpfen Centri-Winkels ACB.

Zusatz 1. Der Peripherie-Winkel, der auf einem Halbkreise steht, ist ein Rechter.

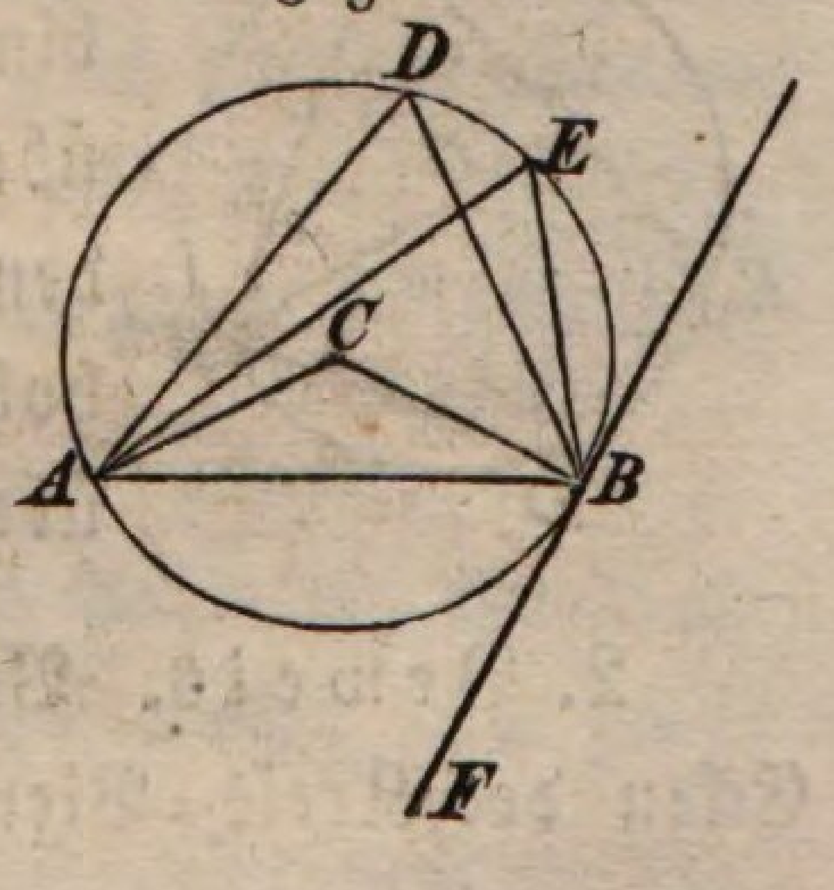
Beweis. Der entsprechende Centri-Winkel ist ein flacher oder gestreckter Winkel u. s. w.

Zusatz 2. Der Peripherie-Winkel, der auf einem Bogen steht, welcher kleiner als ein Halbkreis ist, ist ein spitzer, und der Peripherie-Winkel, der auf einem Bogen steht, welcher größer als ein Halbkreis ist, ist ein stumpfer.

Zum Beweise vergleiche man den in Rede stehenden Winkel mit dem entsprechenden Centri-Winkel oder berufe sich auf den vorhergehenden Zusatz.

20. Satz. Peripherie-Winkel auf gleichem Bogen sind einander gleich.

Fig. 81.



Beweis. Leicht läßt sich mit Hülfe des vorhergehenden Satzes beweisen, daß die von Sehnen gebildeten Peripheriewinkel ADB und AEB, welche auf demselben Bogen AB stehen, einander gleich sind, wenn man nur den mit ihnen auf demselben Bogen AB stehenden Mittelpunktswinkel ACB construirt.

Ist ABF ein Peripheriewinkel gebildet von Sehne und Tangente, so ist er ebenfalls jedem Peripherie-Winkel D gleich, der mit ihm auf gleichem Bogen AB steht. Es ist nämlich $\sphericalangle ABF = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle D = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB$, mithin $\sphericalangle ABF = \sphericalangle D$.

Umkehrungen: 1) Sind zwei Peripherie-Winkel desselben Kreises oder gleicher Kreise einander gleich, so stehen sie auf gleichen Bogen.

Beweis leicht.

2) Die Spitzen aller gleichen Winkel, deren Schenkel durch zwei Punkte gehen, und welche auf derselben Seite der die beiden Punkte verbindenden geraden Linie sich befinden, liegen auf der Peripherie eines Kreises.

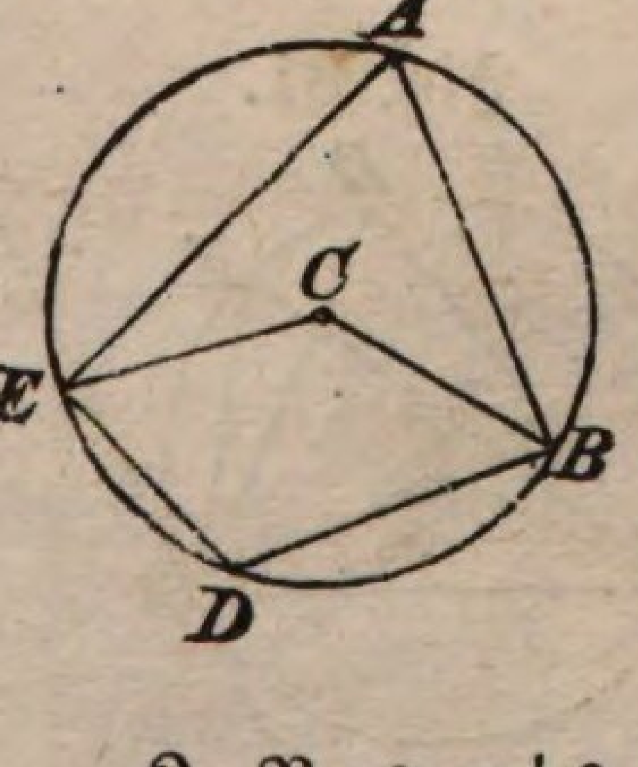
Der Beweis ist indirect zu führen. Gesetzt, der durch die beiden gegebenen Punkte und durch die Spitze eines der Winkel gehende Kreis ginge nicht durch die Spitze eines der anderen Winkel, so müßte diese letztere entweder innerhalb oder außerhalb des Kreises zu liegen kommen. In beiden Fällen entstände eine Folge, welche mit I. 26 in Widerspruch tritt.

3) Macht eine durch den Endpunkt einer Sehne gehende gerade Linie mit dieser Sehne einen Winkel, welcher gleich ist dem Peripherie-Winkel, der im Nebenwinkel auf der Sehne steht, so ist jene Linie eine Tangente.

Der Beweis ist entweder direct durch Vergleichung des gegebenen Winkels mit dem halben Mittelpunkts-Winkel oder indirect zu führen.

21. Satz. Die gegenüber stehenden Winkel eines Vierecks, dessen Spitzen im Kreise liegen — eines Kreis-Vierecks —, betragen zusammen zwei Rechte.

Fig. 82.

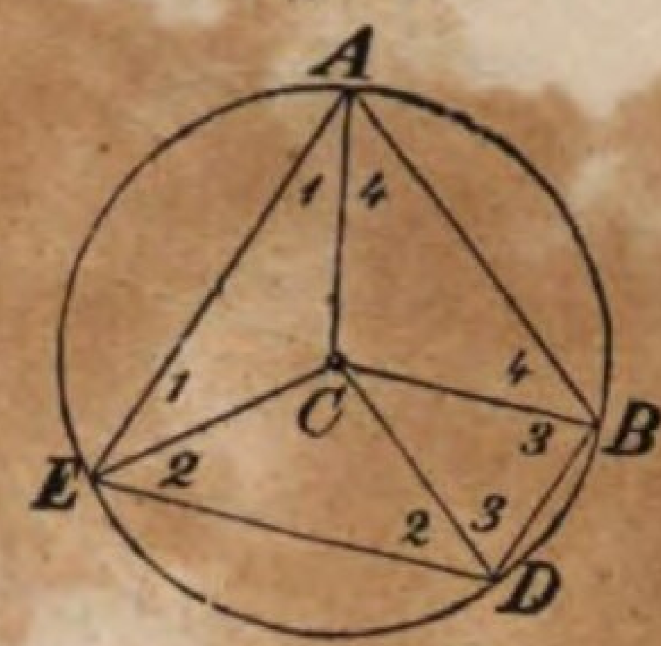


1. Beweis. Um zu beweisen, daß in dem Kreis-Vierecke $ABDE$ $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 2R$, verbinde man den Mittelpunkt C mit den beiden gegenüberstehenden Ecken E und B und vergleiche die beiden Mittelpunktswinkel ECB, von denen der eine hohl, der andere erhaben ist, mit den beiden gegenüberstehenden Peripheriewinkeln A und D u. s. w.

2. Beweis. Verbindet man den Mittelpunkt C mit sämmtlichen Ecken des Kreis-Vierecks, so entstehen vier gleichschenkelige Dreiecke,

worin die gleichen Winkel, wie Figur 83 zeigt, mit gleichen Nummern bezeichnet sind. Leicht ergibt sich nun daraus, daß die Summe der beiden Winkel *EAB* und *EDB* der Summe der beiden Winkel *AED* und *ABD* gleich ist, und aus I. 28. Zus. die Richtigkeit der Behauptung.

Fig. 83.



Zusatz. Umkehrung. Betragen in einem Vierecke zwei gegenüber stehende Winkel zwei Rechte, so läßt sich durch die vier Spitzen desselben ein Kreis beschreiben.

Der Beweis ist indirect zu führen. Gesetzt, der durch drei Punkte des Vierecks gehende Kreis ginge nicht durch den vierten u. s. w.

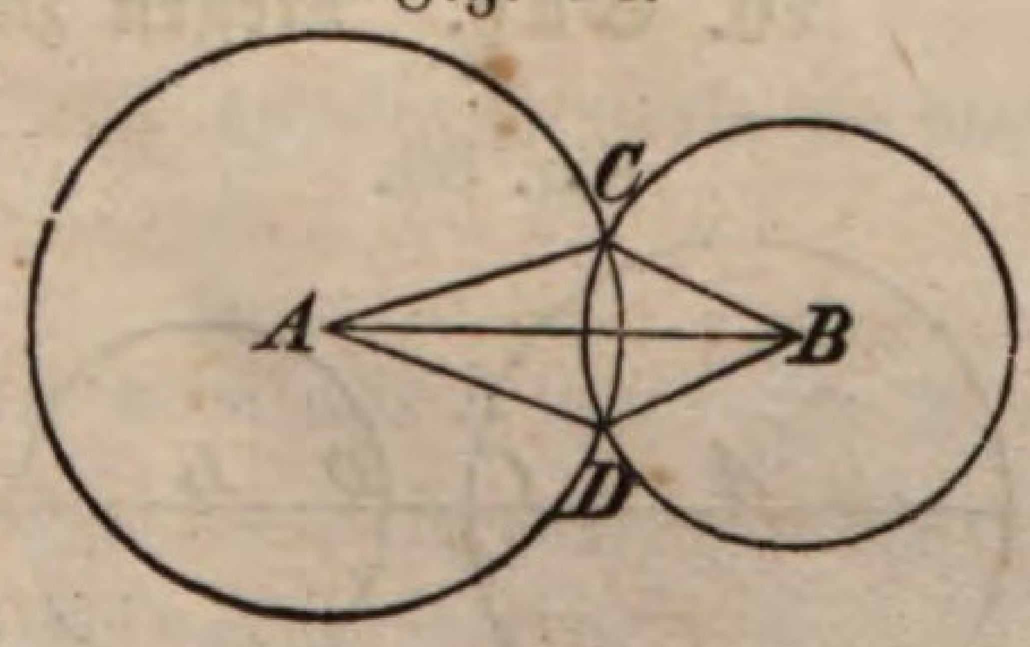
Vierter Abschnitt.
Gegenseitige Lage zweier Kreise.

22. Erklärung. Unter Centrale, Centrallinie zweier Kreise, versteht man die die Mittelpunkte der Kreise verbindende gerade Linie.

23. Satz. **Durchschneiden sich zwei Kreise in einem Punkte auf der einen Seite der Centrale, so durchschneiden sie sich auch in einem entsprechenden Punkte auf der anderen Seite derselben.**

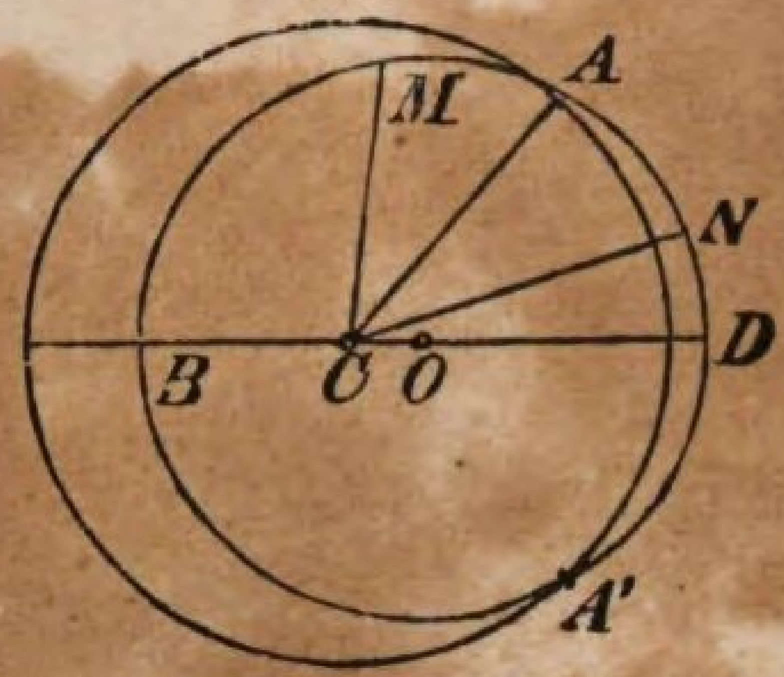
Beweis. Es seien *A* und *B* die Mittelpunkte zweier Kreise, *AB* also ihre Centrale, und *C* sei ein gemeinschaftlicher Punkt der beiden Kreise auf der einen Seite der Centrale *AB* außer ihr. Durch Verbindung des Punktes *C* mit den beiden Mittelpunkten *A* und *B* entsteht ein Dreieck *ABC*. Wie auch dieses Dreieck *ABC* beschaffen sein möge, es gibt auf der anderen Seite ein congruentes Dreieck *ADB*, so daß $AD = AC$, $BD = BC$; der Punkt *D* ist somit ein zweiter, den beiden Kreisen gemeinschaftlicher, Punkt.

Fig. 84.



24. Satz. **Zwei Kreise können sich auf einer Seite der Centrale nur in einem Punkte, überhaupt also in nicht mehr als zwei Punkten durchschneiden.**

Fig. 85.



Beweis. *C* und *O* seien die Mittelpunkte zweier Kreise, die sich auf einer Seite der Centrale *CO* in *A* schneiden. Der zweite dieser Kreise, dessen Centrum *O* ist, treffe die Centrale in *B* und *D*, dann ist von allen Punkten seines Umfanges *B* derjenige, welcher dem Mittelpunkte *C* des ersten Kreises am nächsten, *D* derjenige, der am weitesten davon abliegt (III. S. 9). Sind nun *M*, *N* noch irgend zwei andere Punkte dieses Umfanges, *M* einer zwischen *B* und *A*, *N* zwischen *A* und *D*, so ist nach dem eben angeführten Satze (III. 9) $CM < CA$, $CN > CA$; daher fällt *M* innerhalb, *N* außerhalb des Kreises um *C*; beide Kreise können also auf der Seite der Centrale, wo *A* liegt, keinen weiteren Punkt mehr gemein haben. Die Kreise können daher im Ganzen mit Rücksicht auf den vorhergehenden Satz *nicht mehr als zwei* Punkte gemeinschaftlich haben.

25. Satz. **Durchschneiden zwei Kreise einander, so ist die Entfernung der Mittelpunkte kleiner als die Summe, und größer, als der Unterschied der Radien der beiden Kreise. Dabei ist die gemeinschaftliche Sehne auf der Centrale senkrecht und wird von derselben halbirt.**

Die Richtigkeit der ersten Behauptung ergibt sich sogleich, wenn man die beiden Mittelpunkte mit einem der Durchschnittspunkte der beiden Kreise verbindet. Der Beweis der zweiten Behauptung ist leicht, nachdem man beide Durchschnittspunkte mit dem Mittelpunkte verbunden hat.

26. Satz. **Liegen zwei Kreise ganz aus einander, so daß sie keinen Punkt mit einander gemein haben, so ist die Centrale größer als die Summe ihrer Radien; liegen sie aber ganz in einander, so daß sie keinen Punkt gemeinschaftlich haben, so ist die Centrale kleiner als die Differenz der Radien.**

Fig. 86.

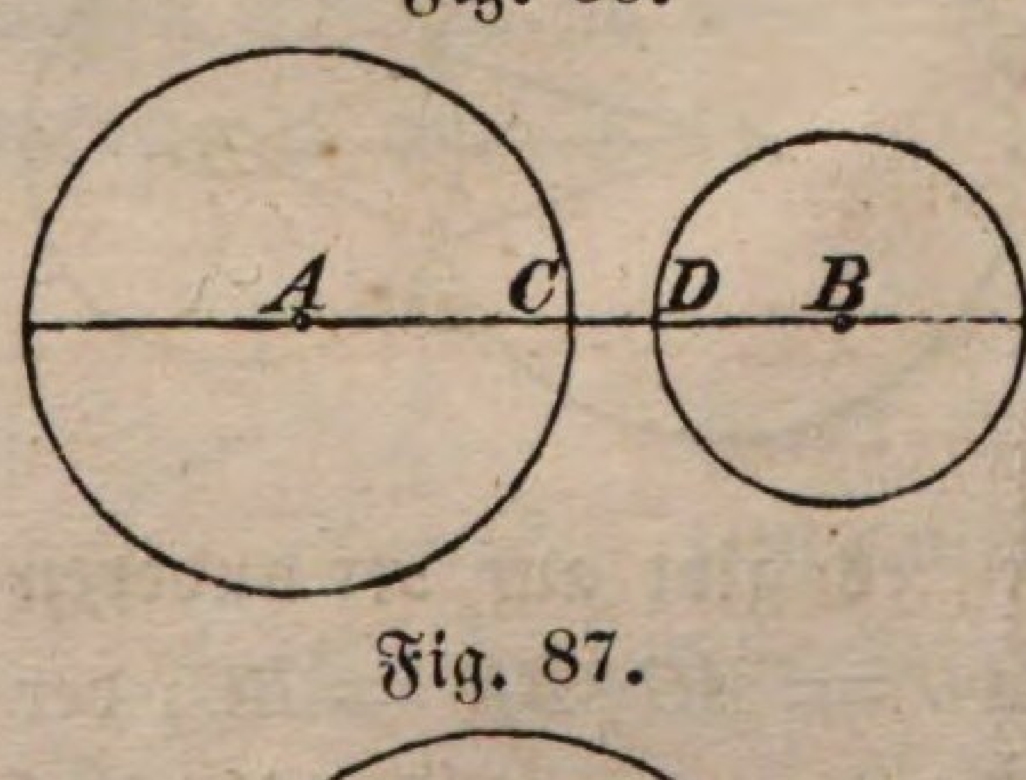
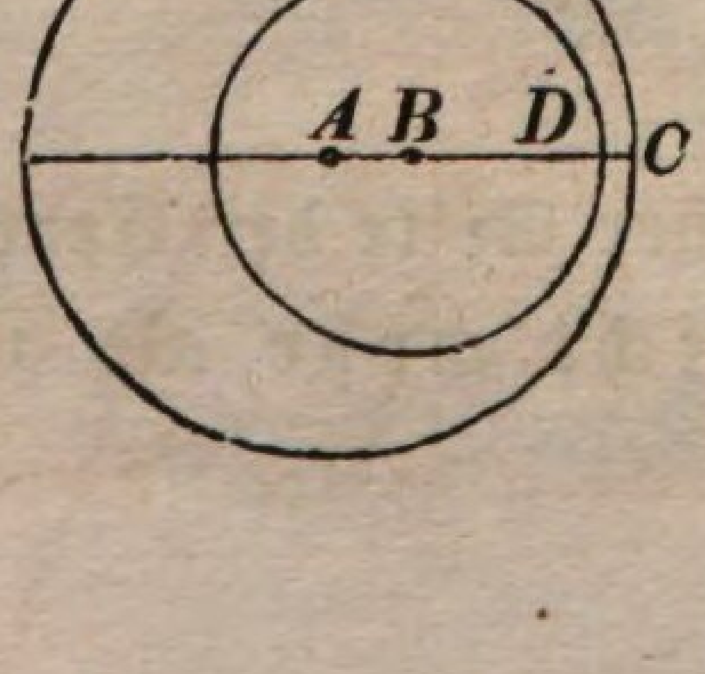


Fig. 87.



AB sei die Centrale beider Kreise, *AC*, *BD* seien ihre Radien. In Fig. 86 ist $AB = AC + CD + DB > AC + BD$; in Fig. 87 $AB = AC - BD - CD < AC - BD$.

Erklärung. Haben zwei Kreislinien nur *einen* Punkt gemeinschaftlich, so nennt

man sie berührende. Der gemeinschaftliche Punkt heißt Berührungspunkt. Die Berührung ist eine äußere, wenn beide Kreise aus einander liegen, eine innere, wenn der kleinere ganz im größeren liegt.

28. Satz. Berühren zwei Kreise einander, so liegt der Berührungspunkt mit den Mittelpunkten in einer geraden Linie, und es ist die Centrale entweder gleich der Summe oder der Differenz der beiden Radien, je nachdem die Berührung eine äußere oder innere ist.

Fig. 88.

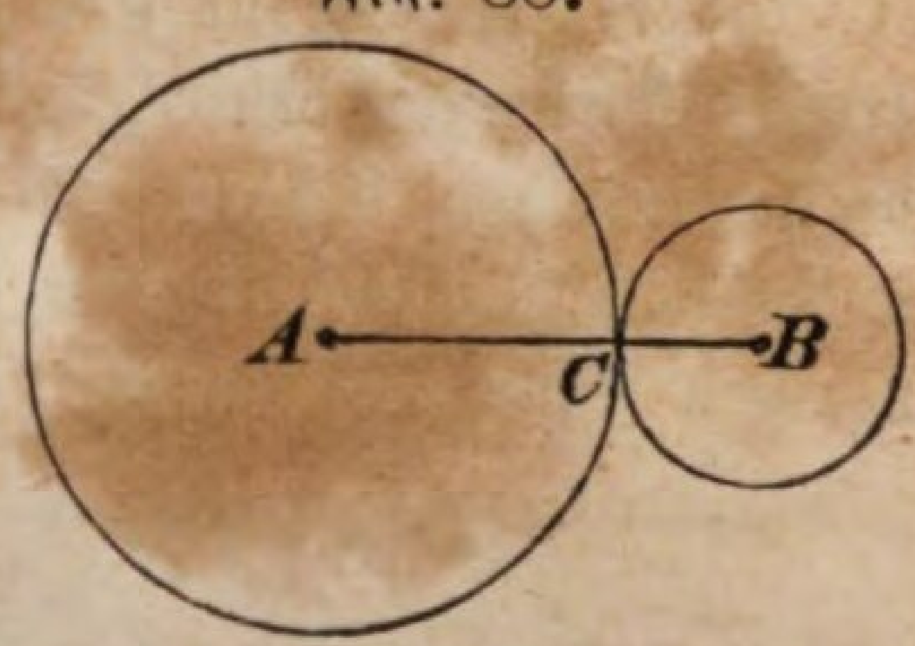
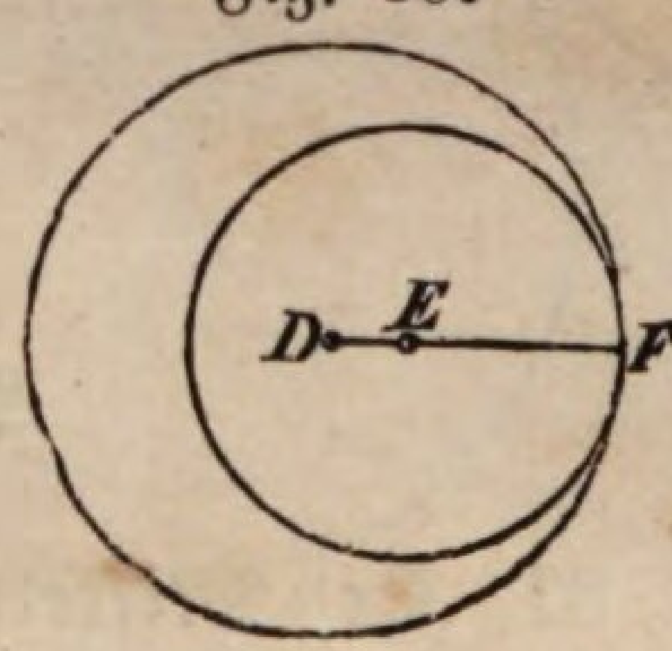


Fig. 89.



Beweis. Läge der Berührungspunkt C der beiden Kreise A und B oder der Berührungspunkt F der beiden Kreise D und E nicht auf der Centrale AB (Fig. 88) oder der verlängerten Centrale DE (Fig. 89) selbst, sondern auf einer Seite derselben, so müßte nach 23. es auf der anderen Seite noch einen zweiten gemeinschaftlichen Punkt der beiden Kreise geben. Dieses widerspricht aber der Voraussetzung, daß die beiden Kreise sich berühren. Leicht ergibt sich, daß für den Fall der äußeren Berührung $AC + CB = AB$, und für den Fall der inneren Berührung $DF - FE = DE$ sei.

Zusatz. Zwei berührende Kreise haben im Berührungspunkte eine gemeinschaftliche Berührende.

Der Beweis ergibt sich leicht, wenn man nur auf der Centrale im Berührungspunkte eine Senkrechte errichtet.

29. Schlußbemerkung. Bezeichnet man mit R und r die Radien zweier Kreise, mit D die Entfernung ihrer Mittelpunkte, so lassen sich die vorigen Sätze in folgende Uebersicht bringen.

1) Wenn zwei Kreislinien sich schneiden, so ist $D < R + r$, und $> R - r$.

2) Wenn sie sich berühren $\begin{cases} \text{äußerlich}: D = R + r. \\ \text{innerlich}: D = R - r. \end{cases}$

3) Wenn sie sich nicht treffen und liegen ganz $\begin{cases} \text{aus einander}: D > R + r. \\ \text{in einander}: D < R - r. \end{cases}$

30. Die eben ausgesprochenen Behauptungen gelten sämmtlich

auch umgekehrt, nämlich: a) Ist die Centrale zweier Kreise größer als die Summe der Radien, so liegen die Kreise ganz aus einander, ohne einen Punkt gemeinschaftlich zu haben; b) ist die Centrale gleich der Summe der Radien, so berühren sich die Kreise äußerlich; c) ist die Centrale kleiner als die Summe und größer als die Differenz der Radien, so durchschneiden sich die Kreise; d) ist die Centrale gleich der Differenz der Radien, so berühren sich die Kreise nach innen; e) ist die Centrale kleiner als die Differenz der Radien, so liegen die Kreise ganz ineinander, ohne einen Punkt gemeinschaftlich zu haben.

Der Beweis für jede dieser Behauptungen läßt sich direct führen; jedoch ergibt sich deren Richtigkeit auch auf kürzerem Wege durch indirecte Schlußweise aus den Sätzen 25—29. Sind überhaupt die Fälle eines Systems vollständig aufgezählt und ist jeder an Bedingungen geknüpft, welche die der übrigen Fälle ausschließen, so gelten auch die Umkehrungen.

Fünfter Abschnitt.

Aufgaben über den Kreis.

31. **Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreisumfanges oder Kreisbogens zu finden.**

Zieht man eine beliebige Sehne und errichtet auf ihr in ihrer Mitte eine Senkrechte, so geht nach III. 13 Zus. diese Senkrechte durch das Centrum des Kreises. Man hat also nur zwei solche Senkrechten auf zwei verschiedenen nicht parallelen Sehnen zu errichten; ihr Durchschnittspunkt ist der gesuchte Mittelpunkt.

Anmerkung. Ist eine ganze Peripherie oder ein Bogen gegeben, der größer als die halbe Peripherie, so genügt auch eine Sehne mit ihrem Perpendikel, um den Mittelpunkt zu finden. Wie?

32. **Durch drei gegebene Punkte einen Kreis zu ziehen.**

Einschränkung. Die drei gegebenen Punkte dürfen nicht in gerader Linie liegen.

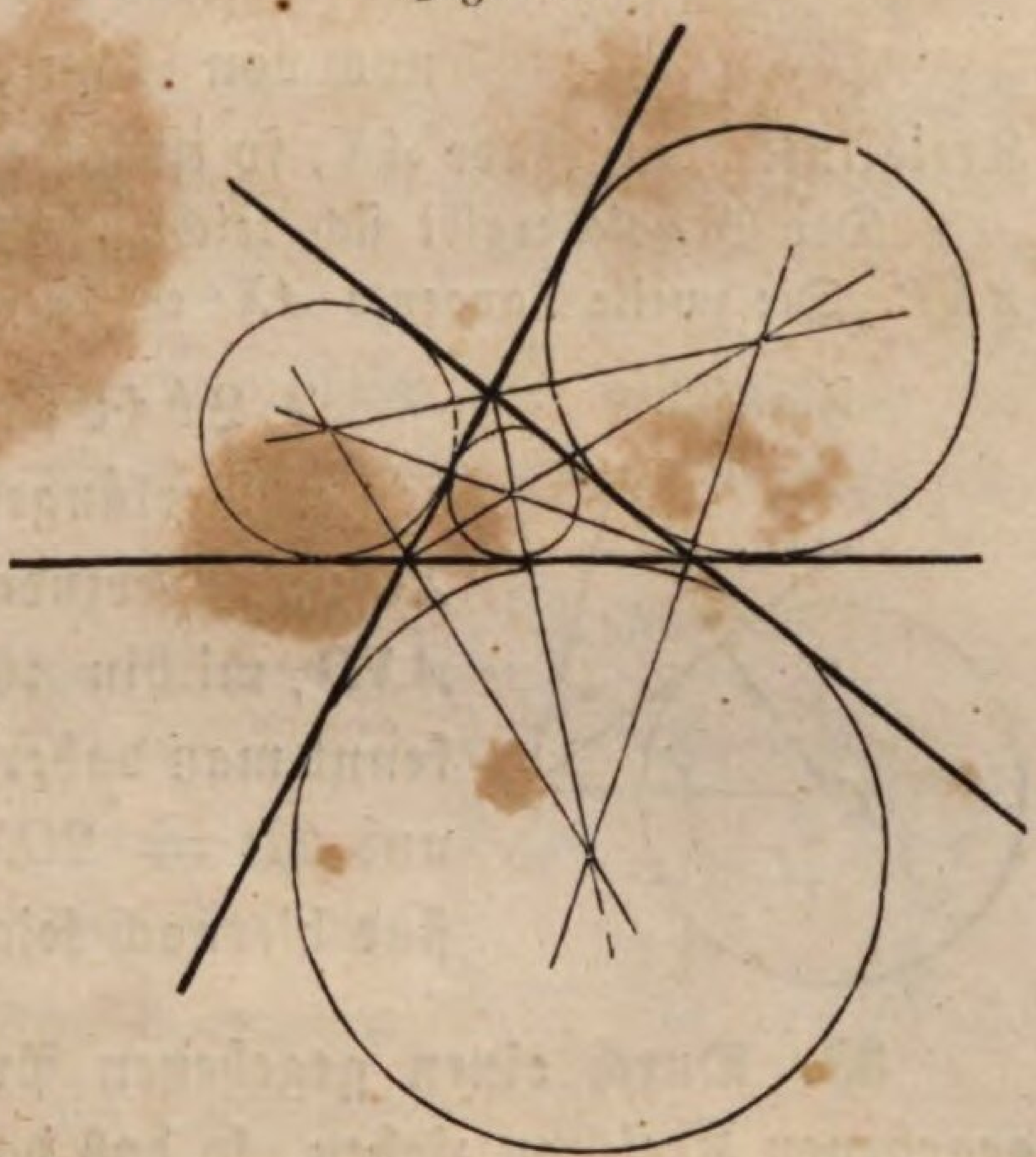
Auflösung. Man bestimme nach II. 50 den Punkt, der von drei gegebenen Punkten gleich weit absteht, und beschreibe aus diesem

Punkte mit der Entfernung desselben von einem der drei gegebenen einen Kreis.

Bemerkung. Durch die drei Punkte läßt sich immer ein Kreis beschreiben, aber auch nur einer.

33. Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei der Lage nach gegebene gerade Linien berührt.

Fig. 90.

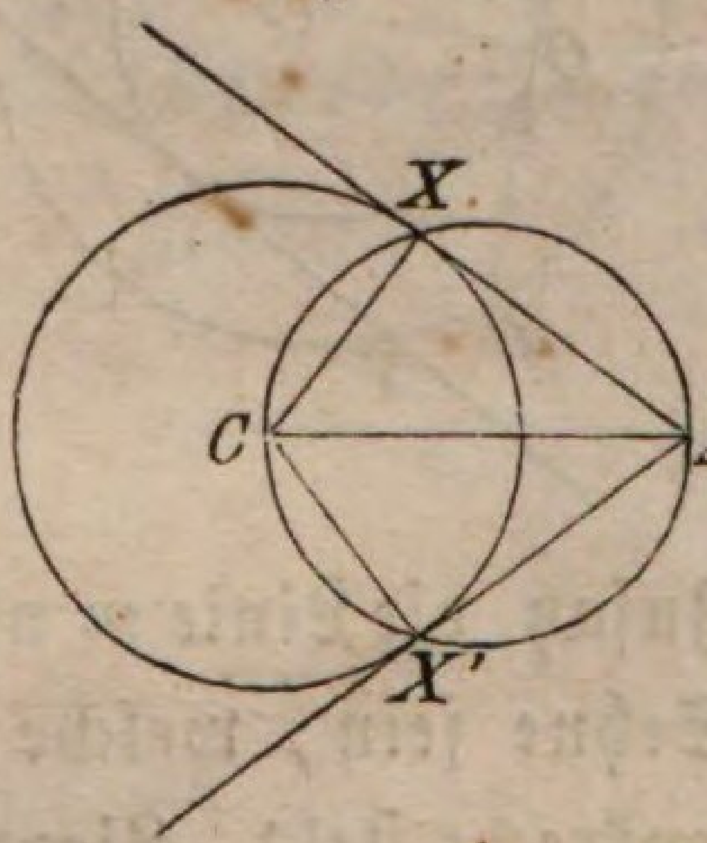


Auflösung. Man bestimme nach II. 51 diejenigen Punkte, welche von den gegebenen Linien gleich weit entfernt sind, und beschreibe aus einem derselben mit seinen Entfernungen von jenen Linien Kreise. Die Richtigkeit der Construction erhellt unmittelbar aus II. 51.

Bemerkung. Sind die drei gegebenen Linien einander parallel, oder durchschneiden sich dieselben in einem Punkte, so ist die Auflösung der Aufgabe unmöglich; sind nur zwei einander parallel, so gibt es zwei Kreise; durchschneiden sich endlich die drei Linien in drei Punkten, so gibt es vier Kreise, welche die verlangte Eigenschaft haben.

34. Durch einen außerhalb eines Kreises gegebenen Punkt eine Tangente an diesen zu ziehen.

Fig. 91.



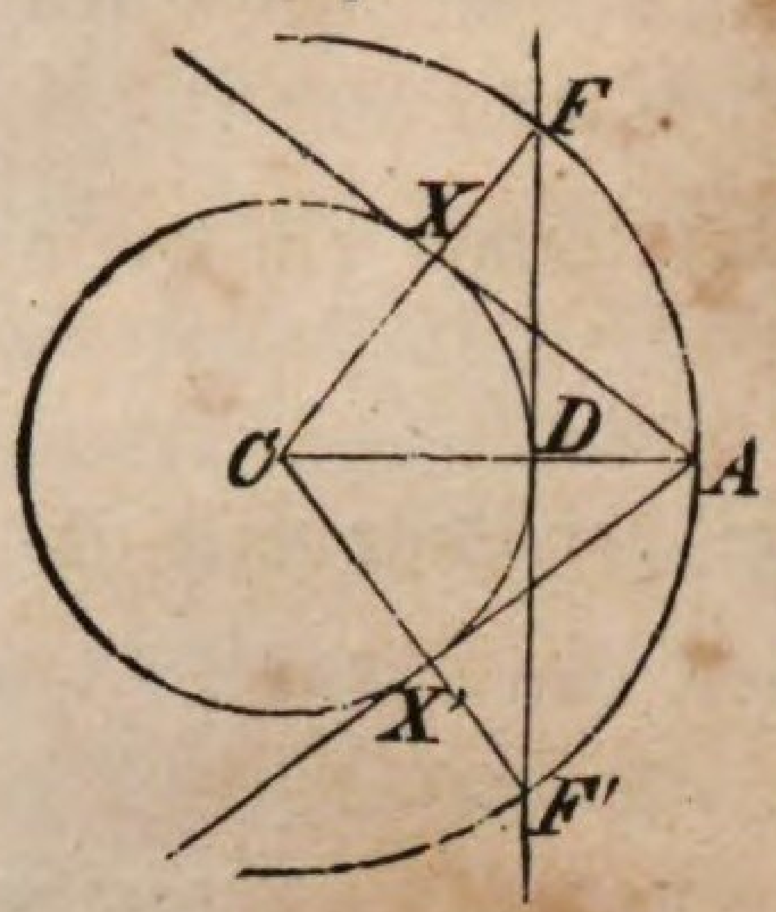
Es soll aus dem Punkte A an den Kreis, dessen Mittelpunkt C ist, eine Tangente gelegt werden.

1. Lösung. Man beschreibe über CA als Durchmesser einen Kreis. Verbindet man die Durchschnittspunkte X und X' dieses Kreises mit dem gegebenen, mit A, so sind AX und AX' die verlangten Tangenten.

Beweis leicht.

2. Lösung. Ist AX die verlangte Tangente, so kennt man, wenn

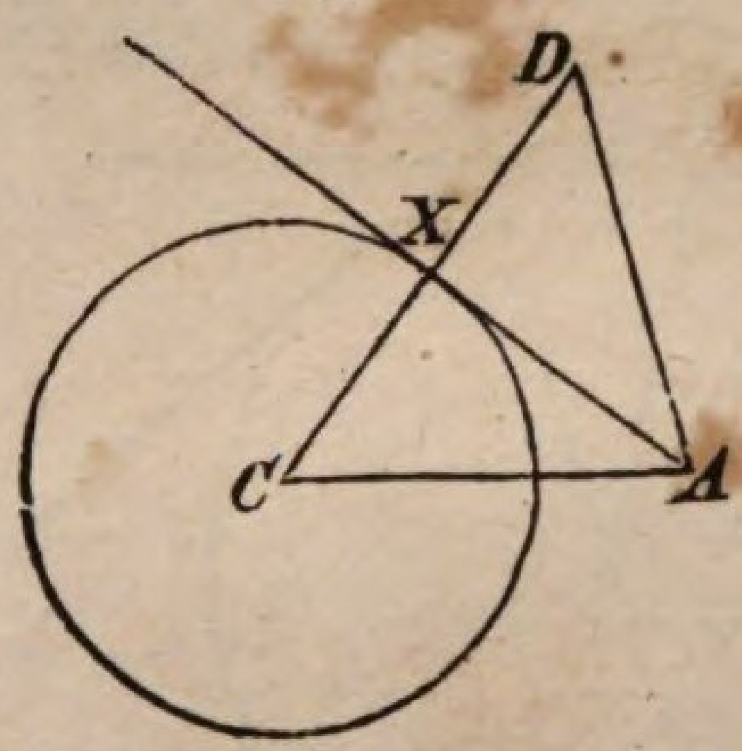
Fig. 92.



man CX und CA zieht, von dem Dreiecke AXC 1) AC, 2) CX der Länge nach, 3) $\sphericalangle\ CXA = R$. Das $\triangle\ ACX$ läßt sich nun nach II. 21 construiren. Man verbinde demnach A mit C, errichte im Endpunkte D des Radius CD auf demselben eine Senkrechte und beschreibe aus C mit CA einen Kreis; den Durchschnittspunkt F dieses Kreises mit der Senkrechten verbinde man mit C. Zieht man nun noch von A an den Durchschnitt X der CF mit der Kreislinie die Gerade AX, so ist diese Linie die verlangte Tangente.

Der Beweis ergibt sich leicht aus der Congruenz der Dreiecke CDF und AXC. Die zweite Tangente AX' ergibt sich durch dieselbe Construction.

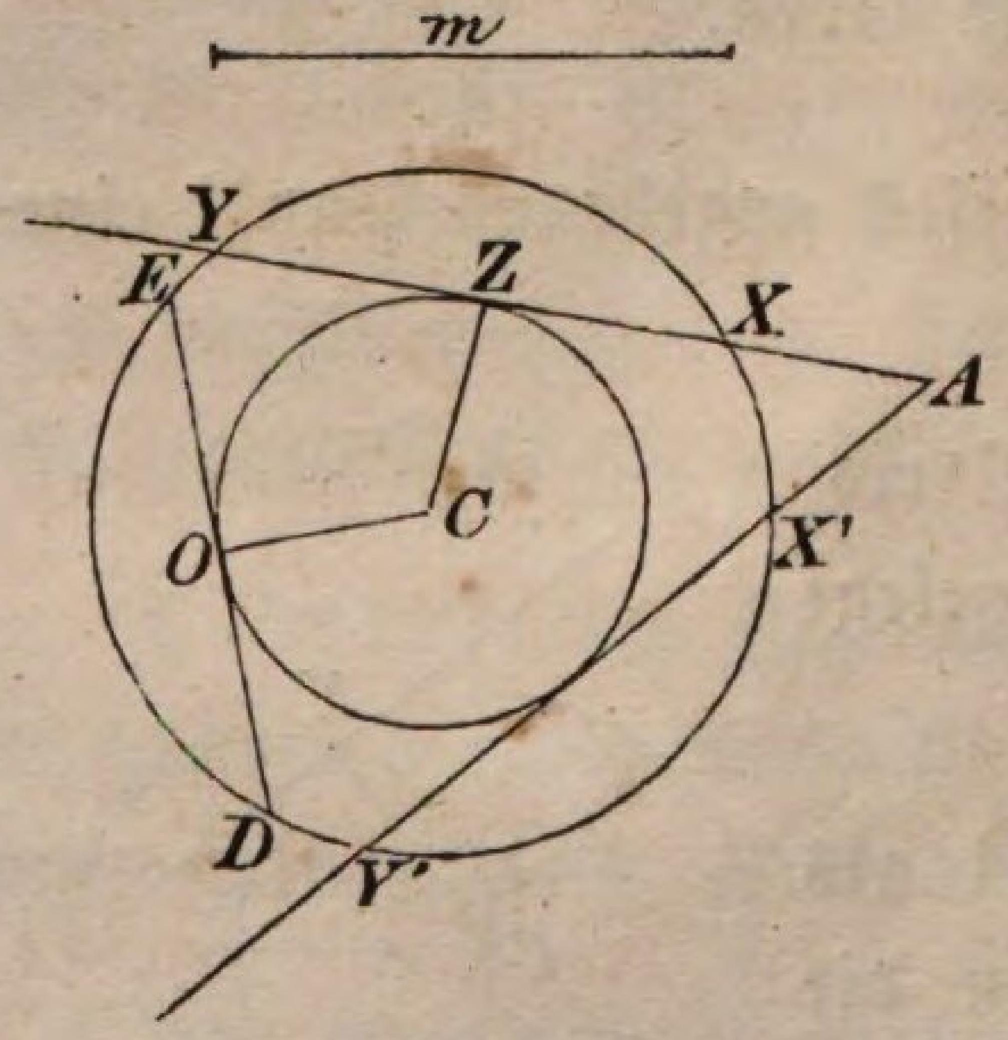
Fig. 93.



3. Lösung. Es sei AX die verlangte Tangente. Verlängert man CX um ein Stück $XD = XC$ und verbindet A mit D, so ist $\triangle\ AXC \simeq \triangle\ AXD$, mithin $AC = AD$. Von dem Dreiecke ACD kennt man daher die drei Seiten AC, $AD = AC$ und $CD = 2CX$. — Construction und Beweis sind hiernach leicht.

35. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie an einen gegebenen Kreis zu ziehen, so daß das innerhalb des Kreises fallende Stück derselben von gegebener Größe werde.

Fig. 94.



Durch den Punkt A soll eine gerade Linie an den Kreis, dessen Mittelpunkt C ist, so gezogen werden, daß das innerhalb des Kreises fallende Stück derselben gleich m werde.

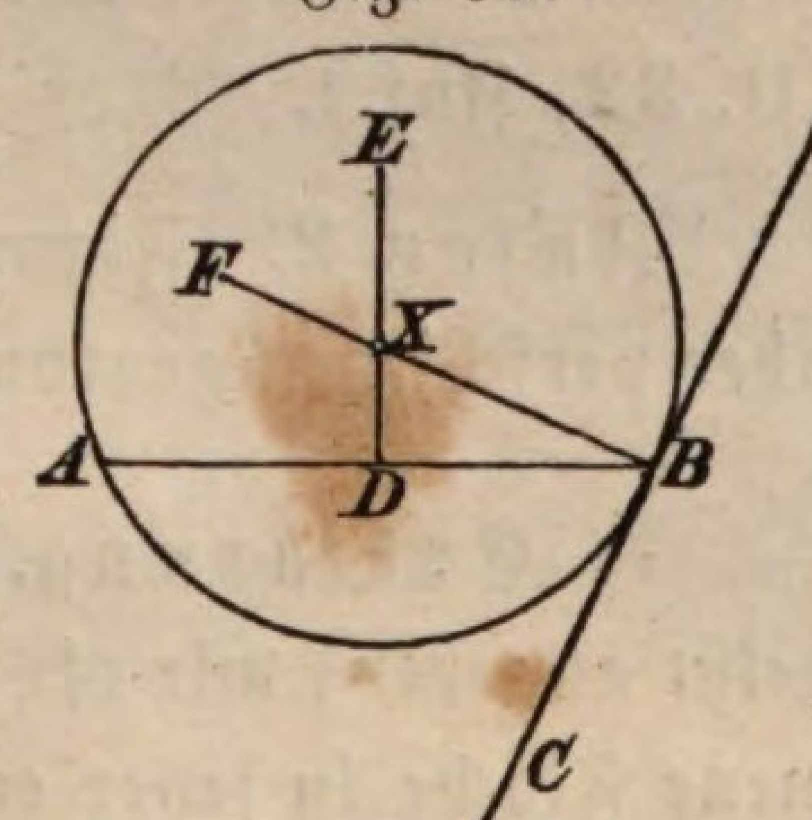
Determination. Die gegebene Linie m darf auf keinen Fall größer, als der Durchmesser des gegebenen Kreises sein. Liegt der gegebene Punkt A innerhalb des Kreises, so darf außerdem nach III. 16, Zusatz, die Linie m nicht kleiner als diejenige im Kreise durch A gezogene Sehne sein, welche auf der Verbindungslinie des Punktes A mit C senkrecht steht. Liegt der Punkt A auf der Peripherie des Kreises oder außerhalb desselben, so ist keine Beschränkung in Hinsicht der Kleinheit der m nöthig.

Construction. Man lege die Linie *m* beliebig als Sehne *ED* in den Kreis, fälle von *C* auf dieselbe die Senkrechte *CO*, beschreibe mit *CO* um *C* einen Kreis und ziehe durch den gegebenen Punkt *A* eine Tangente *AY* an den Kreis, welche die verlangte Linie sein wird. Es ist nämlich nach III. 15, $YX = DE = m$.

Es läßt sich aus der Determination nachweisen, daß für den Fall, wo *A* innerhalb des Kreises fällt, dieser Punkt nicht innerhalb des um *C* mit *CO* beschriebenen Kreises liegen kann, daß es also immer möglich ist, von *A* an diesen letzteren Kreis eine Tangente zu ziehen. Im Allgemeinen gibt es zwei Linien, *AY* und *AY'* von der verlangten Eigenschaft.

36. Ueber einer gegebenen geraden Linie *AB* als Sehne ein Kreissegment zu beschreiben, das eines gegebenen Winkels fähig ist.

Fig. 95.



Auflösung. Die Analysis dieser Aufgabe kann auf den besondern Fall des Satzes 20 dieses Capitels gestützt werden, wo einer der Peripherie-Winkel durch eine Sehne und eine Tangente gebildet wird. Man mache den Winkel *ABC* dem gegebenen Winkel *m* gleich und bestimme aus der Linie *AB* als Sehne und aus *BC* als Tangente den Mittelpunkt des gesuchten Kreises dadurch, daß man auf *AB* in der Mitte die Senkrechte *DE*, und auf *BC* in *B* die Senkrechte *BF* errichtet. Der Durchschnitt *X* dieser beiden Senkrechten *DE* und *BF* ist der Mittelpunkt des verlangten Kreisbogens.

Der Beweis ist einfach.

Bemerkung. Ist der Winkel ein Rechter, so hat man nur über der gegebenen Linie als Durchmesser einen Halbkreis zu beschreiben.

IV. Capitel.

Inhalt der Figuren.

Erster Abschnitt.

Sätze über Rechtecke und Quadrate.

1. Erklärung. Zwei Figuren heißen schlechtweg gleich, wenn sie gleichen Flächeninhalt haben. Das Zeichen der Gleichheit ist =.

Zusatz 1. Congruente Figuren sind gleich; jedes Parallelogramm wird daher durch eine Diagonale in zwei gleiche Theile getheilt (II. 32, Zus.).

Zusatz 2. Figuren sind auch gleich, wenn sie aus congruenten aber verschieden geordneten Stücken bestehen.

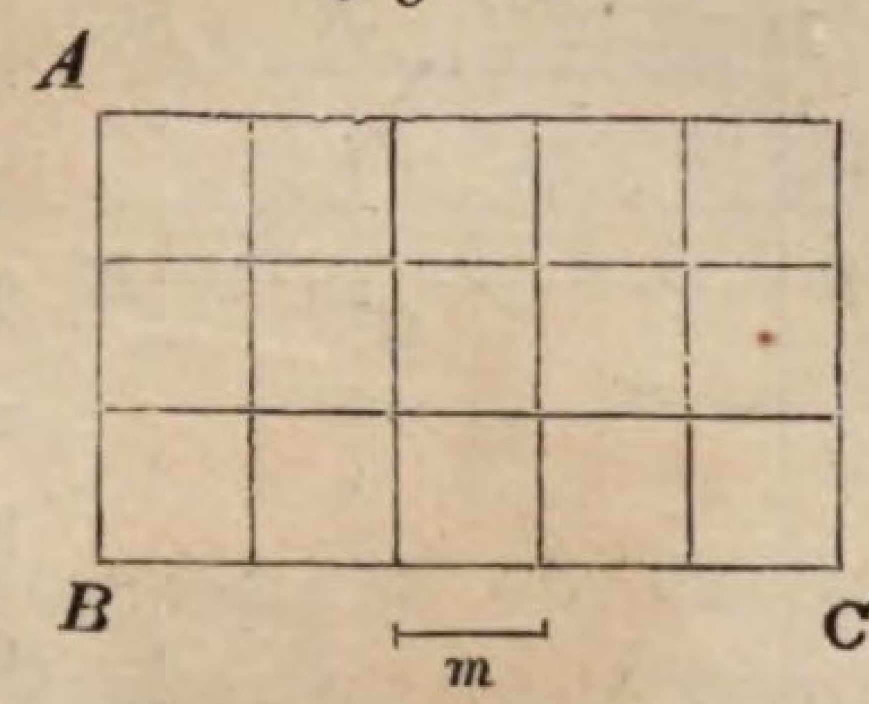
2. Erklärung. Den Flächeninhalt einer Figur bestimmen, heißt angeben, wie oft eine andere bekannte und als Einheit angenommene Fläche in jener enthalten ist. Die Form dieser Einheit ist an sich willkürlich; am einfachsten und zweckmäßigsten ist es aber, dafür ein Quadrat zu wählen, und zwar dasjenige Quadrat, dessen Seite der Längeneinheit gleich ist, weshalb sich auch der allgemeine Gebrauch für diese Wahl entschieden hat. Ist diese Längeneinheit z. B. 1 Fuß, so ist der Quadratfuß die Flächeneinheit. Die Berechnung des Flächeninhaltes setzt voraus, daß alle in und an der Figur vorkommenden Linien durch eine gemeinschaftliche Längeneinheit gemessen und als Zahlengrößen dargestellt sind. Diese Zahlen treten bei der Berechnung an die Stelle der Linien selbst, und wenn daher in Folgendem vom Producte zweier Linien die Rede ist, so ist darunter stets das Product derjenigen beiden Zahlen zu verstehen, welche die Längen jener Linien nach der angenommenen Einheit ausdrücken.

3. Satz. **Der Inhalt eines Rechteckes ist gleich dem Producte derjenigen zwei Zahlen, welche ausdrücken, wie oft die Linieneinheit in der Grundlinie und Höhe des Rechteckes enthalten ist.**

Beweis. Der Beweis ist besonders zu führen für den Fall, 1) daß die Seiten durch ganze Zahlen, 2) daß sie durch Brüche ausgedrückt sind.

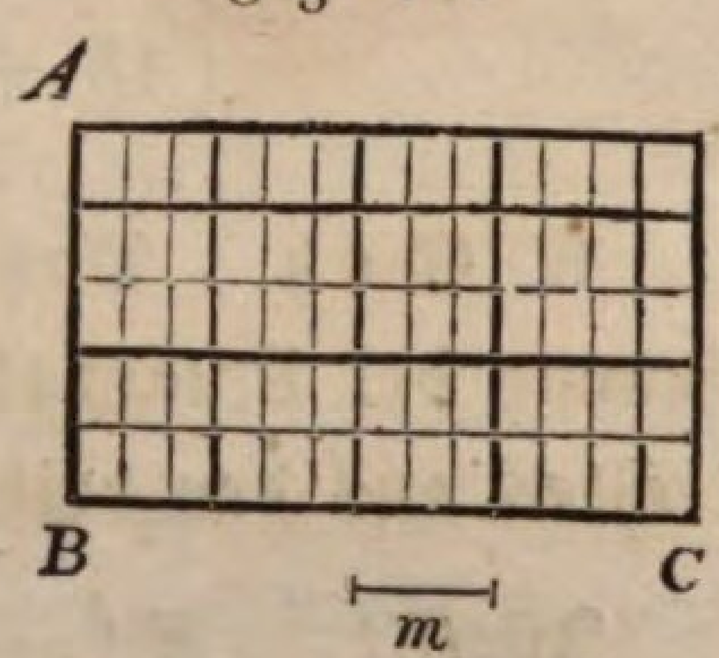
1) Es möge die Linieneinheit *m* in der Höhe *AB* des Rechteckes *AC* 3 mal, und in der Grundlinie *BC* 5 mal enthalten sein. Leicht ist in diesem Falle einzusehen, daß alsdann der Inhalt dieses Rechteckes = 15.

Fig. 95.



2) Ist aber die Linieneinheit in der Höhe $2\frac{1}{2}$, in der Länge $4\frac{1}{3}$ mal enthalten, so wird der Inhalt durch $2\frac{1}{2} \times 4\frac{1}{3} = 10\frac{5}{6}$ ausgedrückt.

Fig. 96.



Denn theilt man die Höhe des Rechteckes in 5 und die Grundlinie in 13 gleiche Theile, und zieht durch die einzelnen Theilungspunkte Parallelen, so zerfällt das ganze Rechteck in $5 \times 13 = 65$ gleiche Rechtecke, von welchen jedes zur Höhe $\frac{1}{2}$ *m* und zur Grundlinie $\frac{1}{3}$ *m* hat. Der Inhalt jedes dieser Rechtecke wird aber durch $\frac{1}{6}$ ausgedrückt; der Inhalt sämmtlicher 65 Rechtecke ist also $\frac{65}{6}$ oder $10\frac{5}{6}$.

Zusatz. Der Inhalt eines Quadrats ist gleich der zweiten Potenz seiner Seite, weshalb man auch die zweite Potenz einer Zahl die **Quadratzahl** nennt.

Schreiten die Unterabtheilungen des **Längenmaßes zehntheilig** fort, so schreiten die Unterabtheilungen des **Flächenmaßes hunderttheilig** fort. Z. B. 1 Meter = 10 Decimeter, 1 Decimeter = 10 Centimeter; 1 Quadratmeter = 100 Quadratdecimeter, 1 Quadratdecimeter = 100 Quadratcentimeter; 1 Quadratfuß (1 □′) hat 100 Quadratdecimalzoll. Wird aber die Haupteinheit zwölftheilig abgestuft, so hat jede Flächeneinheit 144 nächste Untereinheiten. Z. B. 1′ = 12″, 1″ = 12‴, mithin 1 □′ = 144 □″, 1 □″ = 144 □‴.

4. Satz. Die Summe oder Differenz zweier Rechtecke von gleicher Höhe ist einem Rechtecke von derselben Höhe gleich, dessen Grundlinie gleich der Summe oder Differenz der Grundlinien der einzelnen Rechtecke ist.

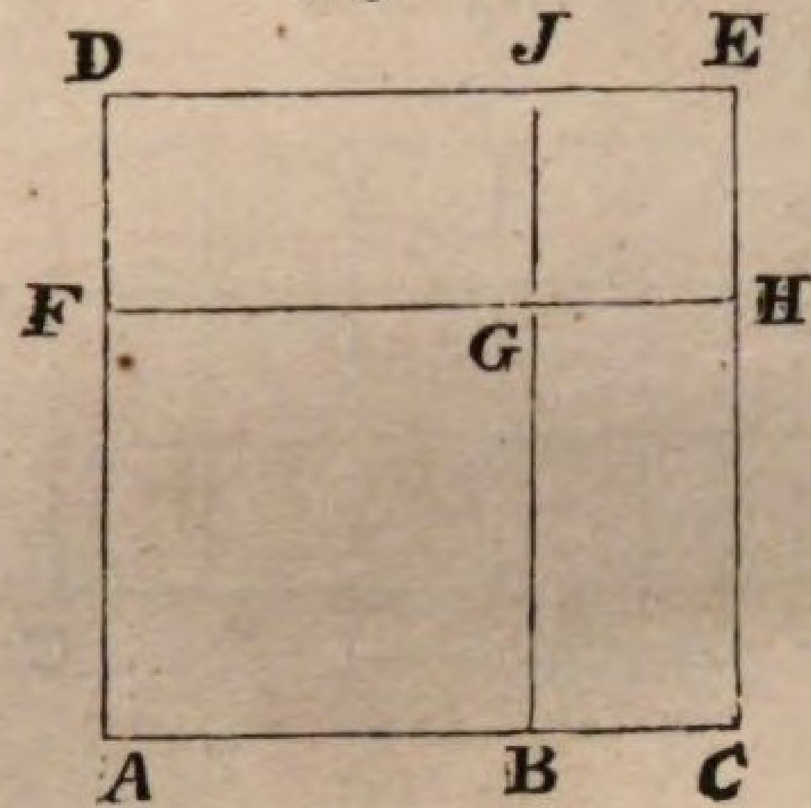
Zum Beweise werden die Rechtecke so an einander oder auf einander gelegt, daß die gleichen Höhen in **eine** Linie zusammenfallen.

5. Satz. Das Quadrat über der Summe zweier Linien ist der Summe der Quadrate dieser Linien nebst dem doppelten Rechtecke aus ihnen gleich.

Ist $AC = AB + BC$, so ist:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB.BC.$$

Fig. 97.



Beweis. Errichtet man auf AC das Quadrat $ADEC$, macht $AF = AB$ und zieht durch B mit AD die Parallele BJ, durch F mit AC die Parallele FH, so läßt sich leicht zeigen, daß $AG = AB^2$, $GE = BC^2$, und daß sowohl BH als FJ dem Rechtecke aus den beiden Linien AB und BC, oder $AB \cdot BC$ gleich ist. Es ist somit das ganze Quadrat $ACED$ oder:

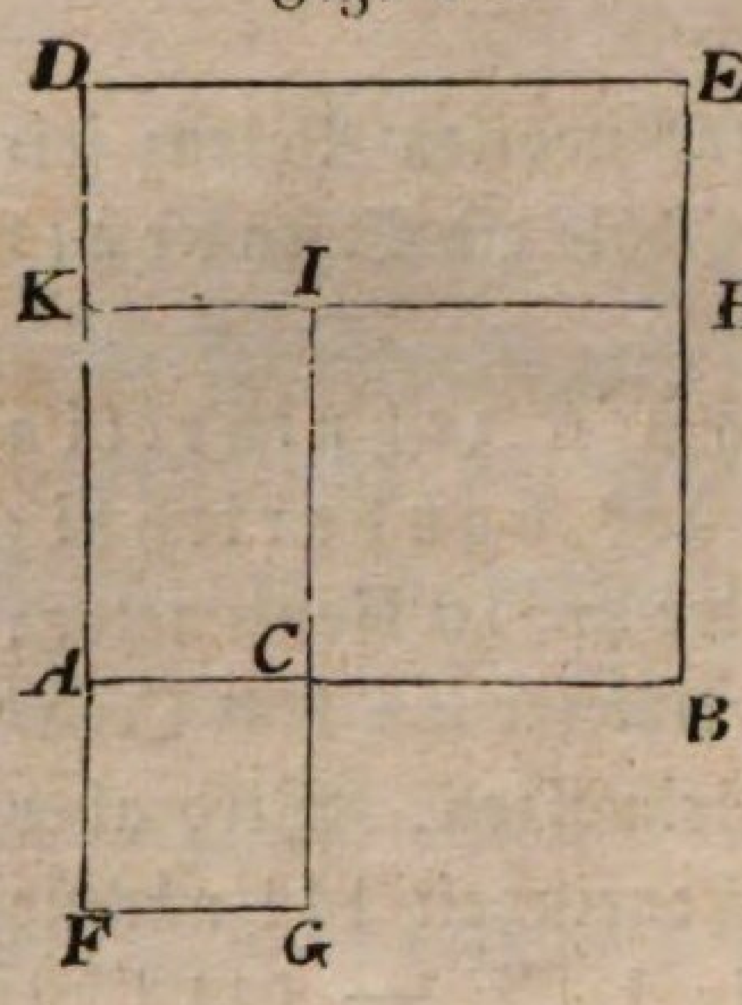
$$(AB + BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB.BC.$$

6. **Satz. Das Quadrat über der Differenz zweier Linien ist der Summe der Quadrate der beiden Linien vermindert um das doppelte Rechteck aus den beiden Linien gleich.**

Ist $BC = BA - AC$, so ist:

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2BA.AC.$$

Fig. 98.



Beweis. Man beschreibe über AB das Quadrat AE und über AC nach entgegengesetzter Seite das Quadrat AG. Macht man nun $BH = BC$, zieht durch H mit AB eine Parallele, welche die über C hinaus verlängerte GC in J, die AD aber in K schneidet, so ist $BJ = BC^2$. Es läßt sich jetzt leicht nachweisen, daß sowohl DH, als auch $KG = BA \cdot AC$. Zieht man nun von der ganzen Figur $BEDFGCB$ die beiden Rechtecke DH und KG ab, so bleibt das Quadrat über BC übrig, woraus also erhellt, daß:

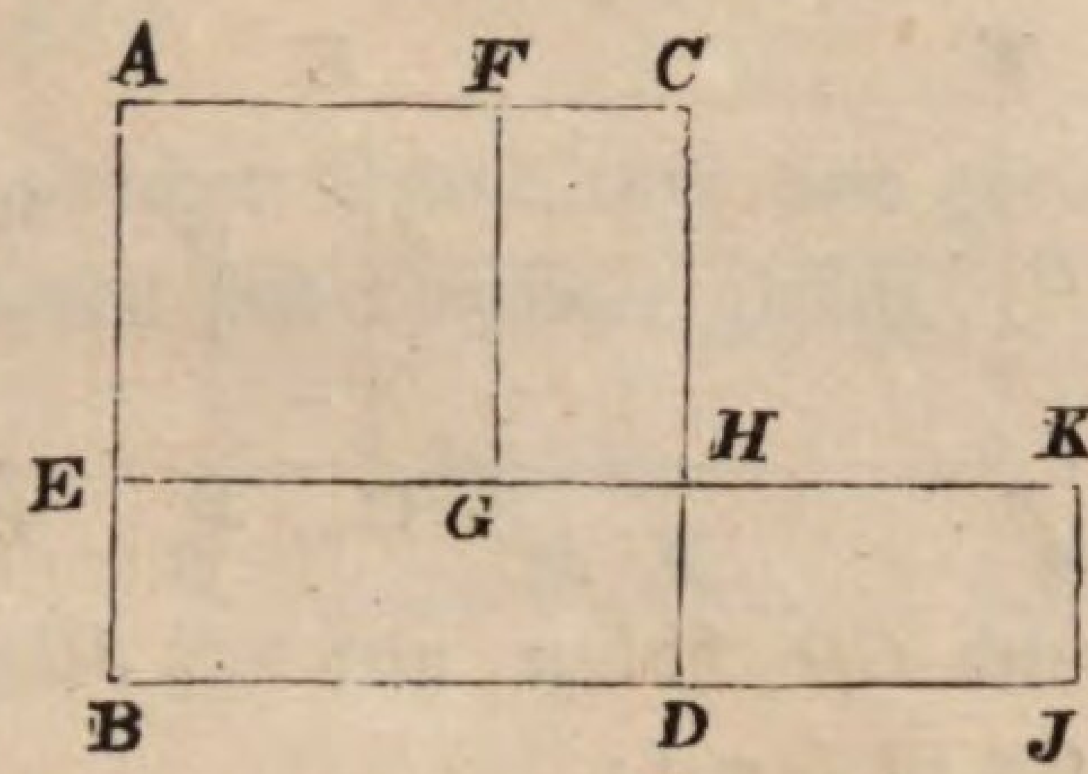
$$BC^2 \text{ oder } (BA - AC)^2 = BA^2 + AC^2 - 2BA.AC.$$

Zusatz. Die Summe der Quadrate zweier Linien ist stets größer, als das doppelte Rechteck aus ihnen.

7. **Satz. Der Unterschied der Quadrate zweier Linien ist dem Rechtecke aus der Summe und der Differenz derselben gleich.**

Beweis. Legt man die beiden Quadrate $ABDC$ und $AEGF$ so in einander, daß sie mit einer Ecke zusammen fallen, so ist der Unterschied derselben gleich dem Sechsecke $EBDCFG$. Dieses Sechseck läßt sich nun

Fig. 99.



leicht in ein Rechteck verwandeln. Verlängert man nämlich EG bis zum Durchschnitte H mit CD, so läßt sich das Rechteck $CHGF$, welches mit dem Rechtecke $HDBE$, wie sich leicht zeigen läßt, gleiche Höhe hat, an dieses Rechteck legen, so daß $KD \simeq CG$. Von dem ganzen Rechtecke KB läßt sich nun leicht nachweisen, daß die eine Seite BJ gleich der Summe der beiden Linien EA und AB, und die andere Seite BE gleich der Differenz derselben Linien ist. Es ist somit:

$$BA^2 - AE^2 = (BA + AE)(BA - AE).$$

Zusatz. Umgekehrt läßt sich jedes Rechteck in die Differenz zweier Quadrate verwandeln.

Bemerkung. Die vorstehenden Sätze 4—7 entsprechen den bekannten algebraischen Formeln $ab \pm ac = a(b \pm c)$, $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$, und $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Der Grund der Analogie liegt in dem vorausgegangenen Satze 3, und man hätte sich auf diesen Satz berufen können, um aus jenen algebraischen Formeln die entsprechenden geometrischen Wahrheiten unmittelbar abzuleiten. Es ist jedoch vorzuziehen, sie, wie oben geschehen ist, durch Construction zu beweisen, theils der größeren Anschaulichkeit wegen, theils um der Geometrie ihre Selbstständigkeit zu bewahren. Ueberhaupt kann jede algebraische Verwandlungsformel, deren Glieder nur zwei Linien vorstellende Factoren haben (von der zweiten Dimension sind), dem dritten Satze gemäß geometrisch gedeutet werden. Unter anderen verdienen folgende Formeln besondere Beachtung:

1) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$,
2) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$;
3) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$,

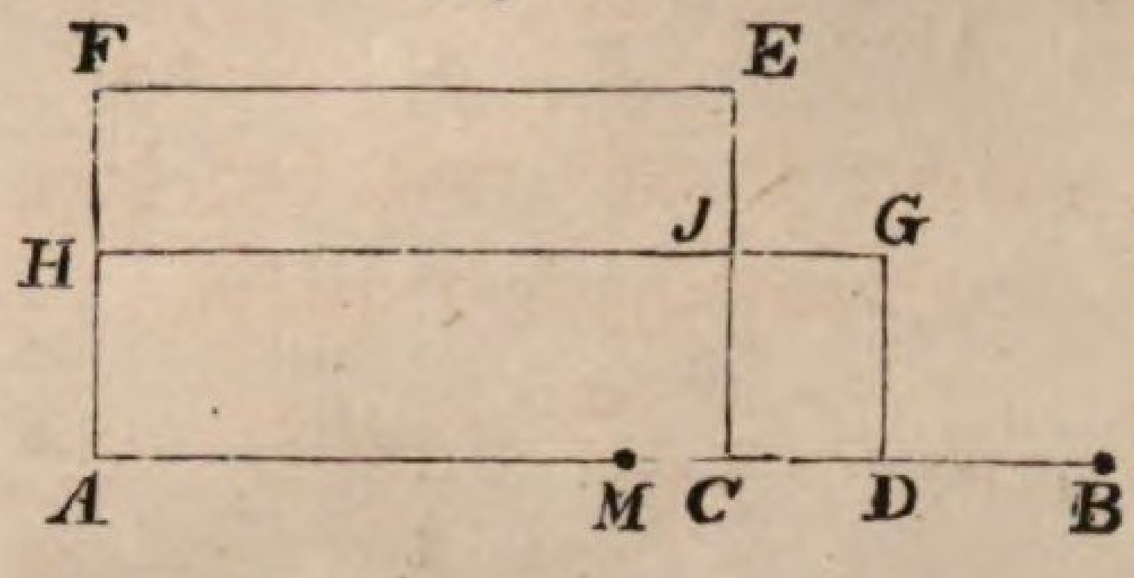
deren geometrische Deutung lautet: 1) Das Quadrat über der Summe zweier Linien nebst dem Quadrate über der Differenz derselben ist der doppelten Summe der Quadrate der Linien gleich; 2) das Quadrat über der Summe zweier Linien vermindert um das Quadrat über der Differenz der Linien, ist dem vierfachen Rechtecke der Linien gleich; 3) das Quadrat über der Summe dreier Linien ist der Summe der Quadrate über den Linien nebst den doppelten Rechtecken aus je zweien derselben gleich.

8. Satz. Ist eine gerade Linie in zwei ungleiche Stücke getheilt, so ist das Rechteck aus ihnen um so größer, je näher der Theilungspunkt der Mitte liegt.

Ist M die Mitte der Linie AB, so ist $AC \cdot CB > AD \cdot DB$.

Beweis. Es sei das Rechteck $ACEF = AC \cdot CB$, und $ADGH =$

Fig. 100.



$AD \cdot DB$, wo also $CE = CB$, $DG = DB$. Die beiden Rechtecke AE und AG haben das Rechteck AJ gemeinschaftlich. Es läßt sich aber leicht nachweisen, daß die beiden nicht gemeinschaftlichen Rechtecke FJ und DJ gleiche Höhen, JE und CD, haben, und daß $JH > JC$, also auch Rechteck $FJ > JD$ sei. Es ist somit:

$$FC > HD, \text{ d. i. } AC \cdot CB > AD \cdot DB.$$

Zusatz. Unter allen Rechtecken, die sich aus zwei Theilen einer geraden Linie bilden lassen, ist das Quadrat der Hälfte am größten.

Beweis leicht mit Hülfe des Hauptsatzes zu führen.

Zweiter Abschnitt.

Sätze über Gleichheit der Parallelogramme, Dreiecke und Trapeze.

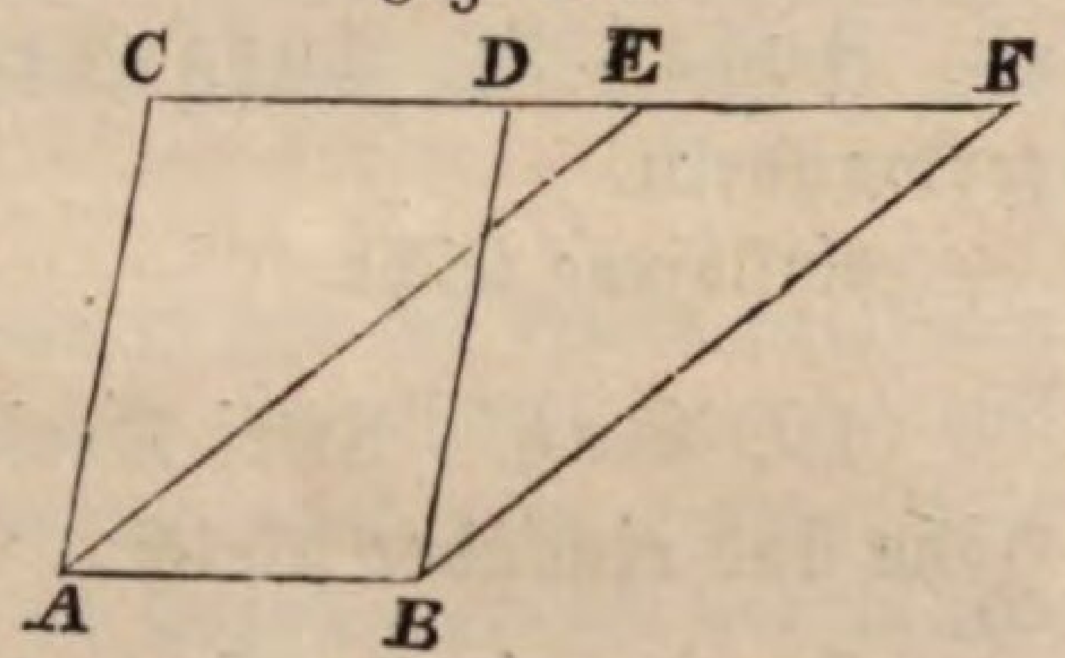
9. Erklärungen. a) Unter Höhe eines Parallelogramms versteht man den senkrechten Abstand zweier gegenüber stehenden Seiten. Jede von diesen wird in Beziehung zur Höhe Grundlinie genannt. b) Unter Höhe eines Dreiecks versteht man die von einer Spitze auf die gegenüber stehende Seite oder ihre Verlängerung gefällte Senkrechte, oder allgemeiner, den senkrechten Abstand einer Seite des Dreiecks von der durch die Gegenecke damit gezogenen Parallelen. Diese Seite selbst erhält wieder in Beziehung auf die Höhe den Namen Grundlinie. Jedes Dreieck hat demnach drei Höhen-Perpendikel. c) Unter Höhe eines Paralleltrapezes endlich versteht man den senkrechten Abstand der beiden parallelen Seiten, welche beide Grundlinien genannt werden.

Zusatz. Haben Parallelogramme, Dreiecke oder Paralleltrapeze gleiche Höhen, liegen ihre Grundlinien in einer und derselben geraden Linie und befinden sich jene Figuren auf einerlei Seite derselben, so liegen die Parallelogramme, Dreiecke oder Paralleltrapeze mit den gegenüber liegenden Ecken und Seiten in einer Parallelen mit jener geraden Linie, daher zwischen zwei Parallelen, und umge-

kehrt: Liegen zwei der genannten Figuren zwischen einem Paar Parallellinien, so haben sie gleiche Höhen.

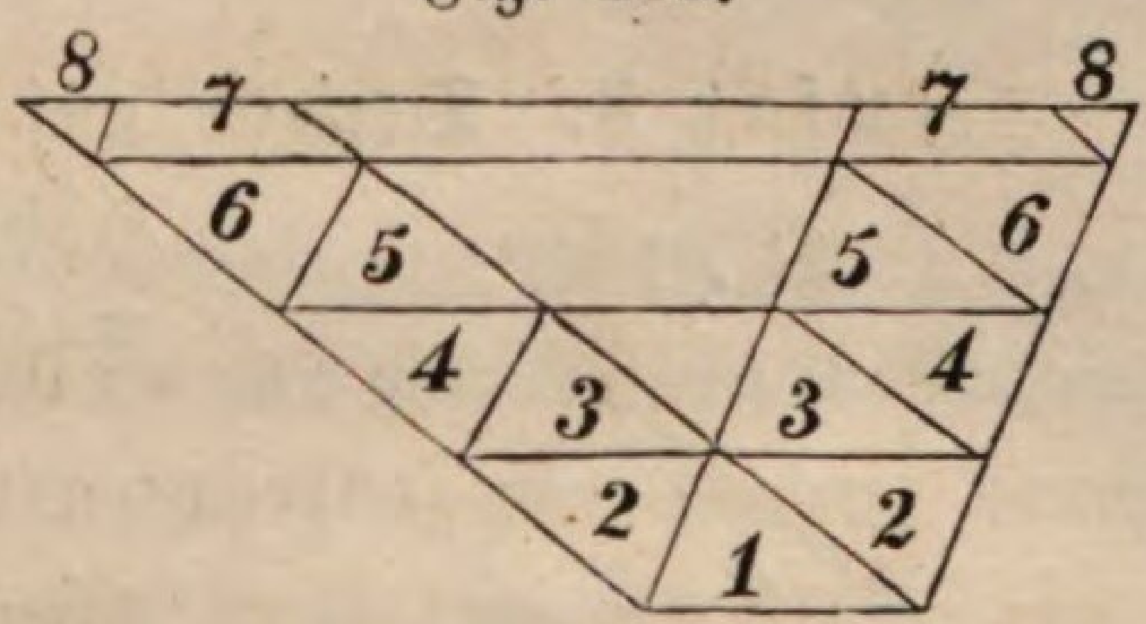
10. Satz. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe oder zwischen denselben Parallelen sind einander gleich.

Fig. 101.



Beweis. Da die beiden Parallelogramme gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, so können sie immer so auf einander gelegt werden, daß sie eine gemeinschaftliche Grundlinie erhalten und zwischen denselben Parallelen liegen. Es seien *AD* und *AF* solche Parallelogramme. Wie sich leicht nachweisen läßt, sind die beiden Dreiecke *CAE* und *DBF* einander congruent. Zieht man nun von dem ganzen Paralleltrapeze *ABFC* einmal das △ *ACE*, dann das diesem gleiche △ *BDF* ab, so bleibt im ersten Falle das Parallelogramm *ABFE*, im anderen das Parallelogramm *ABDC* übrig; es ist also *ABFE* = *ABDC*.

Fig. 102.



Bemerkung. Parallelogramme von gleicher Grundline und Höhe lassen sich auch, wie nebenstehende Figur zeigt, in eine gleiche Anzahl congruenter Stücke zerlegen. Die Ausführung möge dem Schüler überlassen bleiben.

Zusatz 1. Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Beweis leicht.

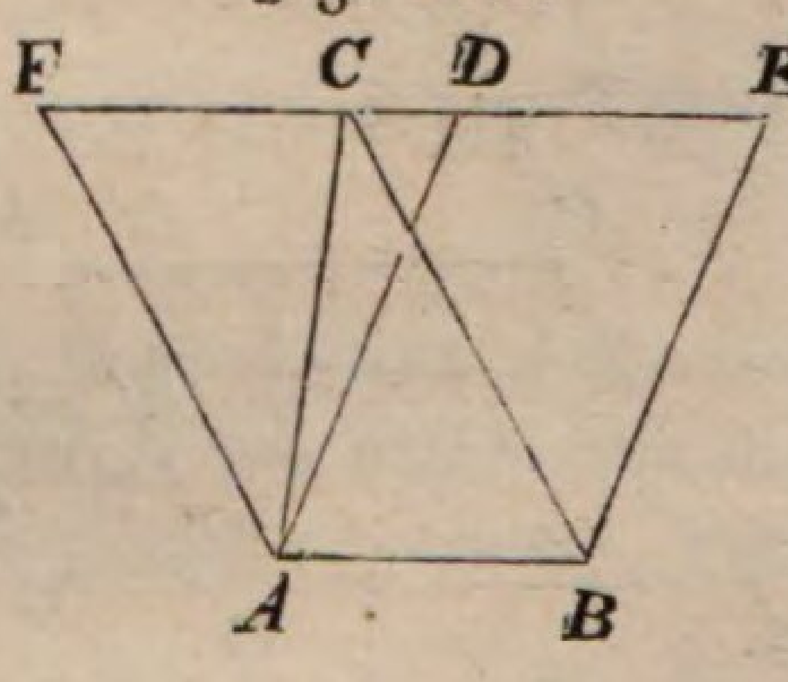
Zusatz 2. Gleiche Parallelogramme von gleicher Grundlinie haben gleiche Höhen.

Zusatz 3. Gleiche Parallelogramme von gleicher Höhe haben gleiche Grundlinien.

Die Beweise für diese beiden letzten Zusätze sind indirect zu führen.

11. Satz. Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Fig. 103.



Beweis. Hat das Dreieck *ABC* mit dem Parallelogramm *ABED* dieselbe Grundlinie *AB* und gleiche Höhe, so liegt die Spitze in der Linie *DE* oder deren Verlängerung. Ergänzt

man das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm $ABCF$, so ist $\triangle\ ABC = \frac{1}{2}\ ABCF$, $ABCF = ABED$, mithin auch $\triangle\ ABC = \frac{1}{2}\ ABED$.

Zusatz 1. Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich der Hälfte des Productes aus Grundlinie und Höhe.

Beweis leicht.

Zusatz 2. Aufgabe. Ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Auflösung leicht.

12. Satz. **Zwei Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind einander gleich.**

Der Beweis stützt sich auf Satz 11.

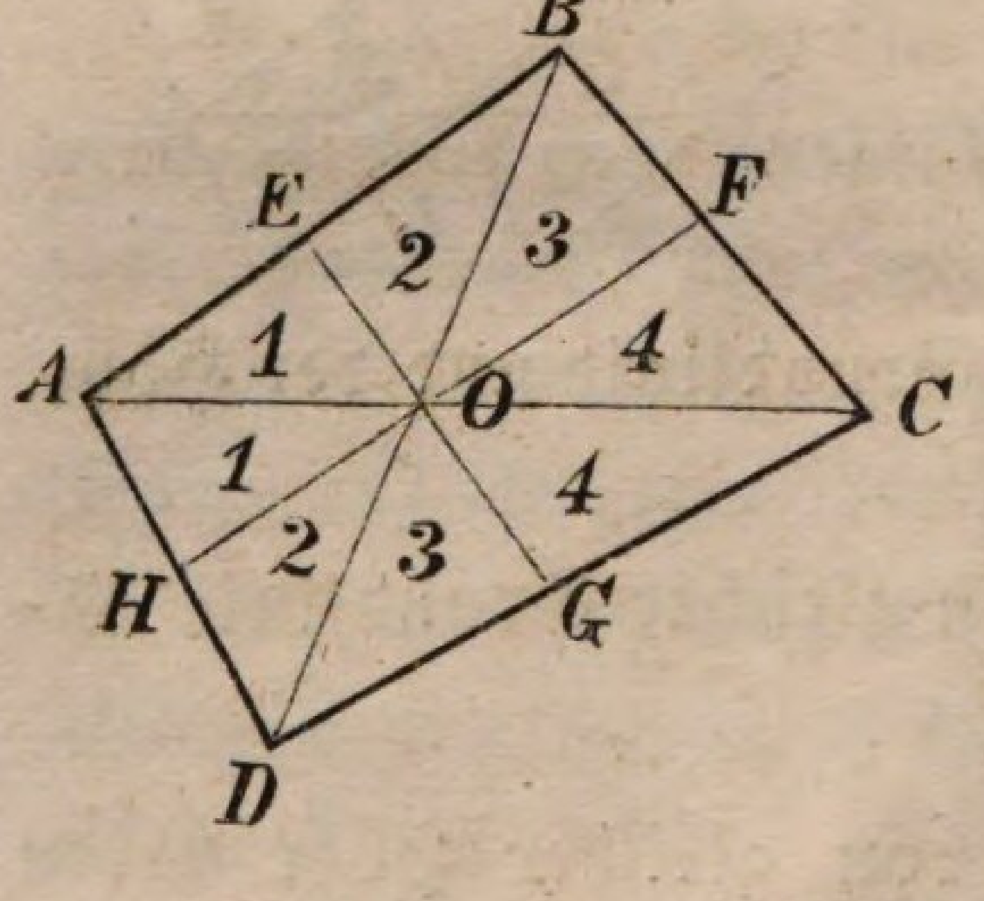
Zusatz 1. Haben zwei gleiche Dreiecke gleiche Grundlinien, so haben sie auch gleiche Höhen.

Zusatz 2. Haben zwei gleiche Dreiecke gleiche Höhen, so haben sie auch gleiche Grundlinien.

Beweise indirect.

Zusatz 3. Dreiecke auf derselben Grundlinie und von gleicher Höhe lassen sich in 4 paarweise congruente Stücke zerlegen.

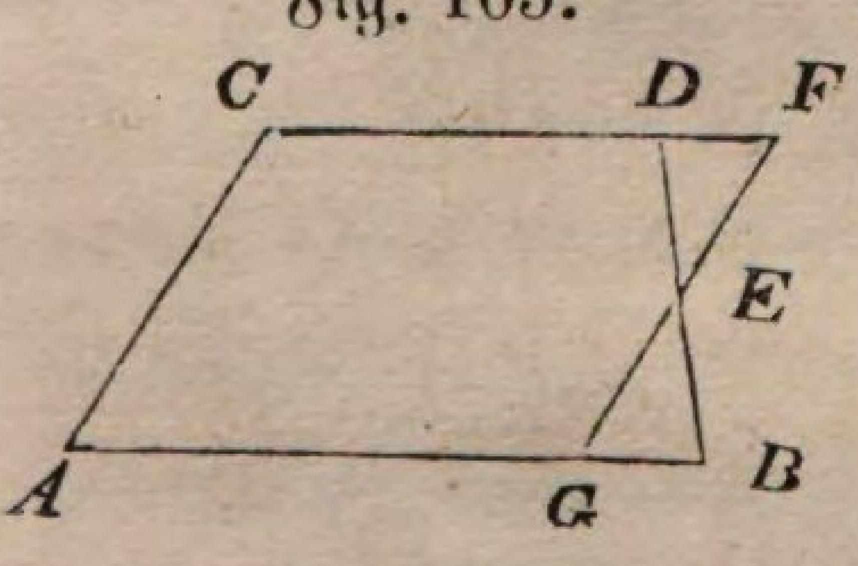
Fig. 104.



Beweis. Die Dreiecke seien ABC, ADC. Zieht man BD, so ist wegen der gleichen Höhen $BO = OD$. Sind ferner E, F, G, H die Mitten der Seiten AB, BC, CD, DA, so ist $OE \parallel AD$, $OF \parallel DC$, $OG \parallel BC$, $OH \parallel AB$, daher $\triangle\ AEO \cong OHA$, $OEB \cong OHD$ u. s. w.

13. Satz. **Ein Paralleltrapez ist einem Parallelogramm von derselben Höhe gleich, dessen Grundlinie der halben Summe der beiden parallelen Seiten des Trapezes gleich ist.**

Fig. 105.



Beweis. $ABDC$ sei ein Paralleltrapez. Verlängert man die kleinere der Parallelseiten und zieht man durch den Halbirungspunkt E einer der nicht parallelen Seiten DB eine Parallele FG mit der anderen AC, so ist $\triangle\ GEB \cong \triangle\ DEF$. Addirt man nun zu der Figur

CDEGA die beiden gleichen Dreiecke *GEB* und *DEF*, so ist das Paralleltrapez *ABDC* gleich dem Parallelogramme *AGFC*. Aus der Congruenz der Dreiecke *GEB* und *DEF* folgt $GB = FD$, und hieraus ergiebt sich $AB + CD = AG + CF = 2AG$; mithin $AG = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Das Paralleltrapez *ABDC* ist also ebenso groß als das Parallelogramm *AGFC*, dessen Grundlinie *AG* gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten *AB* und *CD*, und dessen Höhe gleich ist der Höhe des Paralleltrapezes.

Andere Beweise ergeben sich, wenn man 1) jede der beiden parallelen Seiten um die andere verlängert und die Endpunkte der Verlängerungen mit einander verbindet; 2) wenn man das Paralleltrapez durch eine Diagonale in zwei Dreiecke theilt; 3) wenn man dasselbe in ein Parallelogramm und in ein Dreieck theilt. — Die Ausführung bleibt den Schülern zur Uebung überlassen.

Zusatz 1. Zwei Paralleltrapeze von gleicher Höhe und gleicher Summe der parallelen Seiten sind einander gleich.

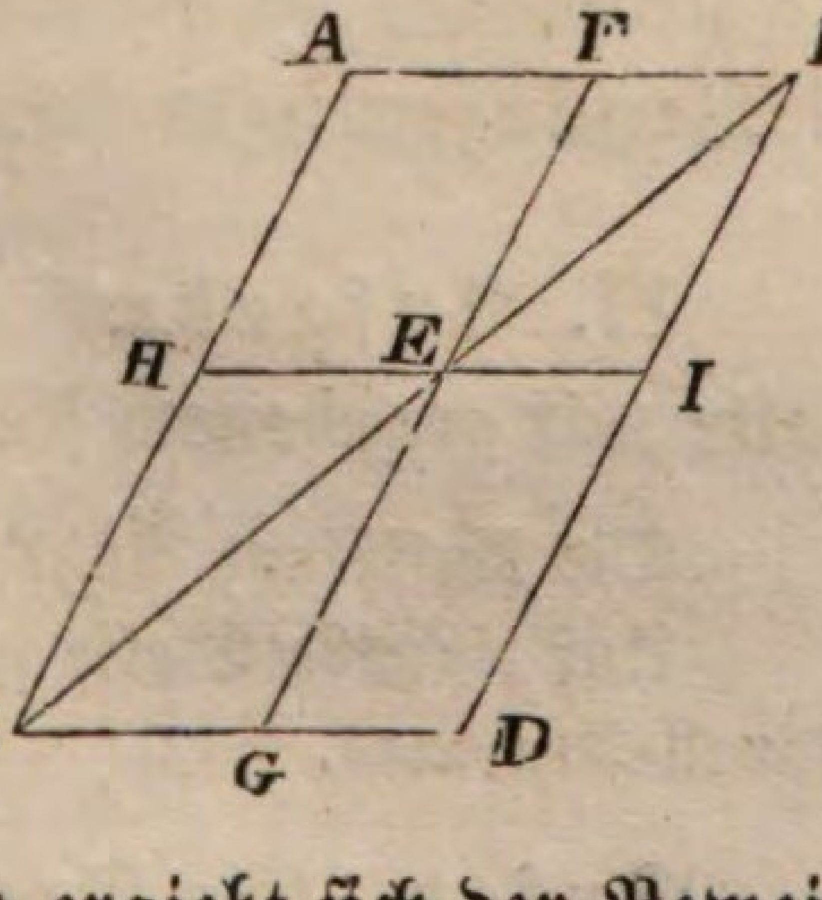
Zusatz 2. Der Inhalt eines Paralleltrapezes ist gleich dem Producte aus der Höhe und der halben Summe der parallelen Seiten.

Die Beweise leicht.

14. Satz. **Zieht man durch einen beliebigen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms Parallellinien mit den Seiten desselben, so entstehen vier Parallelogramme. Diejenigen von diesen, durch welche die Diagonale nicht geht, sind einander gleich.**

Durch den Punkt *E* der Diagonale *BC* des Parallelogramms *ABDC* seien mit den Seiten *AB* und *AC* die Parallelen *FG* und *HJ* gezogen. Es ist zu zeigen, daß $AE = ED$.

Fig. 106.



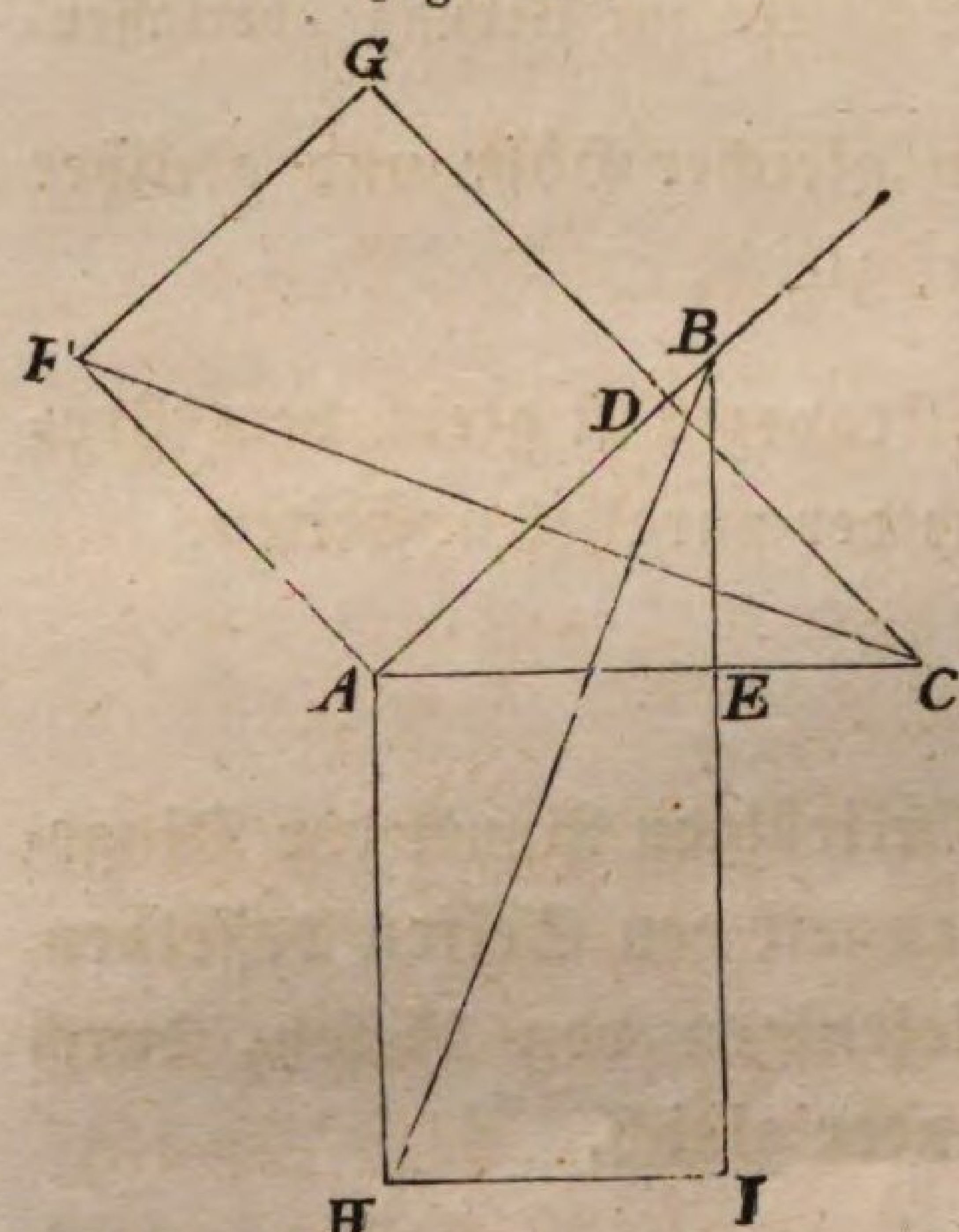
Beweis. Betrachtet man das Parallelogramm *AE* als die Differenz des Dreiecks *BAC* und der Dreiecke *BFE* und *EHC*, und das Parallelogramm *ED* als die Differenz des Dreiecks *BCD* und der Dreiecke *BEJ* und *GEC*, so ergiebt sich der Beweis sehr leicht.

Bemerkung. Euklid bezeichnet die beiden in Rede stehenden Parallelogramme als Ergänzungen der beiden übrigen. Außer den beiden Parallelogrammen *AE* und *ED* giebt es noch zwei Paar gleiche Parallelogramme, nämlich ***AG*** und ***HD***, so wie ***HB*** und ***BG***.

15. Erklärung. Fällt man von den Endpunkten einer geraden Linie Perpendikel auf eine andere, so wird das durch die Perpendikel begränzte Stück dieser anderen Linie Projection der ersten Linie genannt. Liegt ein Endpunkt der ersten Linie in der zweiten, so ist die Projection der Abstand jenes Punktes vom Perpendikel des zweiten Endpunktes.

16. Satz. **Projicirt man die begränzten Schenkel eines Winkels jeden auf den anderen, so sind die Rechtecke, die aus je einem der Schenkel und der Projection des anderen gebildet werden, einander gleich.**

Fig. 107.



AE und AD seien die Projectionen der Schenkel AB und AC des Winkels BAC. Es ist alsdann zu zeigen, daß $DA \cdot AB = EA \cdot AC$.

Beweis. Man errichte auf AD das Rechteck $AG = AB \cdot AD$, und auf AE das Rechteck $AJ = AE \cdot AC$. Verbindet man F mit C, und B mit H, so ist $\triangle FAC \cong \triangle BAH$; es ist nämlich $AF = AB$, $AC = AH$, $\sphericalangle FAC = R + BAC = \sphericalangle BAH$. Da $\triangle FAC = \frac{1}{2} AG$, $\triangle BAH = \frac{1}{2} AJ$, so ist $AG = AJ$.

Bemerkung. Ist der Winkel BAC ein stumpfer, so fallen die Projectionen der Schenkel AB und AC auf die Verlängerungen von AC und AB. Der Beweis ist übrigens derselbe.

17. Aufgabe. **Ein Dreieck in ein anderes von demselben Inhalte mit gegebenem Winkel an der Grundlinie zu verwandeln.**

Die Auflösung stützt sich auf Satz 12.

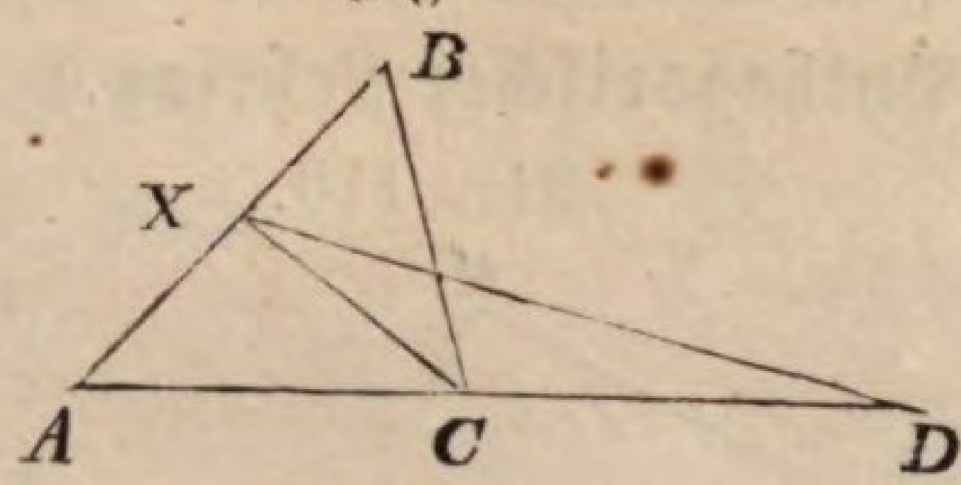
Auf dieselbe Weise geschieht die Verwandlung des Parallelogramms oder Paralleltrapezes.

Zusatz. Ein Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln.

18. Aufgabe. **Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, von welchem eine Seite gegeben ist.**

Es soll das $\triangle ABC$ in ein anderes verwandelt werden, von welchem die Seite AD gegeben ist.

Fig. 108.

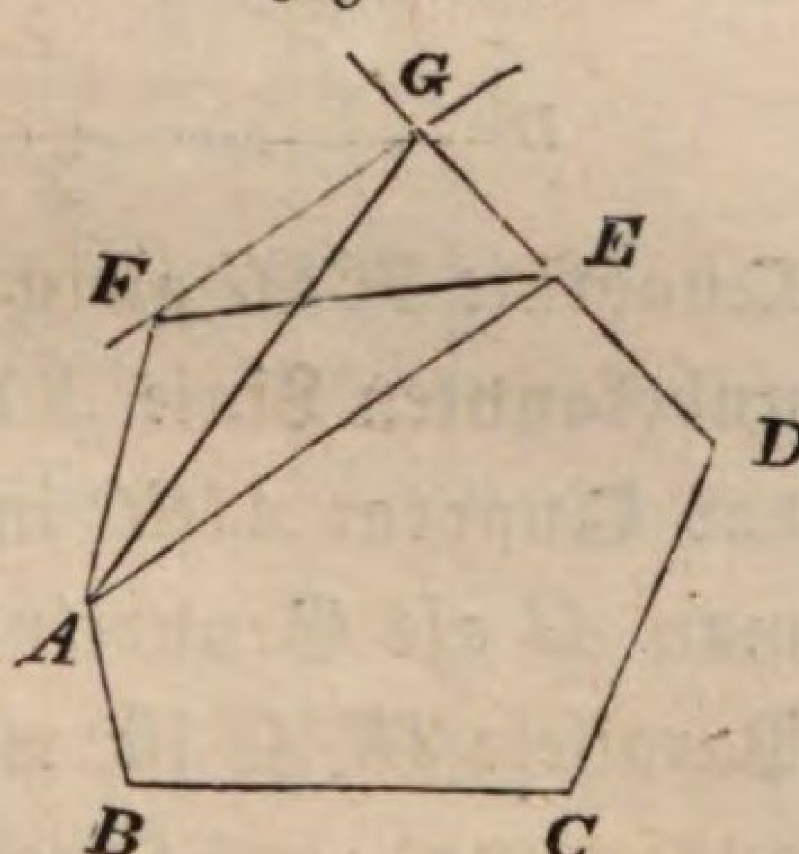


Analysis. Es sei ADX das verlangte Dreieck, also $AXD = ABC$. Verbindet man X mit C, so wird offenbar $XCD = XCB$; es liegen also die beiden Dreiecke XCB und XCD zwischen denselben Parallelen (II. 10). Die Construction ergiebt sich hiernach leicht.

Zusatz. Ein Parallelogramm in ein anderes von gegebener Seite zu verwandeln.

19. Aufgabe. **Ein gegebenes Polygon 1) in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat, 2) in ein Dreieck oder Rechteck zu verwandeln.**

Fig. 109.



Auflösung. $ABCDEF$ sei das gegebene Polygon. Man ziehe die Diagonale AE, wodurch das Sechseck $ABCDEF$ in ein Fünfeck und in ein Dreieck zerlegt wird und suche nun nach Aufgabe 17 das $\triangle$ AFE in ein anderes zu verwandeln, dessen Winkel an dem Punkte E der Grundlinie AE Nebenwinkel zu dem Winkel AED wird. Zu dem Zwecke verlängere man DE über E hinaus, ziehe durch F mit AE eine Parallele und verbinde den Durchschnitt G dieser Parallelen und der verlängerten DE mit dem Punkte A, so ist offenbar das Fünfeck $ABCDG$ dem Sechsecke $ABCDEF$ gleich, und es ist somit der Aufgabe Genüge geleistet.

Auf dieselbe Weise wird das Fünfeck $ABCDG$ in ein Viereck, und dieses in ein Dreieck verwandelt. Das Dreieck aber läßt sich nach Aufgabe 17 in ein Rechteck verwandeln.

20. Aufgabe. **Ein Parallelogramm, Dreieck oder Paralleltrapez in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.**

Die Auflösung leicht mit Anwendung der Sätze 10, 12 u. 13, Zus. 1.

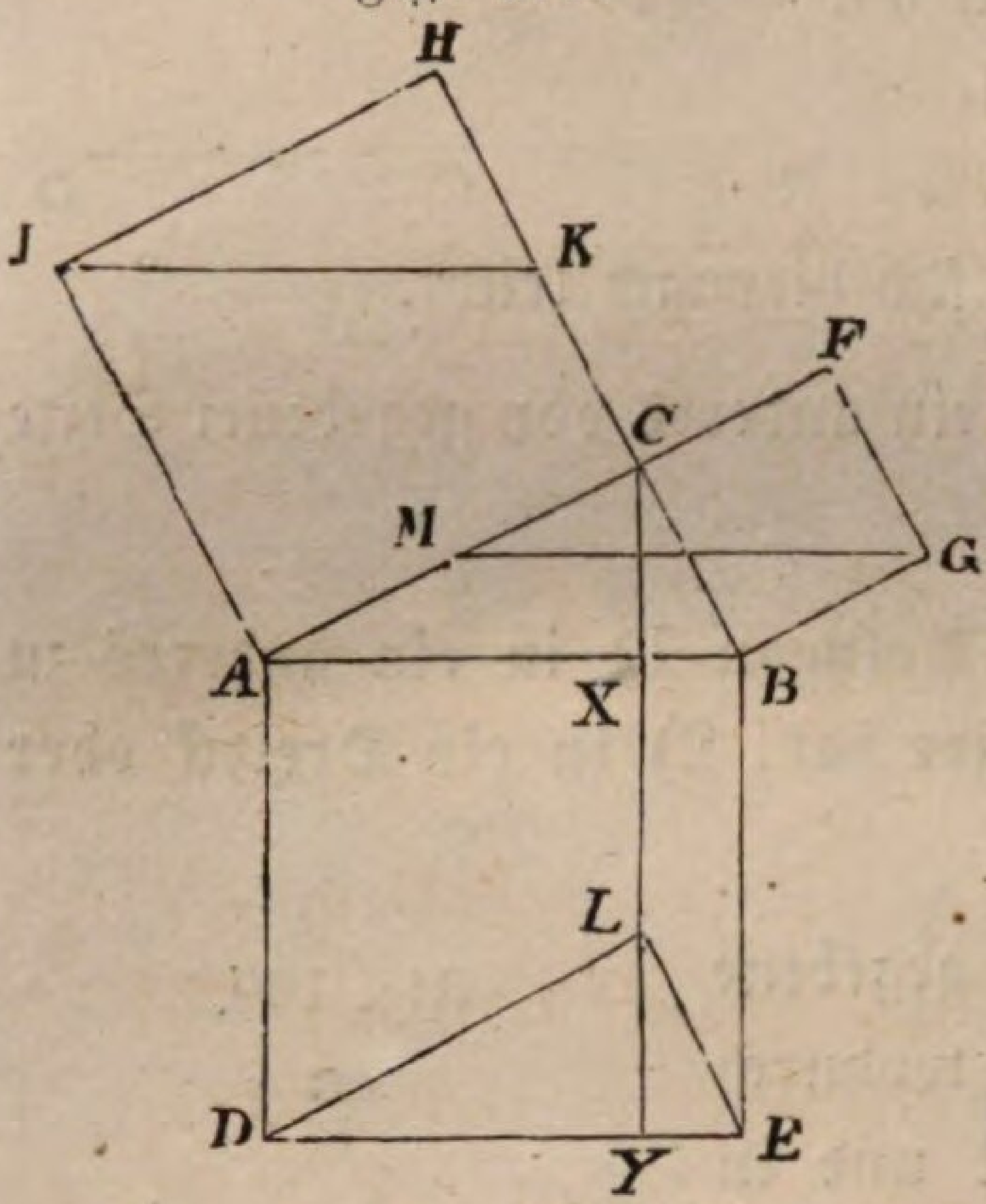
Dritter Abschnitt.

Vergleichung der Quadrate über den Seiten eines Dreiecks.

21. Satz. **Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinke-**

ligen Dreiecks ist der Summe der Quadrate über den Katheten gleich. (Pythagorischer Lehrsatz.)

Fig. 110.



Es soll bewiesen werden, daß das Quadrat $ABED$ über der Hypotenuse AB des rechtwinkeligen Dreiecks ABC der Summe der Quadrate AH und CG über den Katheten AC und BC gleich sei, oder daß: $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

1. Beweis. Da $AC < AB$, so ist $ACHJ < ABED$; es muß sich also von $ABED$ ein Rechteck, etwa $AXYD$ abschneiden lassen, welches dem Quadrate $ACHJ$ gleich ist, wobei alsdann nur noch zu beweisen bleibt, daß das übrig bleibende Rechteck $XBEY$ dem Quadrate $BCFG$ gleich ist. Zunächst kommt es darauf an, die Lage der unbekannten Linie XY zu bestimmen. Man verwandle zu dem Zwecke das Quadrat $AJHC$ in ein Rechteck, dessen Seite gleich AD. Betrachtet man AJ als Grundlinie des Quadrats und zieht durch J mit AB eine Parallele JK, so ist, weil HCB eine gerade Linie ist (Folge der Voraussetzung), das Quadrat $JACH$ dem schiefwinkeligen Parallelogramme $AJKB$ gleich, und es hat dieses Parallelogramm die verlangte Grundlinie $AB = AD$. Construirt man nun auf der Seite AD als Grundlinie ein dem Parallelogramme $AJKB$ congruentes Parallelogramm, indem man nur $CL \parallel AD$, $DL \parallel AC$ zieht, so wird die Linie CL durch den Durchschnitt mit der Linie AB, und in der Verlängerung durch den Durchschnitt mit der Linie DE die Punkte X und Y der verlangten Linie bestimmen. Die Congruenz der Parallelogramme AL und AK ergiebt sich aber leicht, indem 1) $AD = AB$, 2) $AC = AJ$, 3) $\sphericalangle DAC = R + \sphericalangle CAB = \sphericalangle JAB$ ist. Da nun $AJHC = AJKB$ und $AJKB \cong ACLD$, und $ACLD = AXYD$, so ist:

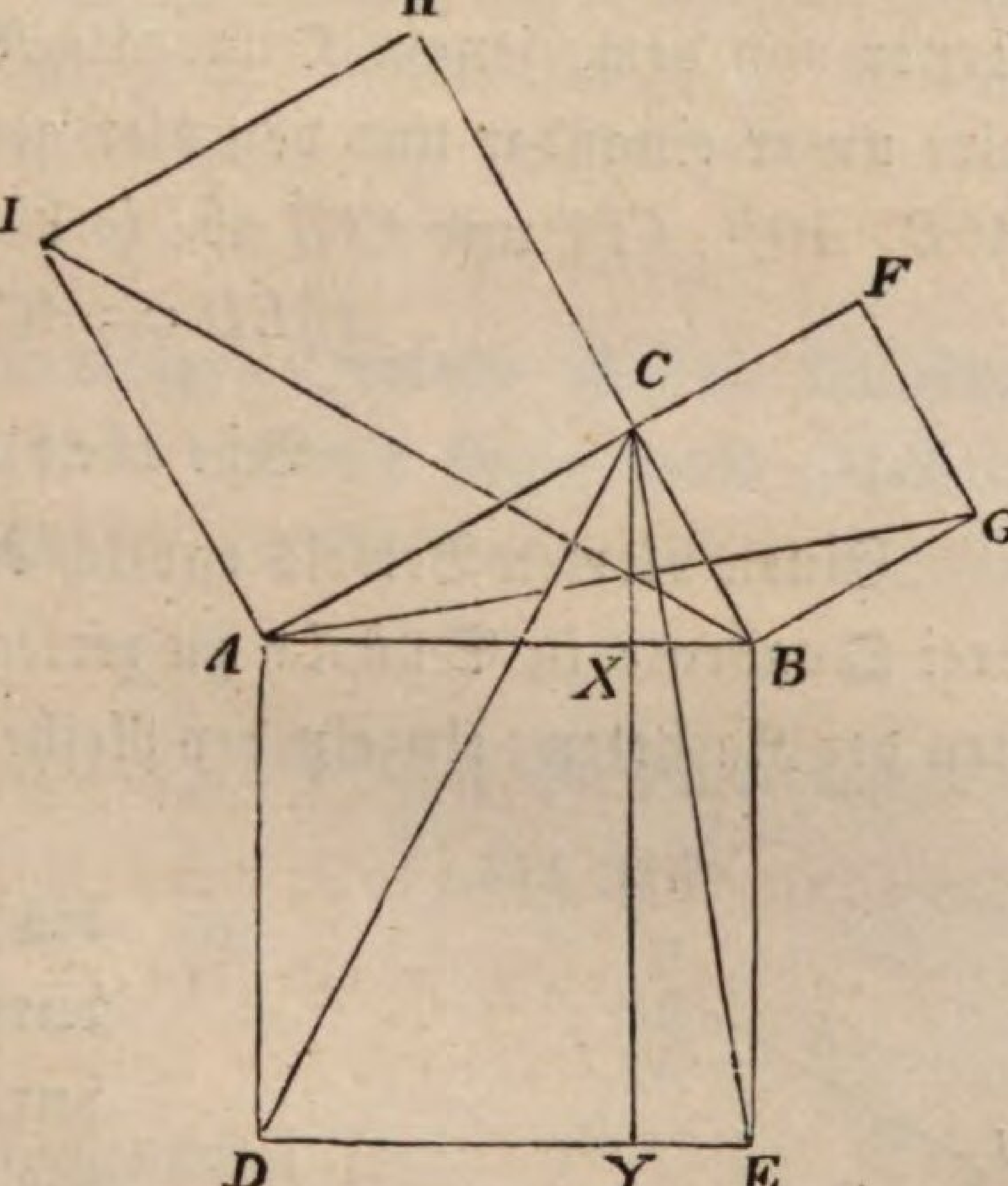
$$AXYD = AJHC.$$

Es bleibt also noch übrig, zu zeigen, daß das Quadrat $BCFG$ dem Rechtecke $BXYE$ gleich sei. Zieht man durch G mit AB die Parallele GM, so ist, weil ACF eine gerade Linie ist (Folge der Voraussetzung), $ABGM = BCFG$; ferner ist, wenn man E mit L verbindet, $ELCB$, wie sich leicht zeigen läßt, ein Parallelogramm, dem Parallelogramm $ABGM$, congruent und dem Rechtecke $BXYE$ gleich. Es ist also auch:

$$BXYE = BCFG\text{, folglich:}$$
$$BXYE + AXYD = AJHC + BCFG\text{, d. i.:}$$
$$ABED = AJHC + BCFG\text{, oder:}$$
$$AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

Zweiter Beweis.

Fig. 111.



Einen zweiten Beweis erhält man durch Zugrundelegung des Satzes 16. Fällt man nämlich von C auf AB die Senkrechte CX und verlängert dieselbe bis zum Durchschnitte Y mit der Seite DE, so ist AX die Projection von AC auf AB, und AC die Projection von AB auf AC: also:

$$AC \cdot AC = AX \cdot AB\text{, d. i.:}$$
$$ACHJ = AXYD;$$

eben so ist:

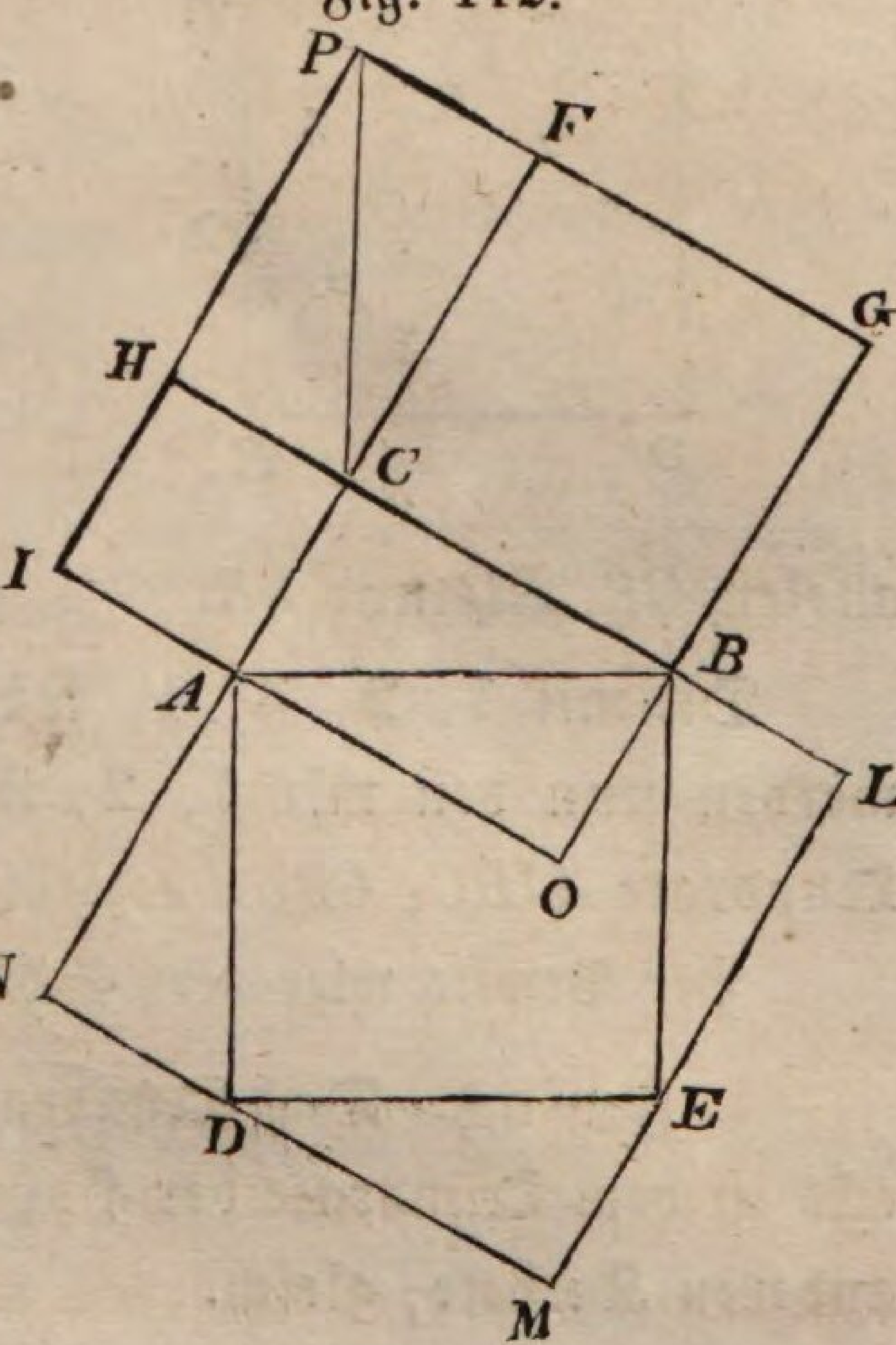
$$BC \cdot BC = BX \cdot BA\text{, oder:}$$
$$BCFG = BXYE;$$

mithin:

$$ACHJ + BCFG = AXYD + BXYE = ABED.$$

Bemerkung. Dieser Beweis, bei welchem man, wenn man den Satz 16 nicht voraussetzen will, die Hülfslinien JB, CD, AG, CE zu ziehen hat, ist unter dem Namen des Euklidischen bekannt

Fig. 112.



Dritter Beweis.

Zieht man durch E und D mit CA und CB Parallelen, welche einander in M, die verlängerten CA und CB in N und L durchschneiden, so ist $\triangle ACB \cong BLE$, denn $AB = BE$, $\measuredangle C = R = \measuredangle L$, $\measuredangle CAB = R - \measuredangle CBA = EBL$. Eben so ist $\triangle BEL \cong \triangle EMD \cong \triangle AND$. Zieht man noch CP, so ist $\triangle ABC \cong \triangle AOB \cong \triangle CPH \cong \triangle CPF$.

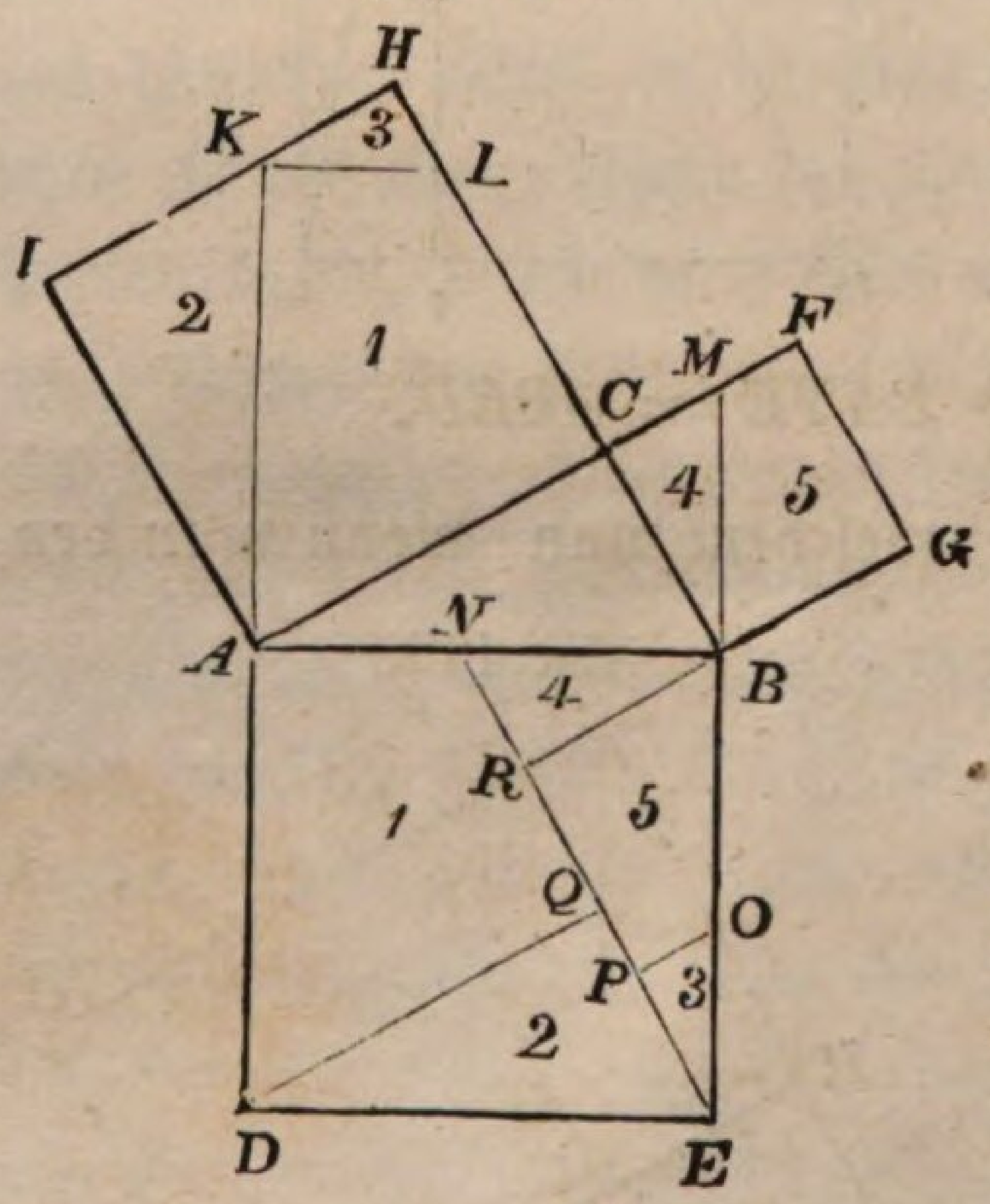
Aus der Congruenz der Dreiecke *AND*, *ACB* und *BLE* folgt $AN = CB$, $AC = BL$, mithin $NA + AC = CB + BL$; das Parallelogramm *NCLM* ist somit ein Quadrat, dessen Seite *CL* gleich der Summe der beiden Katheten $AC + CB$ ist. Eben so ist *JOGP* ein Quadrat, dessen Seite der Summe der beiden Katheten *AC* und *CB* gleich ist. Zieht man von dem Quadrate *NCLM* die vier gleich großen Dreiecke *ACB*, *BLE*, *EMD* und *AND* ab, so bleibt das Quadrat *ABED* übrig: zieht man ferner von dem, jenem Quadrate *NCLM* gleichen, Quadrate *JPGO* die vier unter einander und den vier genannten Dreiecken gleichen Dreiecke *ACB*, *AOB*, *CPF* und *CPH* ab, so bleiben *ACHJ* und *CFGB*, daher

$$ABED = ACHJ + CFGB.$$

Vierter Beweis.

Einen vierten Beweis endlich erhält man, indem man versucht, die drei Quadrate in Stücke zu zerlegen, so daß die der Hypotenuse denen der Katheten, einzeln der Reihe nach genommen, gleich sind.

Fig. 113.



Zu dem Zwecke verlängere man *DA* bis zum Durchschnitte *K* mit *HI*, ziehe durch *K* mit *AB* die Parallele *KL*, wodurch die mit 1, 2, 3 bezeichneten Stücke des Quadrats *HCAI* entstehen. Ferner verlängere man *EB* bis zum Durchschnitte *M* mit *CF*, wodurch die mit 4 und 5 bezeichneten Stücke des Quadrats *BCFG* entstehen. Um nun die diesen Stücken 1, 2, 3, 4, 5 congruenten Stücke des Quadrats *ABED* zu erhalten, ziehe man durch *E* mit *BC* die Parallele *EN*, mache ferner $BO = BM$ und ziehe durch *O*, *D* und *B* mit *CA* die Parallelen *OP*, *DQ* und *BR*.

Die mit 1, 2, 3, 4, 5 bezeichneten Stücke des Quadrats *ABED* werden nun den mit 1, 2, 3, 4, 5 bezeichneten Stücken der beiden Quadrate *AJHC*, *CBGF* beziehungsweise congruent sein.

Der Beweis wird dem Schüler überlassen.

1. Zusatz. Das Quadrat der Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist dem Quadrate der Hypotenuse, vermindert um das Quadrat der anderen Kathete, gleich.

2. Zusatz. Aus dem Beweise des pythagorischen Lehrsatzes, Seite 74 oder 75, ergiebt sich unmittelbar, daß das Quadrat über einer einzelnen Kathete gleich ist dem Rechtecke AY, d. i. dem Rechtecke aus der Hypotenuse AB und der Projection AX auf dieselbe.

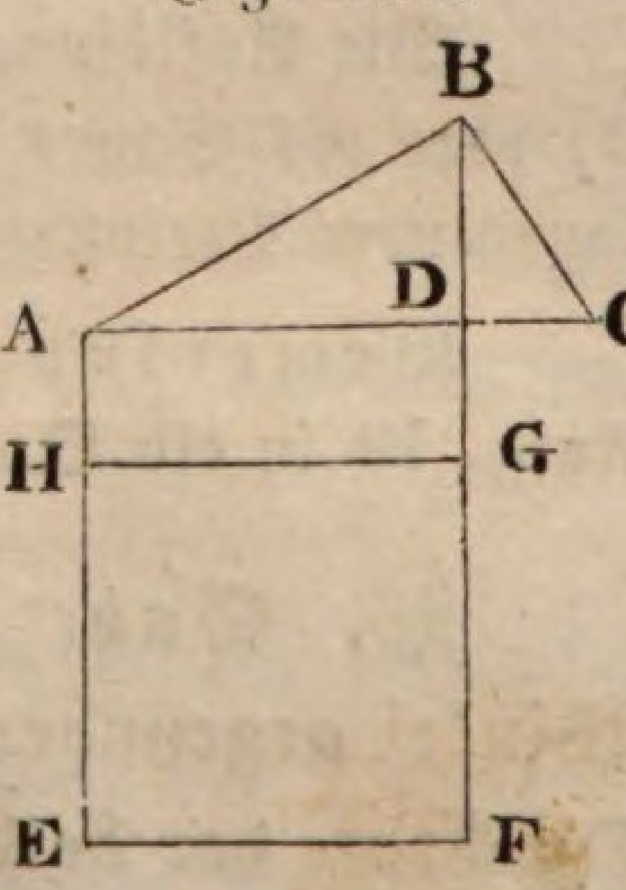
Anmerkung. Rechtwinkelige Dreiecke, deren Seiten commensurabel sind, findet man durch Aufsuchung der sogenannten pythagorischen Zahlen d. i. dreier ganzen Zahlen, so beschaffen, daß die Summe der Quadrate zweier Zahlen dem Quadrate der dritten Zahl gleich ist. Solche sind 3, 4, 5; dann 5, 12, 13; sowie 8, 15, 17 u. s. w., überhaupt alle Zahlen von der Form $a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$.

22. Satz. In jedem rechtwinkeligen Dreiecke ist das Quadrat der von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällten Senkrechten dem Rechtecke aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse gleich.

Ist ABC ein rechtwinkeliges Dreieck, BD das Perpendikel von B auf die Hypotenuse AC, so ist:

$$BD^2 = AD \cdot DC.$$

Fig. 114.



Erster Beweis.

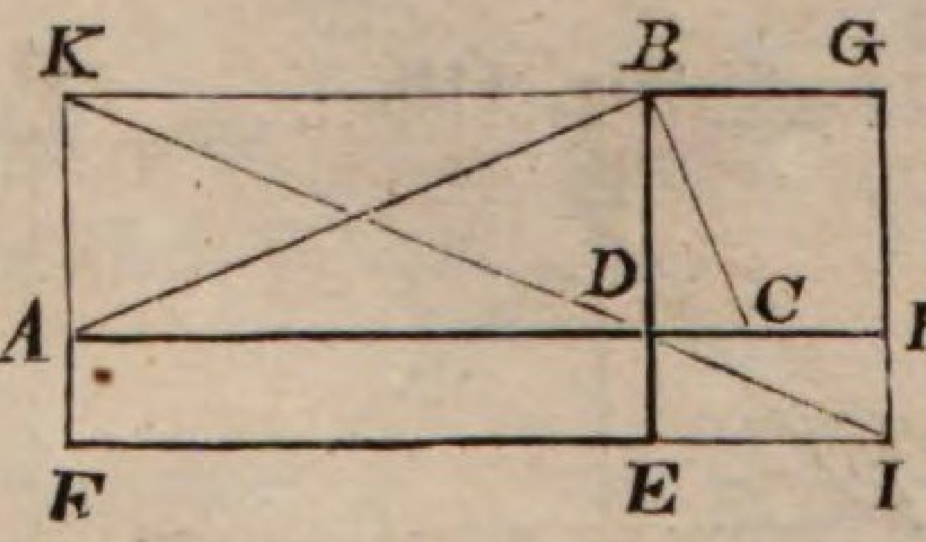
Construirt man über AD das Rechteck $DA \cdot AC$, so ist $BD^2 = BA^2 - AD^2 = ADFE - AD^2$. Macht man $DG = DC$, zieht $GH \parallel FE$, so ist, wie sich leicht zeigen läßt, $GFEH = AD^2$, mithin:

$$BD^2 = AG = AD \cdot DC.$$

Zweiter Beweis.

Man construire über DB das Quadrat $DBGH$ und über AD das Rechteck $ADEF = AD \cdot DC$. Verlängert man nun noch GB und FA bis zum Durchschnitte K, GH und FE bis zum Durchschnitte I, so läßt sich der Satz auf den Satz der Ergänzungen (14) zurückführen. Zu dem Zwecke ziehe man die Linien KD und DI, und zeige, daß $\sphericalangle KDB = EDI$, also KDE eine gerade Linie sei.

Fig. 115.



23. Aufgabe. Ein Quadrat zu construiren, welches der Summe zweier oder mehrerer Quadrate gleich ist.

Auflösung leicht.

Zusatz. Ein Quadrat zu machen, welches dem Vielfachen eines anderen Quadrates gleich ist.

Die Auflösung leicht. Wie wird die Aufgabe am einfachsten gelöst, wenn ein Quadrat gemacht werden soll, welches dem 4= oder 25fachen, oder welches dem 10=, 17=, 27=, 41fachen eines anderen Quadrates gleich sein soll?

Bemerkung. Legt man einen in der höhern Zahlenlehre bewiesenen Satz, daß eine jede Zahl sich in höchstens vier Quadratzahlen zerlegen lasse, zum Grund, so führt die Multiplication eines Quadrates auf die Summation von höchstens vier Quadraten. Die Zahl 84 z. B. ist $= 7^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2$, oder $= 9^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 8^2 + 4^2 + 2^2$; es ist also hiernach einfach ein Quadrat zu construiren, welches das 84fache eines andern Quadrates ist.

24. Aufgabe. Ein Quadrat zu machen, welches dem Unterschiede zweier anderen Quadrate gleich ist.

Die Auflösung leicht. Man erhält zwei Constructionen, je nachdem man das rechtwinkelige Dreieck entweder über der Seite des kleineren Quadrates als Kathete, oder über der Seite des größeren Quadrates als Hypotenuse beschreibt. S. Aufg. III. 36.

25. Aufgabe. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Die Auflösung geschieht entweder mit Anwendung des Satzes 21, Zusatz 2, oder des Satzes 22 dieses Capitels, und zugleich mit Anwendung des Kreissatzes vom Peripheriewinkel, der einem Rechten gleich ist.

Bemerkung. Ein jedes Polygon kann hiernach mit Anwendung von Aufg. 19 in ein Quadrat verwandelt werden.

26. Satz. Liegt in einem Dreiecke eine Seite einem spitzen Winkel gegenüber, so ist das Quadrat über ihr gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projection der anderen auf sie.

Fig. 116.

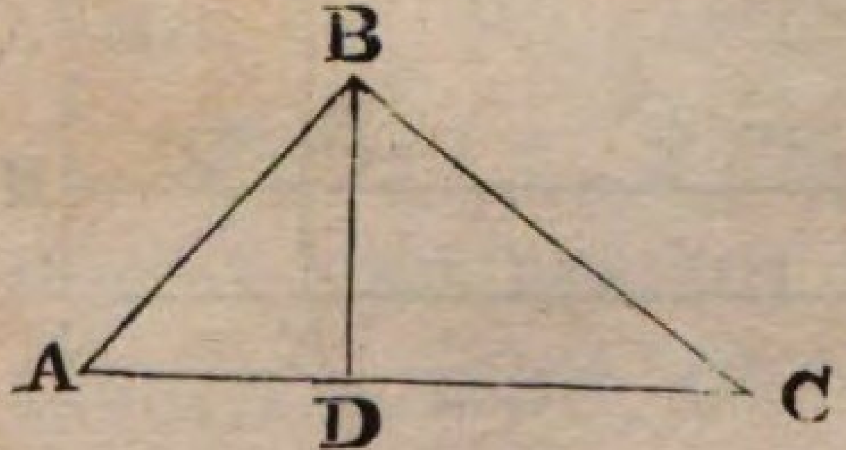
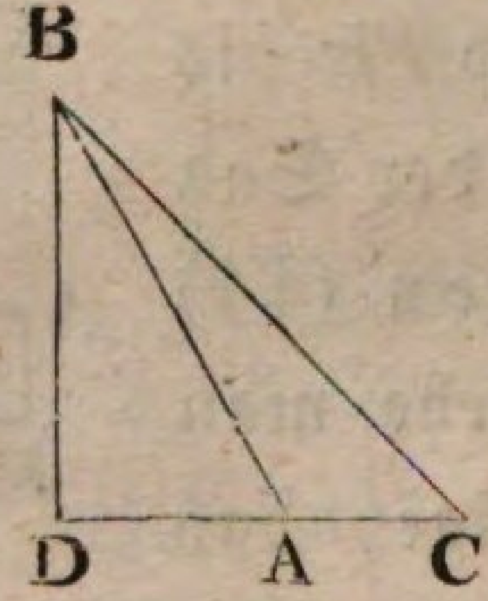


Fig. 117.



Ist C ein spitzer Winkel, und fällt man von B auf AC oder deren Verlängerung (Figur 116 u. 117) die Senkrechte BD, so ist:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CD.$$

Erster Beweis.

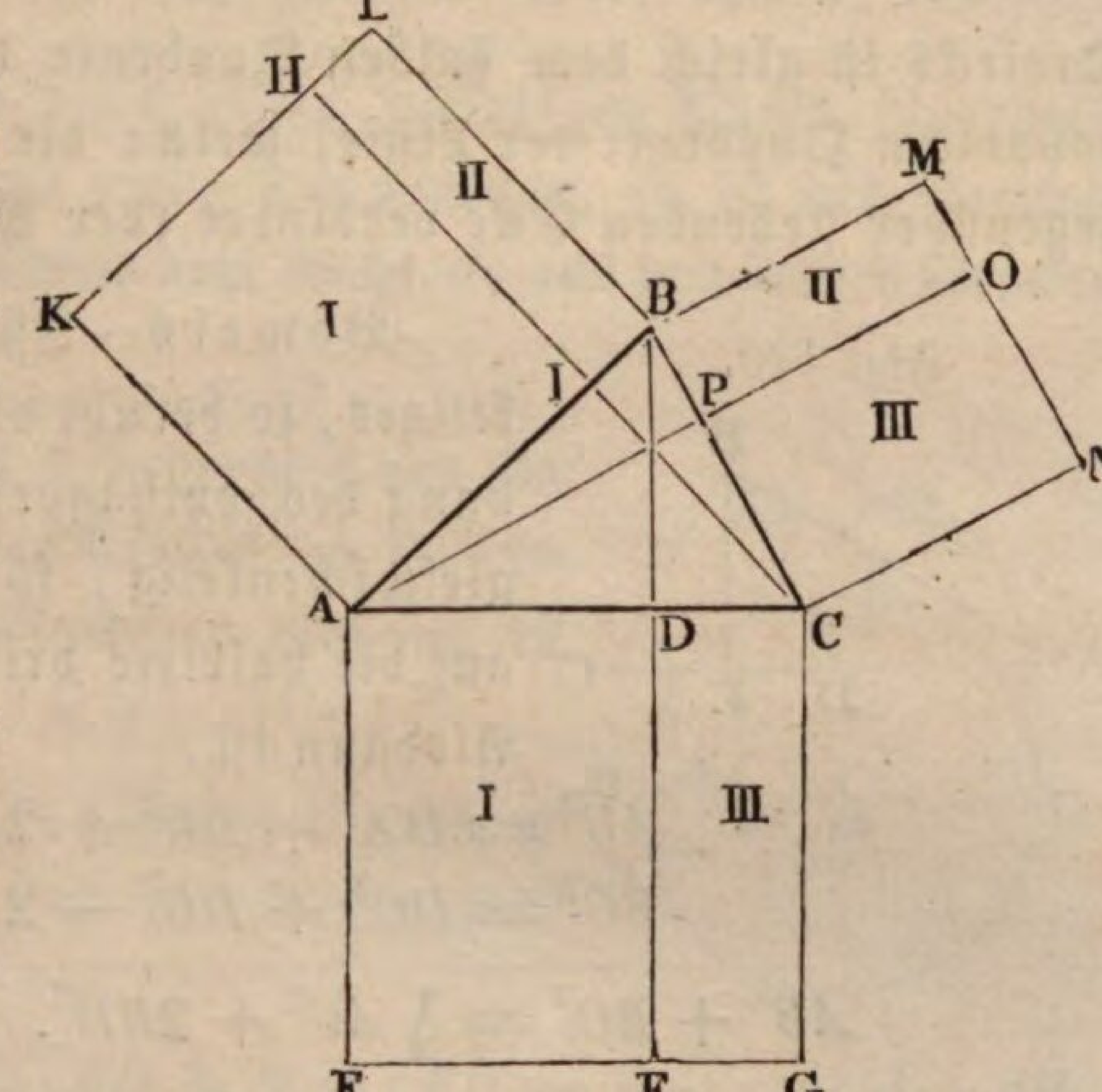
$AB^2 = BD^2 + DA^2$. Es ist aber $AD = AC - CD$ (Fig. 116) oder $DC - CA$ (Fig. 117); daher jedenfalls: $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD$; setzt man zu beiden Seiten DB^2 hinzu, so ist:

$$AD^2 + DB^2 = CA^2 + (CD^2 + DB^2) - 2CA \cdot CD, \text{ d. i:}$$
$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CD\text{*)}.$$

Zweiter Beweis.

Errichtet man auf den drei Seiten des Dreiecks ABC Quadrate AL, BN, CE, fällt von den drei Spitzen A, B, C auf die gegenüber stehenden Seiten die Senkrechten AP, BD, CJ, und verlängert dieselben bis zu den gegenüber liegenden Seiten der Quadrate, so ist:

Fig. 118.



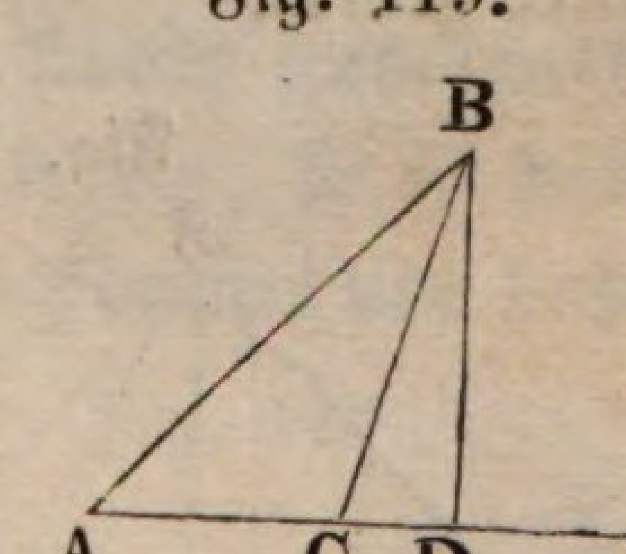
1) $AH = AF$, 2) $BH = BO$, 3) $CO = CF$ (S. 16); es ist also $AB^2 = AH + HB = AC^2 + CB^2 - (CO + CF)$, d. i.:

$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CD$, oder $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2BC \cdot CP$.

Auf ähnliche Art läßt sich der Satz beweisen, wenn, wie oben Figur 2, der Winkel BAC ein stumpfer Winkel ist. Die Ausführung möge dem Schüler überlassen bleiben.

27. **Satz. Liegt in einem Dreiecke eine Seite einem stumpfen Winkel gegenüber, so ist ihr Quadrat gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten vermehrt um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projection der anderen auf sie.**

Fig. 119.



Ist ACB ein stumpfer Winkel, und BD eine Senkrechte von B auf die verlängerte AC, so ist:

$$AB^2 = CB^2 + CA^2 + 2CA \cdot CD\text{*)}.$$

Der Satz wird auf ähnliche Art wie der vorhergehende bewiesen.

28. **Satz. Je nachdem das Quadrat einer Dreiecksseite größer,**

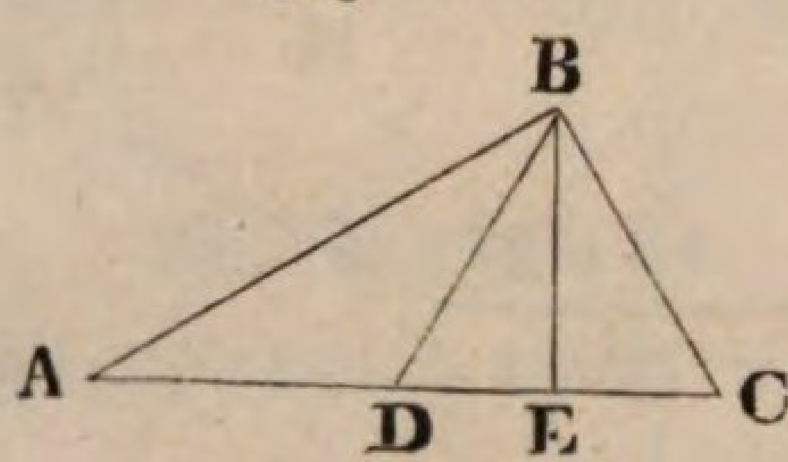
*) Man merke sich, daß sämmtliche Linien **CB, CA, CD,** welche rechts vom Gleichheitszeichen vorkommen, vom Punkte **C** aus gerechnet werden.

eben so groß oder kleiner, als die Summe der Quadrate der beiden übrigen ist, liegt der ersteren Seite ein stumpfer, rechter oder spitzer Winkel gegenüber.

Der Beweis ist indirect zu führen.

29. Satz. **Die Summe der Quadrate zweier Seiten eines Dreiecks ist gleich dem halben Quadrate der dritten Seite, nebst dem doppelten Quadrate der Linie, welche die Mitte dieser Seite mit der gegenüber stehenden Ecke verbindet (der Mittellinie).**

Fig. 120.



Beweis. Ist das Dreieck ein gleichschenkeliges, so beruht die Richtigkeit auf der Anwendung des pythagorischen Lehrsatzes, ist es ungleichschenkelig, so fälle man von der Spitze B auf die halbirte dritte Seite die Senkrechte BE. Alsdann ist:

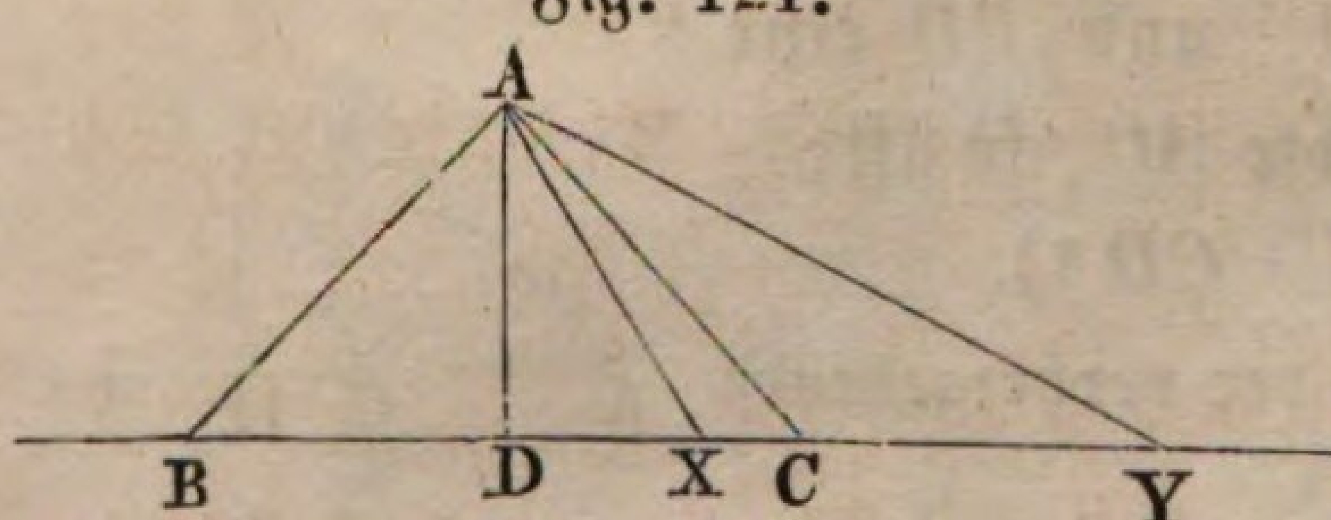
$$AB^2 = DA^2 + DB^2 + 2DA \cdot DE,$$
$$BC^2 = DC^2 + DB^2 - 2DC \cdot DE, \text{ mithin:}$$
$$AB^2 + BC^2 = \tfrac{1}{2} AC^2 + 2BD^2.$$

Zusatz. Die Summe der Quadrate der vier Seiten eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen.

Der Beweis leicht mit Hülfe von 26 und 27 oder 29.

30. Satz. **Verbindet man die Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks mit einem beliebigen Punkte der Grundlinie selbst oder deren Verlängerung, so ist der Unterschied zwischen dem Quadrate dieser Verbindungslinie und dem eines der gleichen Schenkel dem Rechtecke aus den Abständen jenes Punktes von den Endpunkten der Grundlinie gleich.**

Fig. 121.



Für einen Punkt X innerhalb der Grundlinie BC des gleichschenkeligen Dreiecks ABC ist:

$$BA^2 - AX^2 = BX \cdot XC,$$

und für einen Punkt Y auf der Verlängerung der Grundlinie:

$$YA^2 - AB^2 = BY \cdot YC.$$

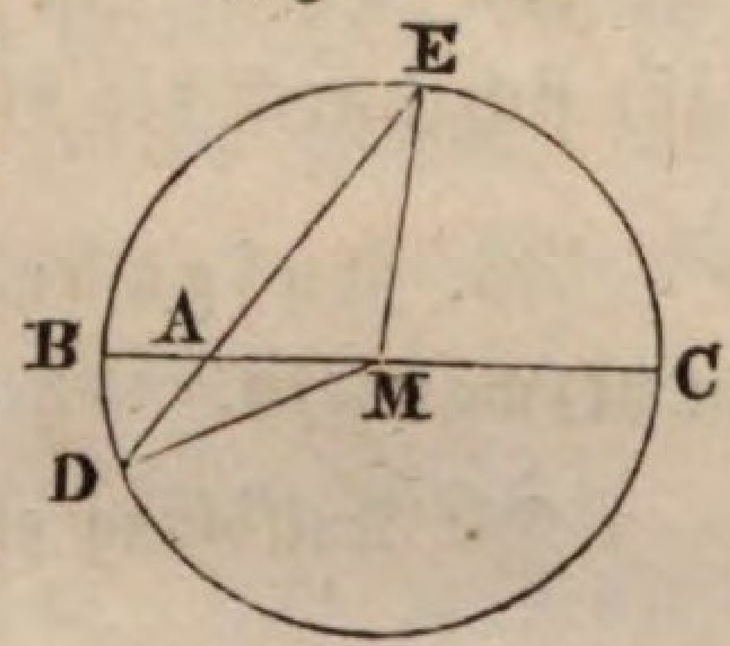
Beweis. Fällt man von der Spitze A auf die Grundlinie BC die Senkrechte AD, so ist:

$$AB^2 - AX^2 = (AD^2 + BD^2) - (AD^2 + DX^2),$$
$$= BD^2 - DX^2,$$
$$= (DB + DX)(BD - DX),$$
$$= BX \cdot XC.$$

Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß $YA^2 - AB^2 = BY \cdot YC$.

31. **Satz. Legt man durch einen beliebigen Punkt innerhalb eines Kreises eine Sehne und einen Durchmesser, so ist das Rechteck aus den beiden Stücken der Sehne dem Rechtecke aus den beiden Stücken des Durchmessers gleich.**

Fig. 122.



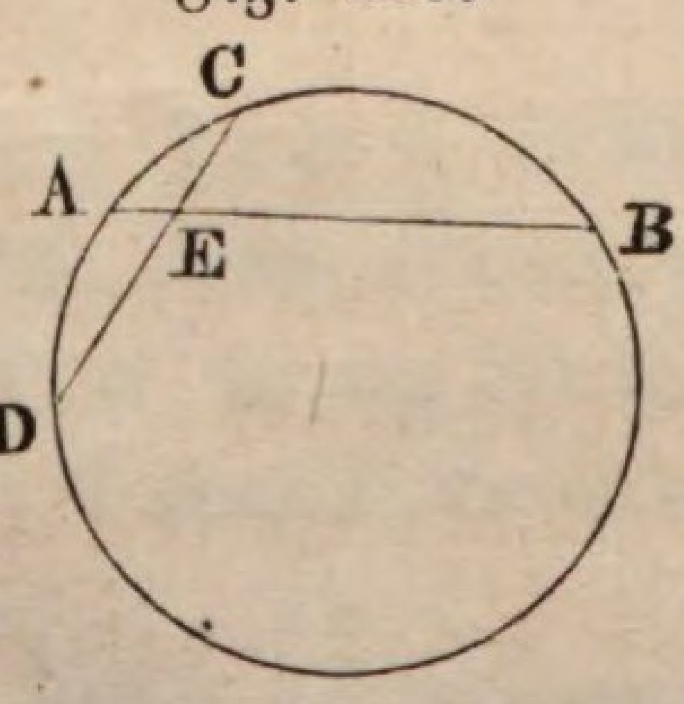
Es sei durch den Punkt A innerhalb des um M als Mittelpunkt beschriebenen Kreises der Durchmesser BC und die Sehne DE gelegt; alsdann ist $BA \cdot AC = EA \cdot AD$.

Beweis. Verbindet man den Mittelpunkt M mit den Endpunkten D und E der Sehne DE, so ist:

$$EA \cdot AD = MD^2 - MA^2 = (MD + MA)(MD - MA) = CA \cdot AB.$$

Zusatz. Zieht man durch einen beliebigen Punkt innerhalb eines Kreises zwei Sehnen, so ist das Rechteck aus den Stücken der einen dem aus den Stücken der andern gleich.

Fig. 123.

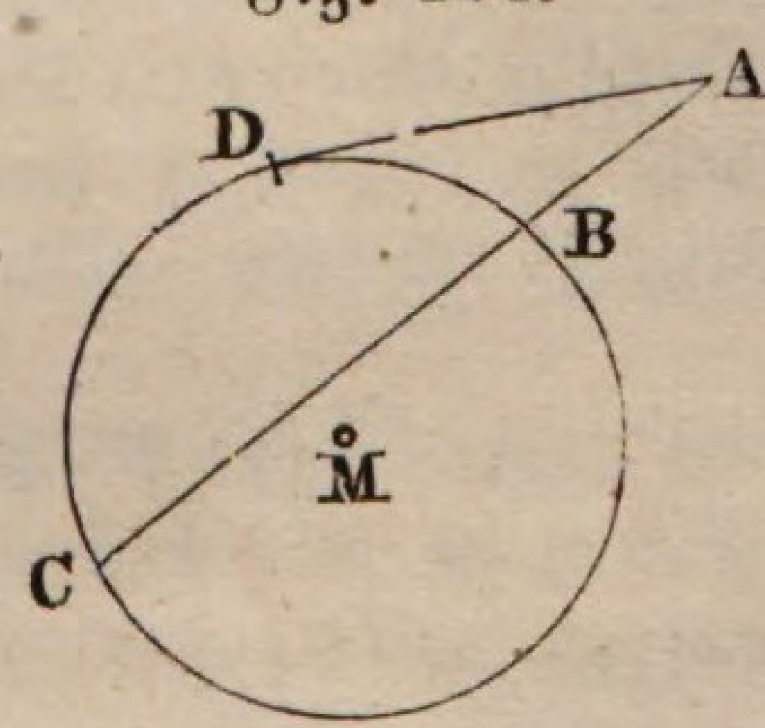


Es ist, wenn die Sehnen AB und CD sich in E durchschneiden, $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

Der Beweis ist leicht, wenn man nur durch E einen Durchmesser zieht und den Hauptsatz auf jede Sehne besonders anwendet.

32. **Satz. Zieht man durch einen beliebigen Punkt außerhalb eines Kreises eine Sehne und eine Tangente an den Kreis, so ist das Quadrat der Tangente dem Rechtecke aus der ganzen Secante und dem äußeren Abschnitte derselben gleich.**

Fig. 124.

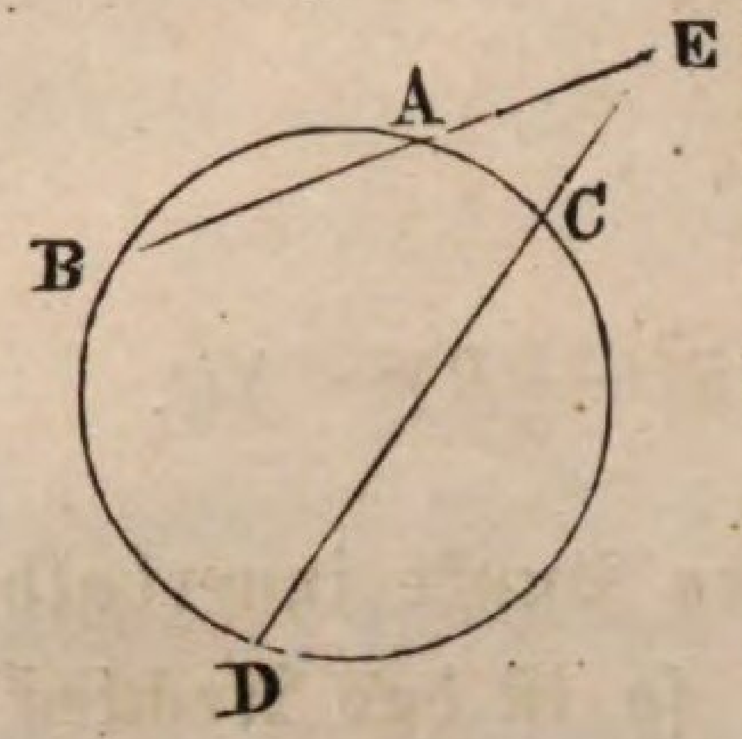


Von dem Punkte A seien an den Kreis um M die Tangente AD und die Secante AC gezogen, alsdann ist:

$$AD^2 = AB \cdot AC.$$

Der Beweis läßt sich auf Satz 30 zurückführen, wenn man M mit C, B, und mit D verbindet.

Fig. 125.



Zusatz 1. Zieht man von einem beliebigen Punkte außerhalb eines Kreises zwei beliebige Secanten an den Kreis, so sind die Rechtecke aus je einer Secante und ihrem äußeren Abschnitte einander gleich.

Sind von E an den Kreis die Secanten EB, ED gezogen, so ist:

$$EA \cdot EB = EC \cdot ED.$$

Beweis leicht.

Zusatz 2. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Zusatz 3. Ist $EA \cdot EB = EC \cdot ED$ (Figuren 123 und 125), so läßt sich durch die vier Punkte A, B, C, D ein Kreis beschreiben.

33. Aufgabe. Ein Rechteck in ein anderes von gegebener Seite zu verwandeln.

Die Auflösung auf S. 31, Zus. oder S. 32, Zus. 1, zu stützen.

V. Capitel.

Proportionen bei geradlinigen Figuren.

Erster Abschnitt.

Vom Maße. Begriff des Verhältnisses und der Proportion*).

1. Erklärung. Eine Größe heißt (im engern Sinne**) Maß einer anderen, wenn sie von dieser abgezogen, so oft es angeht, nichts übrig läßt. Das Maß einer Größe ist also in dieser ein gewisses Mal ohne Rest enthalten. Die Größe selbst ist ein genaues Vielfaches von ihrem Maße, das Maß ein aliquoter Theil jener Größe.

Maße von A sind also nur $\frac{1}{2} A$, $\frac{1}{3} A$, $\frac{1}{4} A$ rc., und was diesen aliquoten Theilen gleich kommt.

2. Satz. **Das gemeinschaftliche Maß zweier Größen A und B ist auch ein Maß ihrer Summe $A + B$ und ihres Unterschiedes $A - B$ oder $B - A$.**

Beweis. Ist M das gemeinschaftliche Maß von A und B, so sind diese Vielfache von M. Es sei $A = \alpha M$, $B = \beta M$; dann ist auch die Summe ein Vielfaches von M, $A + B = (\alpha + \beta) M$, so wie der Unterschied ein solches, nämlich $A - B = (\alpha - \beta) M$ oder $B - A =$

---

*) Anm. Dieser und der folgende Abschnitt gehören weniger der Geometrie, als der allgemeinen Größenlehre an, weil sie keinen der Geometrie eigenthümlichen Gegenstand behandeln. Die darin vorkommenden Erklärungen und Sätze gelten vielmehr von Größen überhaupt, mögen es räumliche oder nicht räumliche, als Zahl-, Zeit-, Kraftgrößen u. s. w. sein. Dennoch sind sie hier aufgenommen und den Elementen der Geometrie einverleibt worden, weil die allgemeine Größenlehre als solche nicht abgesondert und dem geometrischen Unterrichte vorausgehend behandelt zu werden pflegt, die Anwendung jener Erklärungen und Sätze aber im Folgenden unentbehrlich ist.

**) Anm. Im weiteren Sinne wird auch jede Größe Maß genannt, sobald sie dazu gebraucht wird, eine andere ihrer Art zu messen, d. h. zu bestimmen, wie oft jene in dieser enthalten ist, mag ein Rest bleiben oder nicht.

$(\beta - \alpha) M$. Das Maß M mißt also ohne Rest sowohl $A + B$ als $A - B$ oder $B - A$.

3. **Satz. Das Maß einer Größe ist auch ein Maß jedes Vielfachen dieser Größe.**

Denn es sei M ein Maß von A; M ist dann (nach 2) auch ein Maß von $A + A$, d. i. von $2A$, deshalb auch von $2A + A$, d. i. von $3A$, u. s. w. von jedem höheren Vielfachen von A.

4. **Satz. Das gemeinschaftliche Maß zweier Größen ist auch ein Maß der Summe sowohl, als des Unterschiedes beliebiger Vielfachen derselben.**

Denn ist, wie vorhin, M ein Maß von A und B, so ist (S. 3) M auch ein Maß der beliebigen Vielfachen αA und βB, daher nach S. 2 auch ein Maß von $\alpha A \pm \beta B$.

5. **Satz. Das größte gemeinschaftliche Maß zweier Größen A und B ist auch das größte gemeinsame Maß der kleineren unter ihnen und des Restes, der übrig bleibt, wenn man die kleinere von der größeren so oft wie möglich abzieht.**

Beweis. Angenommen, B sei die kleinere Größe und lasse sich $n$mal von A abziehen, wobei der Rest C übrig bleibt, dann ist $A = nB + C$ und $C < B$. Ist nun M ein gemeinsames Maß von A und B, so ist (S. 4) M auch ein Maß von $A - nB$, d. i. von C, und also ein gemeinsames von B und C. Ist dabei M das größte Maß von A und B, so wird es auch das von B und C sein; denn hätten B und C ein noch größeres gemeinsames Maß als M, etwa $M' > M$, so würde (S. 4) M' auch ein Maß von $nB + C$, d. i. von A, daher ein gemeinsames Maß von A und B größer noch als das größte M sein, was sich widerspricht. Das größte Maß von A und B ist daher zugleich das von B und C, und umgekehrt: das größte von diesen ist auch das größte von jenen.

6. **Aufgabe. Das größte gemeinschaftliche Maß zweier Größen zu finden, wenn sie ein solches haben.**

Auflösung. Von der größeren der beiden gegebenen Größen (sie sei A) ziehe man die kleinere (B) so oft ab, als es angeht; hierauf den Rest (C) von B ebenfalls so oft es angeht, dann den neuen Rest (D) von C auf gleiche Weise, u. s. f. jeden neuen Rest von dem vorher-

gehenden, bis ein letzter Rest (M) entsteht, dessen Abziehen vom vorhergehenden keinen neuen Rest mehr übrig läßt. Dieser letzte Rest M wird das größte gemeinschaftliche Maß von A und B sein. Denn dieses Maß ist (S. 5) dasselbe, wie das von B und C, von C und D u. s. w. bis zum vorletzten Reste und letzten M; das größte Maß dieser beiden ist aber offenbar, da M der kleinste unter allen Resten ist, M selbst, daher auch das von A und $B = M$ ist.

Die specielle Ausführung dieses Verfahrens an geraden Linien, Kreisbogen oder Winkeln ꝛc. wird dem mündlichen Unterrichte überlassen.

Zusatz. Jedes andere gemeinsame Maß von A und B muß ein aliquoter Theil des größten sein.

Beweis größtentheils im vorigen enthalten.

7. Erklärung. Größen, die ein gemeinschaftliches Maß haben, werden commensurabel (die eine in Beziehung auf die andere), Größen dagegen, die kein gemeinschaftliches Maß haben, incommensurabel zu einander, genannt.

Anm. Daß es incommensurabele Größen gibt, kann für den geometrischen Zweck beispielsweise an den Seiten zweier Quadrate nachgewiesen werden, deren Eines doppelt, 3mal, 5mal, 6mal ꝛc. so groß als das andere ist. Die Seiten dieser Quadrate sind incommensurabel. Gesetzt nämlich, die Seiten zweier Quadrate, deren eines $n$mal so groß als das andere ist [n keine Quadratzahl], wären commensurabel, und ihr größtes gemeinsames Maß wäre $a$mal in der Seite des ersten, $b$mal in der Seite des anderen Quadrates enthalten. a und b wären dann Primzahlen zu einander und (IV. 3) $a^2 = nb^2$; weshalb a durch n theilbar und etwa $a = nc$ sein müßte. Hieraus folgt aber $a^2 = n^2c^2$, daher auch $nb^2 = n^2c^2$, $b = nc^2$, also müßte auch b durch n theilbar sein, a und b hätten nun ein gemeinschaftliches Maß n, was, da sie Primzahlen zu einander sind, nicht möglich ist. Die Seiten der Quadrate können daher gar kein gemeinsames Maß haben und sind incommensurabel.

8. Satz. **Von commensurabeln Größen lassen sich immer Vielfache angeben, die einander gleich kommen.**

Sind z. B. A und B commensurabel und enthalten ihr gemeinschaftliches Maß C, jene m-, diese $n$mal, so daß $A = mC$, $B = nC$, so ist $nA = mB$, denn jedes dieser Vielfachen ist $= mnC$. Dabei ist zu bemerken, daß, wenn C das größte gemeinschaftliche Maß von A und B ist, nA und mB die kleinsten Vielfachen derselben sind, welche einander gleich kommen. Von incommensurabeln Größen dagegen gibt es eben so wenig Vielfache als aliquote Theile, die einander genau gleich

kommen. Denn sind A und B solche Größen, und wäre $mA = nB$, so würde $\frac{1}{n}A \left(= \frac{1}{m}B\right)$ ein gemeinschaftliches Maß sein, welches in A $n$mal, in B $m$mal enthalten wäre. A und B wären also gegen die Voraussetzung commensurabel.

9. **Von zwei commensurabeln Größen ist jede entweder ein Vielfaches, oder ein aliquoter Theil, oder das Vielfache eines aliquoten Theiles der anderen.**

So ist, wenn das gemeinsame Maß von A und B

in A ... 1mal, in B ... $n$mal enthalten ist, $A = \frac{1}{n}B$, $B = nA$,

in A ... $m$mal, in B ... 1mal . . . . $A = mB$, $B = \frac{1}{m}A$,

in A ... $m$mal, in B ... $n$mal . . . . $A = \frac{m}{n}B$, $B = \frac{n}{m}A$.

Die beiden ersten dieser Formen sind in der dritten $\frac{m}{n}$ oder $\frac{n}{m}$ begriffen, wenn m und n 1 bedeuten, so daß jede von zwei commensurabeln Größen im Allgemeinen als das Product aus der anderen mit einer Bruchzahl dargestellt werden kann. Letztere geht im Falle, daß der Nenner 1 oder in den Zähler theilbar ist, in eine ganze Zahl über.

10. **Von zwei incommensurabeln Größen läßt sich dagegen keine streng genommen als Bruch der anderen darstellen, wohl aber näherungsweise mit beliebigem Grade der Genauigkeit.**

Sind nämlich A und B solche Größen und man theilt eine derselben, z. B. B, in n gleiche Theile, so kann A zwar keinem Vielfachen von $\frac{1}{n}B$ genau gleichkommen (8), wohl aber muß es zwei auf einander folgende Vielfache von $\frac{1}{n}B$ geben, zwischen welchen A enthalten ist; diese seien das $m$fache und $(m+1)$fache von $\frac{1}{n}B$. Dann ist $\frac{m+1}{n}B > A > \frac{m}{n}B$. Der Unterschied zwischen A und jedem dieser beiden Bruchwerthe von B ist kleiner, als der Unterschied dieser Bruchwerthe selbst, d. i. kleiner, als $\frac{1}{n}B$, und da dieser letzte Unterschied durch Vermehrung von n kleiner, als jede gegebene Größe gemacht werden kann, so gilt

dieses um so mehr vom Unterschiede zwischen A und $\frac{m}{n}B$ oder $\frac{m+1}{n}B$. Man darf deßhalb behaupten: Zu einer jeden von zwei incommensurabeln Größen lassen sich immer zwei mit der anderen commensurabele finden, zwischen welchen jene enthalten ist und die beide einen Näherungswerth der letzteren darstellen, dessen Unterschied von ihr kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden kann.

11. Begriff des Verhältnisses. Ist das gemeinschaftliche Maß M zweier Größen A und B bekannt, so sind damit zwei ganze Zahlen gegeben, welche ausdrücken, wie oft das Maß M in A sowohl als in B enthalten ist, daher auch, welchen Vielfachen von M . . A und B gleich sind, und welche Vielfachen von A und B einander gleich kommen. Vergleicht man nun A und B nach diesen Zahlen, so betrachtet man das Verhältniß derselben und sagt: A verhält sich zu B, wie etwa 3 zu 5, woraus folgt, daß $5A = 3B$. Verhältniß zweier gleichartigen Größen ist demnach das Ergebniß ihrer Vergleichung mittels derjenigen Zahlen, welche ausdrücken, wie oft jede von ihnen das gemeinsame Maß enthält, oder auch, welche ihrer Vielfachen einander gleich kommen. Die verglichenen Größen werden Glieder des Verhältnisses genannt, das vorangehende, welches verglichen wird, heißt der Antecedent, das folgende, womit jenes verglichen wird, der Consequent.

12. Das eben Erklärte scheint nur auf commensurabele Größen zu passen; man ist aber genöthigt, den Begriff „Verhältniß" zu erweitern und ihn auf incommensurabele Größen auszudehnen, weil auch diese eine Vergleichung fordern und die Anwendung des Begriffs möglichste Allgemeinheit desselben verlangt. Zu dem Ende denke man sich (nach 10) zu einer der beiden incommensurabelen Größen, etwa zu A, zwei mit der anderen B, commensurabele Näherungswerthe $\frac{m}{n}B$ und $\frac{m+1}{n}B$, welche A zwischen sich einschließen. Diese verhalten sich dann zu B, wie $m : n$ und wie $m + 1 : n$. Indem nun durch unbegränzte Vergrößerung der Zahl n diese Näherungswerthe unter sich und um so mehr beide der Größe A immer näher rücken, nähern sich gleichzeitig die Zahlverhältnisse $m : n$ und $m + 1 : n$ einer dazwischen liegenden gemeinschaftlichen Gränze, die sich durch keine ganzen Zahlen vollkom-

men genau ausdrücken läßt, darum aber nicht weniger existirt und das wahre Verhältniß von A zu B ist.

Solche Verhältnisse incommensurabeler Größen werden auch irrationale genannt im Gegensatze zu den Verhältnissen commensurabeler Größen, welche rationale heißen.

13. Jedem Verhältnisse wird ein sogenannter Exponent beigelegt, der die Größe desselben bestimmt. Der Exponent ist diejenige Zahl, womit das zweite Verhältnißglied multiplicirt werden muß, um das erste zu geben. Ist nun 1) das Verhältniß ein rationales, so ist sein Exponent eine ganze oder Bruchzahl. Je nachdem nämlich $A = mB$ oder $A = \frac{1}{n}B$, oder $A = \frac{m}{n}B$, ist m, oder $\frac{1}{n}$, oder $\frac{m}{n}$ der Exponent des Verhältnisses von A zu B. Ist 2) das Verhältniß irrational, so ist auch der Exponent eine so genannte Irrationalzahl, d. h. eine Zahl, die sich weder durch ganze noch durch Brucheinheiten vollständig angeben läßt. Dessen ungeachtet ist der Exponent ein ganz bestimmter, d. h. er kann keine zwei verschiedene Werthe haben. Fällt nämlich A zwischen $\frac{m}{n}B$ und $\frac{m+1}{n}B$, so liegt der Exponent des Verhältnisses $A : B$ zwischen den Brüchen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$, deren Unterschied $\frac{1}{n}$ kleiner, als jede beliebige Zahl gemacht werden kann; hätte nun der Exponent zwei verschiedene Werthe: e und e', von welchen e der größere sein mag, so daß $\frac{m+1}{n} > e > e' > \frac{m}{n}$, so wäre $\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n}$, d. i. $\frac{1}{n} > e - e'$. Dies kann aber nicht sein, denn es kann n so groß genommen werden, daß $\frac{1}{n} < e - e'$ wird, was sich widerspricht. e und e' können daher nicht verschieden sein, oder der irrationale Exponent hat nur einen einzigen, also bestimmten Werth.

14. Zwei Verhältnisse sind gleich, wenn sie denselben Exponenten haben. Ein Verhältniß ist dagegen größer oder kleiner, als ein anderes, je nachdem der Exponent des ersten größer oder kleiner, als der des zweiten ist. Zwei Verhältnisse, jedes einem dritten gleich, sind auch unter sich gleich.

15. Die Zusammenstellung zweier gleichen Verhältnisse wird Proportion genannt. Das Schema derselben ist $A : B = C : D$,

und wird gelesen: A verhält sich zu B, wie C zu D, oder auch: wie A zu B, so C zu D. Jede Proportion hat demnach vier Glieder, die entweder alle gleichartig sein können, oder auch nur paarweise, die beiden ersten unter sich, und eben so die beiden letzten. Das erste und vierte Glied der Proportion sind die äußeren Glieder derselben, das zweite und dritte die inneren oder mittleren. Das letzte Glied insbesondere ist die vierte Proportionale zu den drei ersten.

16. Sind die beiden inneren Glieder einer Proportion einander gleich, so wird dieselbe auch wohl eine stetige Proportion genannt, z. B. $A : B = B : C$; B heißt alsdann die mittlere Proportionale zu A und C, C die dritte Proportionale zu A und B.

Zweiter Abschnitt.

Sätze über Proportionen*).

17. **Satz. Je nachdem das erste Glied einer Proportion $>$, $=$ oder $<$ als das zweite ist, ist auch das dritte $>$, $=$ oder $<$ als das vierte.**

Denn es sei $A : B = C : D$, und e der Exponent beider Verhältnisse, dann ist (13) $A = Be$, $C = De$. Je nachdem nun $A \gtreqless B$, muß $e \gtreqless 1$, und daher auch $C \gtreqless D$ sein.

18. **Satz. Je nachdem das erste Glied einer Proportion $\gtreqless$ als das dritte ist, muß auch das zweite $\gtreqless$ als das vierte sein.**

Denn je nachdem $A \gtreqless C$, ist $Be \gtreqless De$, und daher $B \gtreqless D$.

19. **Satz. Zu drei Größen A, B, C gibt es immer nur eine vierte Proportionale.**

Gesetzt, es gäbe zwei: D und D', so daß $A : B = C : D$, und auch $A : B = C : D'$; dann wäre $C : D = C : D'$, im Widerspruch mit (18).

Zusatz: Der eben ausgesprochene Satz könnte auch so heißen: Stimmen zwei Proportionen in drei Gliedern an gleicher Stelle überein, so stimmen sie auch im vierten überein.

---

*) Anm. Die in diesem Abschnitte vorkommenden Sätze betreffen proportionale Größen überhaupt, mögen es geometrische, arithmetische oder andere sein und haben in so fern eine allgemeinere Gültigkeit, als die in der Arithmetik zu behandelnden Sätze der Zahlen-Proportionen.

20. **Satz. Ist eines der äußeren Glieder einer Proportion das größte von allen vieren, so ist das andere das kleinste. Dasselbe gilt von den inneren Gliedern.**

Ist z. B. A das größte Glied der Proportion $A : B = C : D$, also $A > B$ und $A > C$, so folgt aus (17), daß $C > D$, und aus (18), daß $B > D$; mithin ist D das kleinste Glied.

21. **Satz. Die Größe eines Verhältnisses $A : B$ bleibt ungeändert, wenn man beide Glieder desselben mit einer und derselben, übrigens beliebigen Zahl k multiplizirt oder dividirt.**

Denn ist e der Exponent des Verhältnisses $A : B$, so ist $A = Be$, daher auch $Ak = Be \cdot k = Bk \cdot e$; $\frac{A}{k} = \frac{Be}{k} = \frac{B}{k} \cdot e$; e ist mithin auch der Exponent der Verhältnisse $Ak : Bk$ und $\frac{A}{k} : \frac{B}{k}$.

Zusatz. Sowohl die beiden ersten Glieder einer Proportion, als die beiden letzten, dürfen mit jeder beliebigen Zahl multiplicirt oder dividirt werden.

Bemerkung. Der Satz ließe sich auch wohl so ausdrücken: Gleichvielfache zweier Größen, oder gleichvielte Theile derselben, verhalten sich wie diese Größen selbst.

22. **Satz. Die Richtigkeit einer Proportion bleibt bestehen, wenn man das erste und dritte Glied derselben (die Antecedenten), oder das zweite und vierte Glied (die Consequenten) mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.**

Denn es sei $A : B = C : D$, $A = Be$, $C = De$; dann ist $Ak = Be \cdot k = B \cdot ek$, $Ck = De \cdot k = D \cdot ek$, daher $Ak : B = Ck : D$. Auf ähnliche Weise wird gezeigt, daß $\frac{1}{k} A : B = \frac{1}{k} C : D$, $A : Bk = C : Dk$, $A : \frac{1}{k} B = C : \frac{1}{k} D$.

23. **Satz. Eine Proportion bleibt richtig, wenn eines der äußeren, resp. inneren Glieder mit derselben Zahl multiplicirt wird, wodurch das andere dividirt wird.**

Aus $C = De$ folgt $C = \frac{De}{k} \cdot k = \frac{D}{k} \cdot ek$, und da, wie vorhin

gezeigt worden ist, $Ak = B \cdot ek$, so ist $Ak : B = C : \frac{D}{k}$. Eben so ergeben sich die übrigen im Satze ausgesprochenen Veränderungen.

24. **Satz. Sind vier Größen proportionirt, so sind sie auch umgekehrt proportionirt; d. h. ist $A : B = C : D$, so ist auch $D : C = B : A$ oder $B : A = D : C$.**

Denn ist $A = Be$, $C = De$, so ist $B = A \cdot \frac{1}{e}$, $D = C \cdot \frac{1}{e}$ folglich $B : A = D : C$.

Bemerkung. Durch diese Umkehrung werden die Antecedenten zu Consequenten, und diese zu jenen, die äußeren Glieder zu mittleren, die mittleren zu äußeren.

25. **Satz. Sind alle vier Glieder gleichartig, so können die inneren Glieder sowohl als die äußeren unter sich vertauscht werden.**

Aus $A : B = C : D$, $A = Be$, $C = De$ folgt nach (21) $A : C = Be : De = B : D$, und $D : B = De : Be = C : A$.

26. **Satz. Die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder einer Proportion verhält sich zu jedem derselben, wie die Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder zu dem jenem entsprechenden unter diesen.**

Aus $A = Be$, $C = De$ folgt nämlich: $A \pm B = Be \pm B = B(e \pm 1)$, $C \pm D = De \pm D = D(e \pm 1)$, daher $A \pm B : B = C \pm D : D$; auch ist, wenn $B > A$, $B - A = B - Be = B(1 - e)$, $D - C = D - De = D(1 - e)$, also $B - A : B = D - C : D$. Wendet man die Veränderung auf die umgekehrte Proportion $B : A = D : C$ an, so erhält man noch $B \pm A : A = D \pm C : C$ und, wenn $A > B$, $A - B : A = C - D : C$.

27. **Satz. Die Summe der beiden ersten Glieder verhält sich zu deren Unterschied, wie die Summe der beiden letzten zum Unterschiede dieser.**

Denn es ist $A + B : A - B = Be + B : Be - B = B(e + 1) : B(e - 1) = e + 1 : e - 1$; desgleichen $C + D : C - D = e + 1 : e - 1$, folglich $A + B : A - B = C + D : C - D$, oder, wenn $B > A$, $D > C$, $A + B : B - A = C + D : D - C$.

28. **Sind alle Glieder der Proportion gleichartig, so verhält**

sich die Summe oder Differenz der Antecedenten zur Summe oder Differenz der Consequenten, wie ein Antecedent zu seinem Consequenten.

Aus $A = Be$ und $C = De$ folgt nämlich $A \pm C = Be \pm De = (B \pm D)\,e$, daher $A \pm C : B \pm D = A : B = C : D$, oder, wenn $C > A$, $C - A : D - B = A : B = C : D$.

Zusatz. Dasselbe gilt von mehreren gleichen Verhältnissen. Ist $A : B = C : D = E : F =$ u. s. w., so ist $A \pm C \pm E$ 2c. $: B \pm D \pm F$ 2c. $= A : B$.

29. Satz. **Unter derselben Bedingung, wie vorher, verhält sich auch die Summe der Antecedenten zur Summe der Consequenten wie der Unterschied der ersten zum Unterschiede der letzten.**

Denn da $A + C : B + D = A : B$ und
$A - C : B - D = A : B$, so ist auch

$$A + C : B + D = A - C : B - D.$$

Zusatz. Durch Vertauschung der Mittelglieder erhält man noch: $A + C : A - C = B + D : B - D$, d. h. die Summe der Antecedenten zu ihrer Differenz, wie die Summe der Consequenten zu deren Differenz.

30. Satz. **Die Summe des größten und kleinsten Gliedes einer Proportion ist immer größer, als die Summe der beiden übrigen.**

Beweis. Die Proportion sei $A : B = C : D$, und das erste Glied, A, das größte (das größte kann nämlich zur Abkürzung der Beweisführung immer an die erste Stelle gebracht werden), dann ist (20) D das kleinste. Nach (28) ist $A - C : B - D = A : B$, also, da $A > B$, auch $A - C > B - D$; folglich $A + D > C + B$, w. z. b. w.

Zusatz. Die mittlere Proportionale zweier Größen ist stets kleiner als deren halbe Summe. Denn ist $A : B = B : C$, so ist, da A und C das größte und kleinste Glied der Proportion sind, $A + C > 2B$, daher $B < \frac{A + C}{2}$.

31. Satz. **Sind die Antecedenten oder Consequenten einer Proportion zugleich die einer anderen, und zwar in derselben Folge, so**

sind die übrigen vier Glieder der Ordnung nach unter sich proportionirt *).

Der Satz sagt, daß wenn:

	1. oder	2. oder	3.	
	$A : B = C : D$	$A : B = C : D$	$A : B = C : D$	
und	$A : E = C : F$	$E : B = F : D$	$B : E = D : F$	
alsdann	$B : E = D : F$	$A : E = C : F$	$A : E = C : F$	sei.

Der Beweis ist in allen Fällen dadurch zu führen, daß man die Gleichheit der Exponenten in der jedesmaligen Endproportion nachweist. Z. B. im dritten Falle sei $A = Be$, $B = Ef$, also auch $C = De$, $D = Ff$. Hieraus folgt: $A = Ef \cdot e = E \cdot fe$ und $C = Ff \cdot e = F \cdot fe$, daher $A : E = C : F$. — Uebrigens lassen sich die unter 1, 2, 3 figurirten Stellungen durch Umkehrung leicht auf einander zurückführen.

Zusatz. Eine Reihe von Proportionen bei welchen wie in

$$A : B = M : N,$$
$$B : C = N : O,$$
$$C : D = O : P \quad \text{u. s. w.}$$

die Consequenten einer jeden Antecedenten der folgenden sind, wird auch der Kürze wegen so bezeichnet:

$$A : B : C : D = M : N : O : P$$

und eine fortlaufende Proportion genannt. Nach obigem Satze verhalten sich je zwei der vorangehenden Glieder einer solchen Proportion wie die zwei entsprechenden unter den folgenden; z. B.

$$B : D = N : P, A : D = M : P \text{ u. s. w.}$$

32. Satz. **Sind die äußeren oder inneren Glieder einer Proportion zugleich die einer anderen, so stehen die übrigen vier nicht gemeinschaftlichen Glieder unter sich in Proportion, so jedoch, daß die inneren oder äußeren Glieder solche bleiben.**

Der Satz sagt, daß wenn:

	1. oder	2. oder	3.
	$A : B = C : D$	$A : B = C : D$	$A : B = C : D$
und	$A : E = F : D$	$E : B = C : F$	$B : E = F : C$
alsdann	$B : E = F : C$	$A : E = F : D$	$A : E = F : D$

*) Anmerkung. Bei Euklid: „aus dem Gleichen" proportionirt.

sei. Der Beweis ist nach dem Beispiele des vorigen mit Hülfe der Exponenten zu führen. Die Stellungen in 1., 2., 3. lassen sich auch hier durch bloße Umkehrung auf einander zurückführen.

Zusatz. Eine mittlere Proportionale zwischen den beiden äußeren Gliedern einer Proportion ist auch eine solche zwischen den beiden inneren und umgekehrt.

Aus $A : B = C : D$ und $A : M = M : D$ folgt nämlich nach dem Satze $B : M = M : C$.

33. Satz. **Haben zwei oder mehrere Proportionen dieselben {Consequenten / Antecedenten} an derselben Stelle, so sind diese der Summe der {Antecedenten / Consequenten} proportionirt.**

Ist nämlich $A : B = C : D$, oder $B : A = D : C$,
$E : B = F : D$ $\quad B : E = D : F$,
so ist $A + E : B = C + F : D$, oder $B : A + E = D : C + F$. Denn es sei $A = Be$, $E = Bf$, so ist auch $C = De$, $F = Df$, und $A + E = Be + Bf = B\,(e + f)$, so wie $C + F = De + Df = D\;(e + f)$; folglich $A + E : B = C + F : D$, und durch Umkehrung: $B : A + E = D : C + F$.

34. Erklärung. Von zwei Größen, z. B. A und D, sagt man, sie stehen in einem aus den einfachen Verhältnissen $m : n$, $p : q$, $r : s$ zusammengesetzten Verhältnisse, wenn es Mittelgrößen B, C giebt, so daß $A : B = m : n$, $B : C = p : q$, $C : D = r : s$.

Satz. **Sind zwei oder mehrere Verhältnisse anderen Verhältnissen einzeln gleich, so ist auch das aus den ersten zusammengesetzte dem aus den letzten zusammengesetzten gleich.**

Wenn $A : B = C : D$ und $E : F = G : H$, so wird auch das mit $A : B$ und $E : F$ zusammengesetzte Verhältniß dem mit $C : D$ und $G : H$ zusammengesetzten gleich sein.

Beweis. Nimmt man zu E, F, B eine vierte Proportionale P, so wie zu G, H, D eine solche Proportionale Q, so daß $E : F = B : P$ und $G : H = D : Q$, so ist das Verhältniß $A : P$ aus den Verhältnissen $A : B$ und $E : F$, so wie das Verhältniß $C : Q$ aus den Verhältnissen $C : D$ und $G : H$ zusammengesetzt. Es bleibt nur zu zeigen, daß $A : P$

$= C : Q$. Da nun $E : F = G : H$, so ist auch $B : P = D : Q$. Hieraus aber und aus $A : B = C : D$ folgt nach (31) $A : P = C : Q$.

35. **Satz. Sind zwei oder mehrere Größen-Verhältnisse in Zahlen gegeben, so ist das aus jenen zusammengesetzte das des Products der Antecedenten zum Producte der Consequenten unter den Zahlen.**

Beweis. Es sei $A : B = m : n$, $C : D = p : q$, wo m, n, p, q bloße Zahlen bezeichnen. Ist P die vierte Proportionale zu C, D, B, so daß $C : D = B : P$, so ist auch $B : P = p : q$, $A : P$ aber das aus $A : B$ und $C : D$ zusammengesetzte Verhältniß. Aus $A : B = m : n = mp : np$ und $B : P = p : q = np : nq$ folgt aber nach (31), daß $A : P = mp : nq$, w. z. b. w.

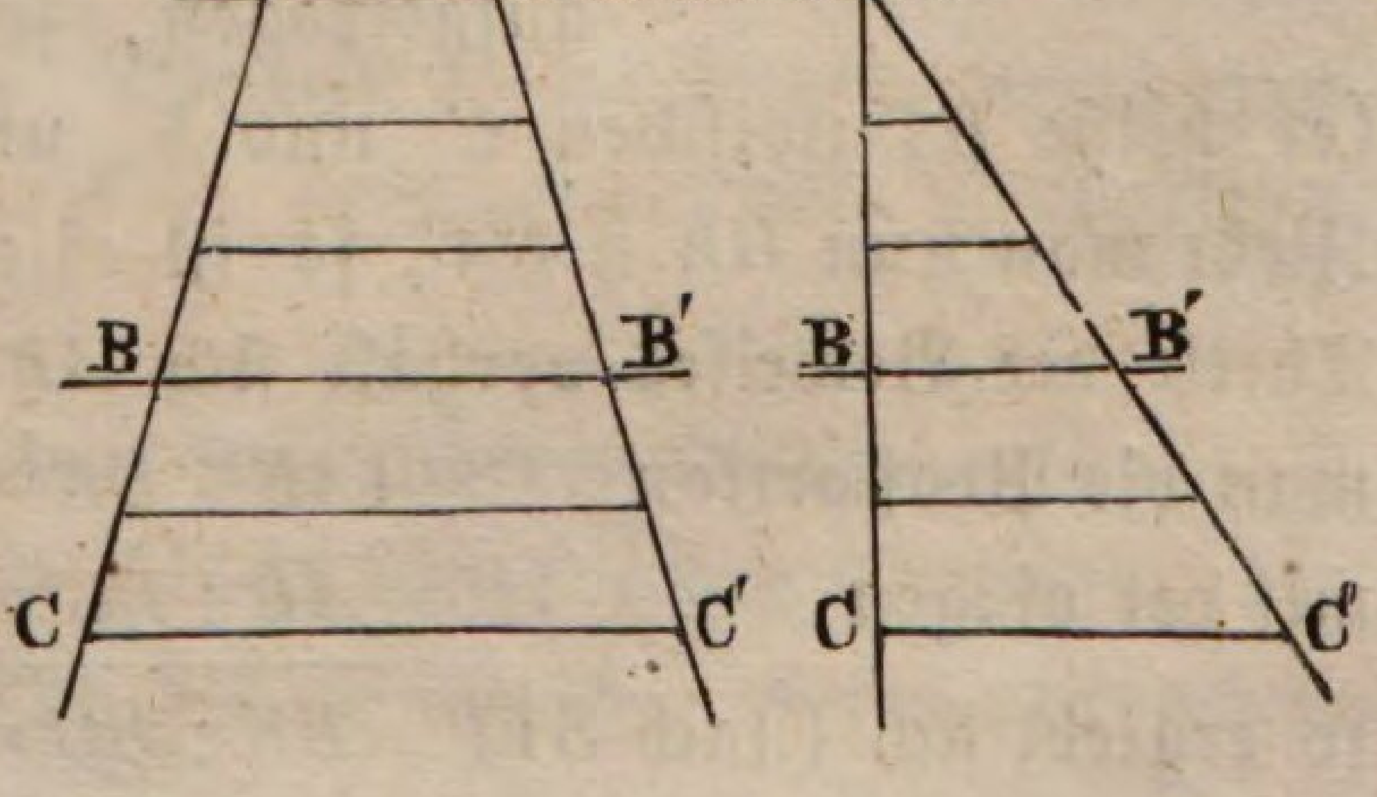
36. Ungleiche Verhältnisse. Sind zwei Verhältnisse ungleich, so bildet ihre Zusammenstellung eine Disproportion. Die Modificationen, welche obige Sätze erleiden müssen, wenn man eine analoge Reihe derselben für Disproportionen aufstellen will, lassen sich bei Festhaltung des Begriffs vom Exponenten ohne Schwierigkeit erkennen. Da solche jedoch für die Elemente von geringerer Wichtigkeit sind, so haben wir sie kurz im Anhange zusammengestellt und verweisen auf denselben, hier nur bemerkend, daß, wenn $A > B$, alsdann, dem in 14 Definirten gemäß, auch $A : C > B : C$, dagegen $C : A < C : B$ ist.

Dritter Abschnitt.

Proportionen beim Durchschnitt gerader Linien.

37. **Satz. Parallellinien schneiden auf zweien nicht parallelen Geraden stets proportionirte Stücke zwischen sich ab. Dabei kann der Durchschnittspunkt der Geraden eine der Parallellinien vertreten.**

Fig. 126. Fig. 127.



Beweis. Die Parallellinien seien (Fig. 126 u. 128) AA', BB', CC'. An die Stelle einer derselben, z. B. der AA' oder BB' kann auch der Durchschnittspunkt der beiden nicht parallelen Geraden treten, Figur 127 und 129. Die Stücke, welche dadurch auf einer dieser Geraden abgeschnitten wer-

Fig. 128.

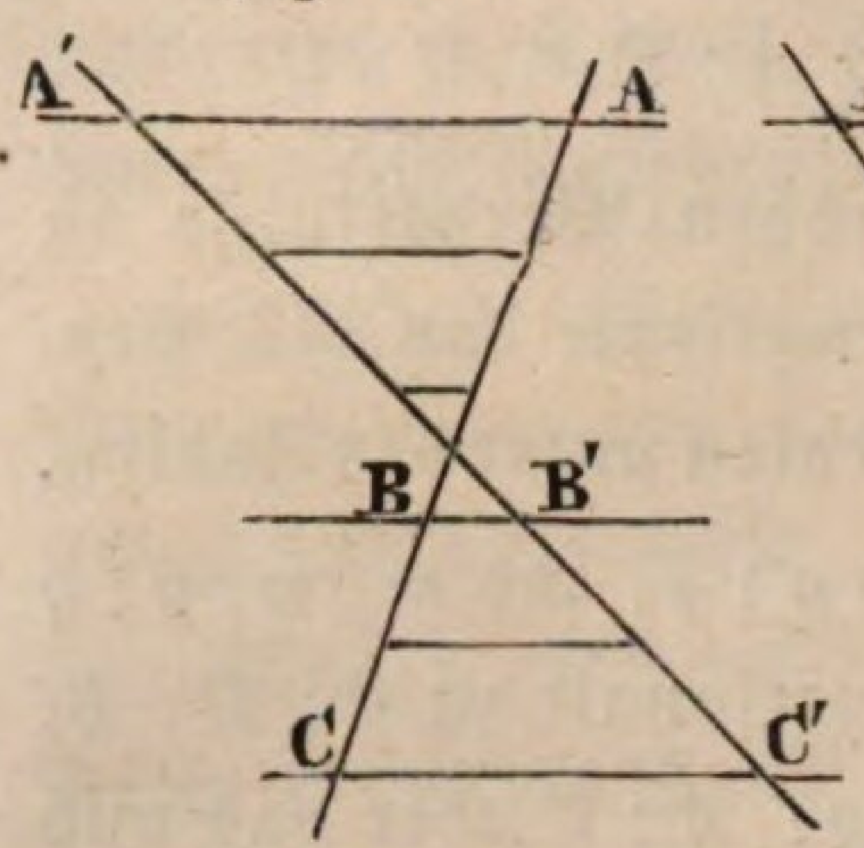
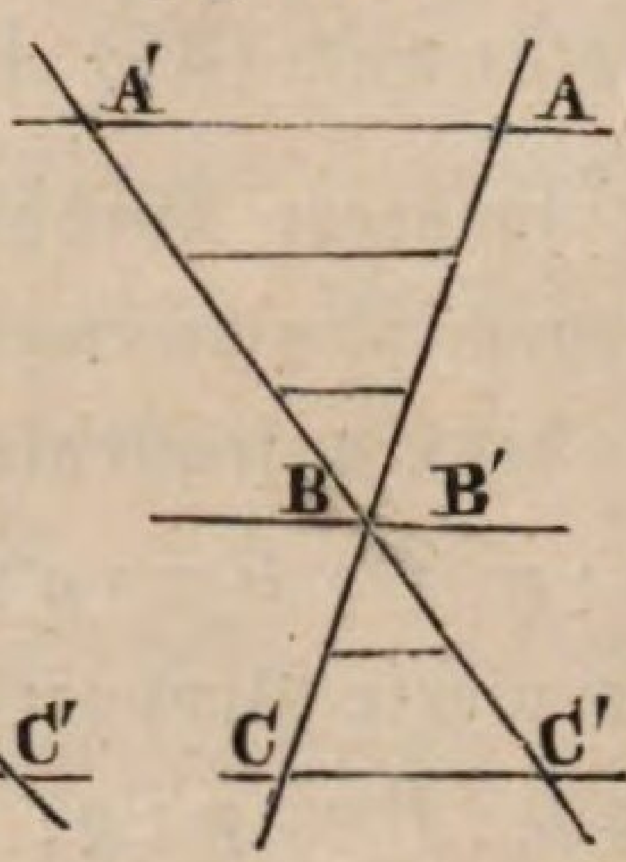


Fig. 129.



den, sind AB, BC, AC; die entsprechenden auf der anderen $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$; es ist zu zeigen, daß:

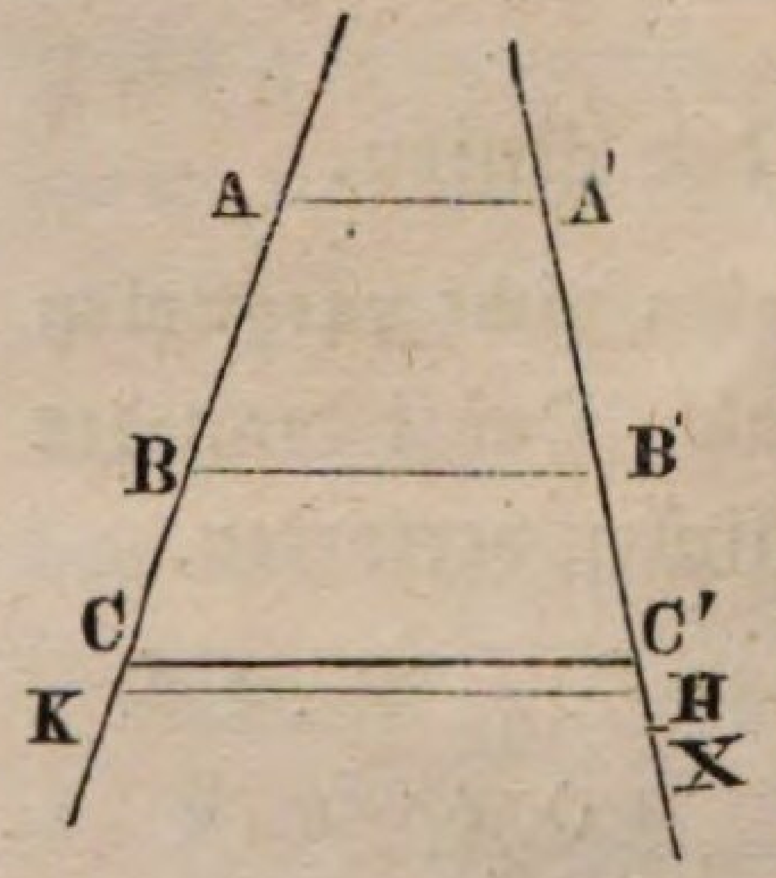
$$AB : BC : AC = A'B' : B'C' : A'C'.$$

Sind 1) AB, BC und daher auch deren Summe (oder Differenz) AC commensurabel, so verhalten sie sich wie ganze Zahlen, die ausdrücken, wie oft ein gemeinschaftliches Maß jener Linien in jeder von ihnen enthalten ist. Es sei $AB : BC : AC = m : n : m + n$. Theilt man nun AB in m gleiche Theile, so gehen deren n auf BC, $m + n$ auf AC. Durch die Theilpunkte auf ABC ziehe man Parallellinien mit CC', so werden (II. 46) durch diese auch auf $A'B'C'$ Theile abgeschnitten, die unter sich alle gleich sind und deren m zwischen A' und B', n von B' bis C', $m + n$ in $A'C'$ liegen. Die Stücke auf der zweiten Geraden sind daher gleichfalls commensurabel und es verhält sich auch $A'B' : B'C' : A'C' = m : n : m + n$. Die Vergleichung dieser fortlaufenden Proportion mit der obigen giebt:

$$AB : BC : AC = A'B' : B'C' : A'C'.$$

Sind 2) AB und BC unter sich, und daher auch mit AC incommensurabel, so findet nichts desto weniger dieselbe Proportion Statt. Denn gesetzt, sie finde nicht Statt, so wäre die vierte Proportionale z. B. zu AB, BC und $A'B'$ nicht $B'C'$, sondern eine andere, größere oder kleinere, jedenfalls bestimmte Linie (19), etwa $B'X$, so daß $AB : BC = A'B' : B'X$ und X wäre verschieden von C'. So klein aber auch $C'X$ sein möge, es ist immer möglich, $A'B'$ in gleiche Stücke zu theilen, die kleiner als $C'X$ sind. Dies sei geschehen. Werden diese Theile fortgesetzt von B' nach X hin aufgetragen, so fällt wenigstens ein Theilpunkt (er heiße H) zwischen C' und X, und $A'B'$, $B'H$ sind commensurabel. Zieht man nun $HK \parallel C'C$, so ist es auch AB, BK, und nach dem ersten Theile des Beweises verhält sich $AB : BK = A'B' : B'H$. Vergleicht

Fig. 130.



man die Proportion $AB : BK = A'B' : B'H$

mit der obigen $AB : BC = A'B' : B'X$

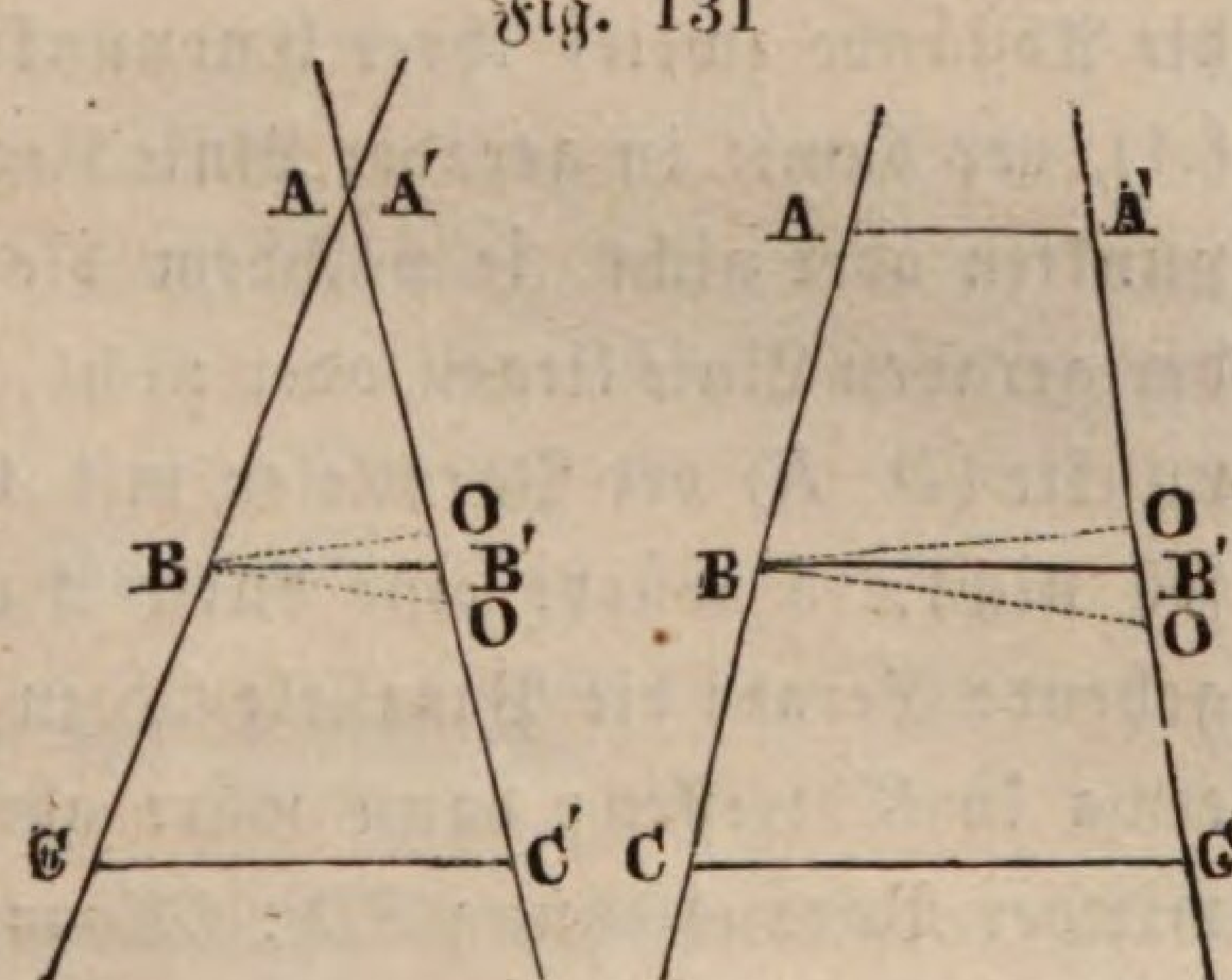
so ergiebt sich (nach 31) $BK : BC = B'H : B'X$

welche aber nach 17 nicht bestehen kann, da entweder $BK > BC$ und $B'H < B'X$ oder $BK < BC$ und $B'H > B'X$. Daher kann nur $AB : BC = A'B' : B'C'$ sein; ebenso wird bewiesen, daß $AC : BC = A'C' : B'C'$, was auch sogleich aus (26) folgt.

1. Zusatz. Jede Parallele mit einer Dreiecksseite oder mit den Parallelseiten eines Trapezes theilt, wofern sie durch die Figur geht, die beiden anderen Seiten derselben in proportionirte Stücke.

2. Zusatz. Da die Mittelglieder einer jeden Proportion vertauscht werden dürfen (25), so kann die Proportionalität der genannten Stücke auch so aufgefaßt und ausgedrückt werden, daß je zwei von einerlei Parallelen begränzte Stücke dabei in ein Verhältniß treten, also: $AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C'$.

Fig. 131

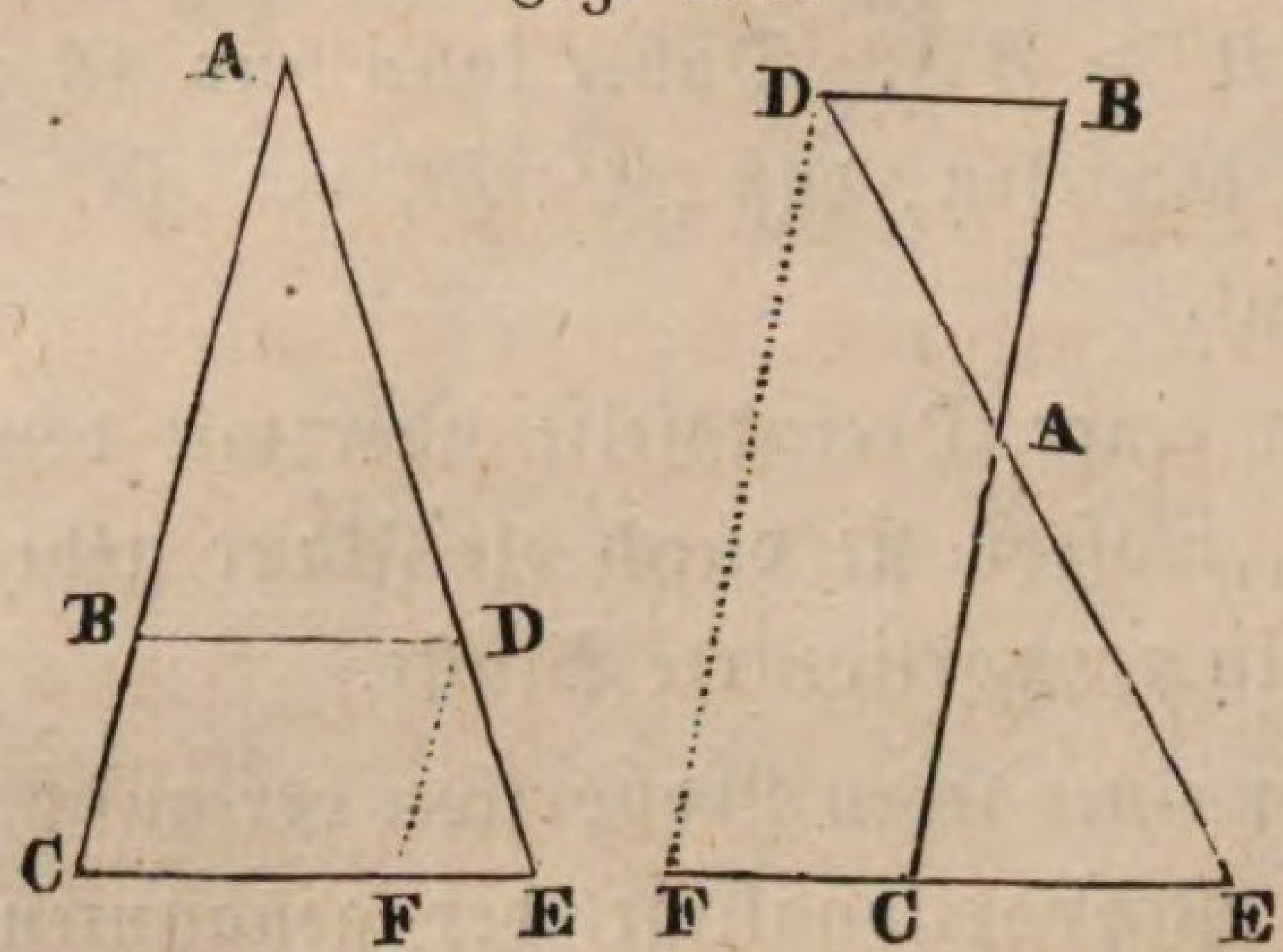


38. Satz. **Umgekehrt: Werden auf zwei Geraden durch andere Gerade der Ordnung nach proportionirte Stücke abgeschnitten, so sind diese anderen Geraden, wenn ihrer zwei, parallel; sind ihrer drei und zwei darunter parallel, so ist es auch die dritte mit ihnen.**

Die abgeschnittenen Stücke seien, wie vorhin, AB, BC, AC auf der einen, $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$ auf der anderen Linie, und es sei angenommen, daß $AB : BC = A'B' : B'C'$, außerdem, wenn der Parallelen drei sind, daß $AA' \parallel CC'$. Wäre nun nicht auch $BB' \parallel CC'$, so ließe sich durch B eine Parallele mit CC' ziehen, die alsdann von BB' verschieden sein und $A'C'$ in einem von B' verschiedenen Punkte, etwa in O, treffen würde. Dem vorigen Satze gemäß verhielte sich dann $AB : BC = A'O : OC'$; hieraus aber und aus der vorausgesetzten Proportion würde folgen $A'B' : B'C' = A'O : OC'$, was (18) nicht sein kann, weil entweder $A'B' > A'O$ und $B'C' < OC'$ oder $A'B' < A'O$ und $B'C' > OC'$. Daher muß $BB' \parallel CC'$ sein. Dasselbe findet Statt, wenn man annimmt, daß $AB : AC = A'B' : A'C'$, denn aus dieser Proportion folgt die obige.

39. Satz. **Parallellinien, die von anderen Geraden begränzt sind, verhalten sich wie die beiden Stücke einer jeden Geraden, die sich von ihrem Durchschnittspunkte an bis zu den Parallelen erstrecken.**

Fig. 132.



Die Parallelen seien *BD*, *CE*, begränzt von den in *A* sich schneidenden Geraden *BC*, *DE*; zu zeigen ist, daß *BD* : *CE* = *AB* : *AC* = *AD* : *AE*. Zu dem Ende ziehe man durch *D* eine Parallele mit *AC* (oder durch *B* eine solche mit *AE*), welche *EC* oder deren Verlängerung in *F* treffe, wende dann Satz 37 auf diese Parallelen *DF*, *AC* und die davon geschnittenen Geraden *EA*, *EC* an und bemerke, daß *BDFC* ein Parallelogramm und deßhalb *CF* = *BD* ist.

Zusatz. Umgekehrt: Verhalten sich zwei Parallelen (*BD*, *CE*) wie die Abstände zweier ihrer Endpunkte (*B*, *C*) von einem dritten Punkt (*A*), der damit in gerader Linie liegt, und zwar zwischen jenen Endpunkten oder nicht, je nachdem die Parallelen zu verschiedenen Seiten der geraden Linie liegen oder nicht, so sind auch die zwei übrigen Endpunkte (*D*, *E*) der Parallelen mit *A* in gerader Linie. Denn wäre dieses nicht, so würde eine durch *A* und einen dieser Endpunkte z. B. *D* gehende Gerade die Parallele *CE* in einem von *E* verschiedenen Punkte, etwa in *E'* treffen; dann wäre aber *BD* : *CE'* = *AB* : *AC*, was sich mit der Voraussetzung *BD* : *CE* = *AB* : *AC* und (19) nicht reimt.

40. Satz. Gerade Linien, die sich in einem Punkte treffen (Fig. 133) **oder kreuzen** (Fig. 134), **schneiden auf zwei Parallelen proportionirte Stücke zwischen sich ab.**

Fig. 133.

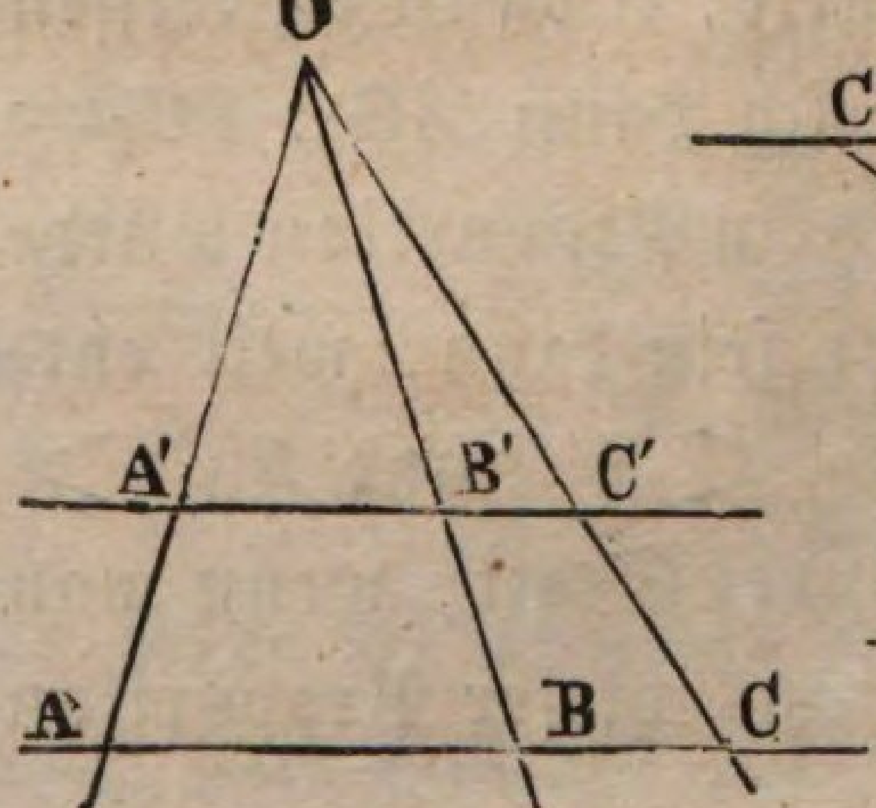
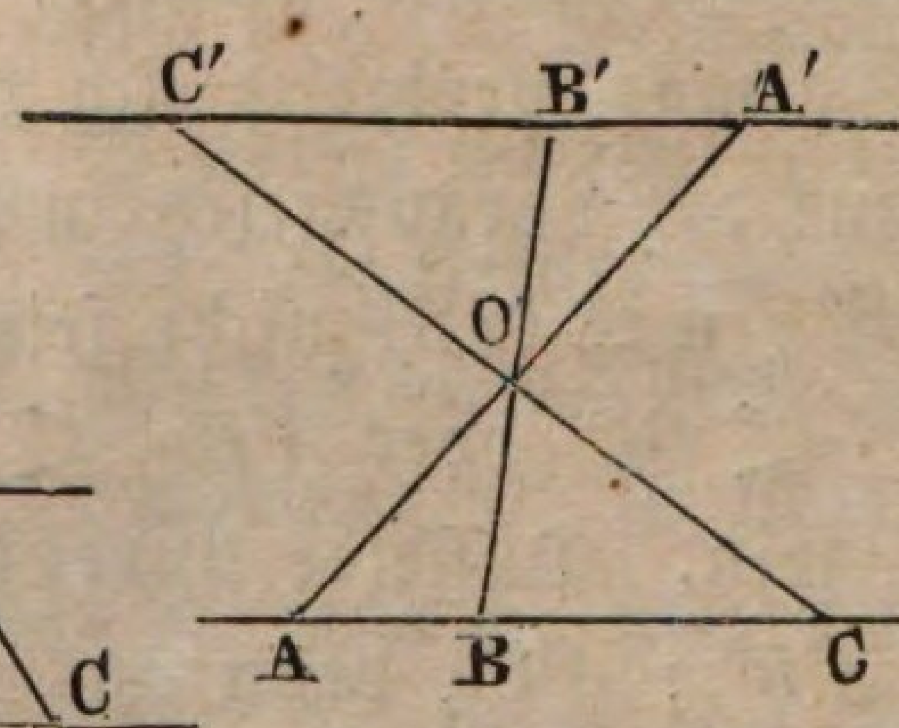


Fig. 134.



Der Punkt, in welchem drei (oder mehr) Gerade sich treffen oder kreuzen, sei *O*; die Stücke, welche jene Geraden auf einer von zwei Parallelen zwischen sich abschneiden, seien *AB*, *BC*, *AC*, die entsprechenden auf der anderen Parallelen *A'B'*, *B'C'*, *A'C'*. Es ist zunächst zu zeigen, daß *AB* : *A'B'* = *BC* : *B'C'* = *AC* : *A'C'*, woraus dann weiter folgen wird *AB* : *BC* : *AC* = *A'B'* : *B'C'* : *A'C'*. Zu dem Ende wende man den vorigen Satz auf je zwei

der durch O gehenden Geraden und die dazwischen liegenden Stücke der Parallelen an und stelle die gleichen Verhältnisse zusammen.

1. Zusatz. Umgekehrt: Werden auf zwei Parallellinien durch andere Geraden Stücke abgeschnitten, die entsprechend proportionirt sind, so treffen sich diese Geraden in einem Punkte. Man nehme an, O sei der Punkt, worin zwei der Geraden, z. B. AA' und BB' sich treffen, und beweise mit Berufung auf 39, Zusatz, daß O, C, C' in gerader Linie liegen.

2. Zusatz. Schneiden drei in einem Punkte sich treffende Geraden auf zwei anderen Geraden proportionirte Stücke zwischen sich ab, so sind diese letzteren Geraden parallel.

Der Beweis ist, mit Berufung auf Satz 38, indirect zu führen und wird dem Schüler überlassen.

Vierter Abschnitt.

Aehnlichkeit der Dreiecke.

41. Aehnlichkeit im geometrischen Sinne besteht in der Uebereinstimmung der Gestalt zweier Figuren, ohne Rücksicht auf deren absolute Größe, und zwei Figuren überhaupt sind ähnlich, wenn sie in Allem, was ihre Gestalt bestimmt, gänzlich übereinstimmen. Beim Dreiecke insbesondere hängt die Gestalt von den Winkeln desselben und dem Verhältnisse der Seiten ab, daher zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn die Winkel beider gleich groß sind und jedes Paar gleicher Winkel von proportionirten Seiten eingeschlossen wird. Die Möglichkeit solcher Dreiecke erhellt aus Satz 37.

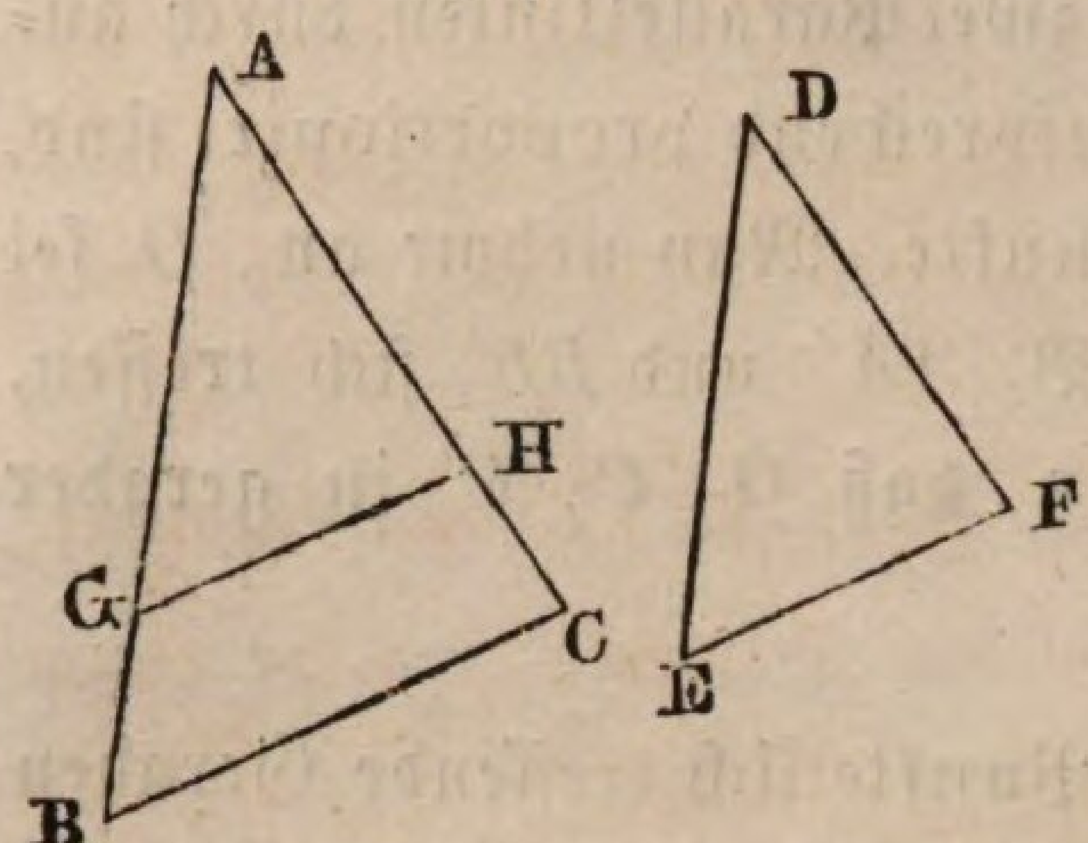
Die den gleichen Winkeln ähnlicher Dreiecke gegenüber liegenden Seiten werden homologe genannt. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist $\sim$.

Aus dem aufgestellten Begriffe folgt unmittelbar und allgemein, daß zwei Figuren, deren jede einer dritten ähnlich ist, auch unter sich ähnlich sind.

42. **Satz.** **Sind die Winkel eines Dreiecks den Winkeln eines**

anderen gleich, so sind die homologen Seiten proportionirt, die Dreiecke also ähnlich.

Fig. 135.



Beweis. ABC und DEF seien zwei Dreiecke, in welchen $\measuredangle A = D$, $\measuredangle B = E$, mithin auch $\measuredangle C = F$, dann wird $AB : DE = AC : DF = BC : EF$ sein. Nimmt man nämlich auf AB von A an ein Stück $AG = DE$ und zieht $GH \parallel BC$, so ist $\measuredangle AGH = B = E$, daher, und weil auch $A = D$, $AG = DE$, ist $\triangle AGH$ congruent mit DEF, $AH = DF$, $GH = EF$.

Daraus, daß GH mit BC parallel ist, folgt ferner (nach Satz 37 und 39), daß

$$AB : AG = AC : AH = BC : GH,$$

also auch, wenn man für die Consequenten die gleichen Seiten des Dreiecks DEF setzt.

$$AB : DE = AC : DF = BC : EF.$$

1. Zusatz. Zwei Dreiecke, deren Seiten paarweise parallel sind, oder auch solche, deren Seiten paarweise senkrecht auf einander stehen, sind ähnlich (I. 23 u. 24).

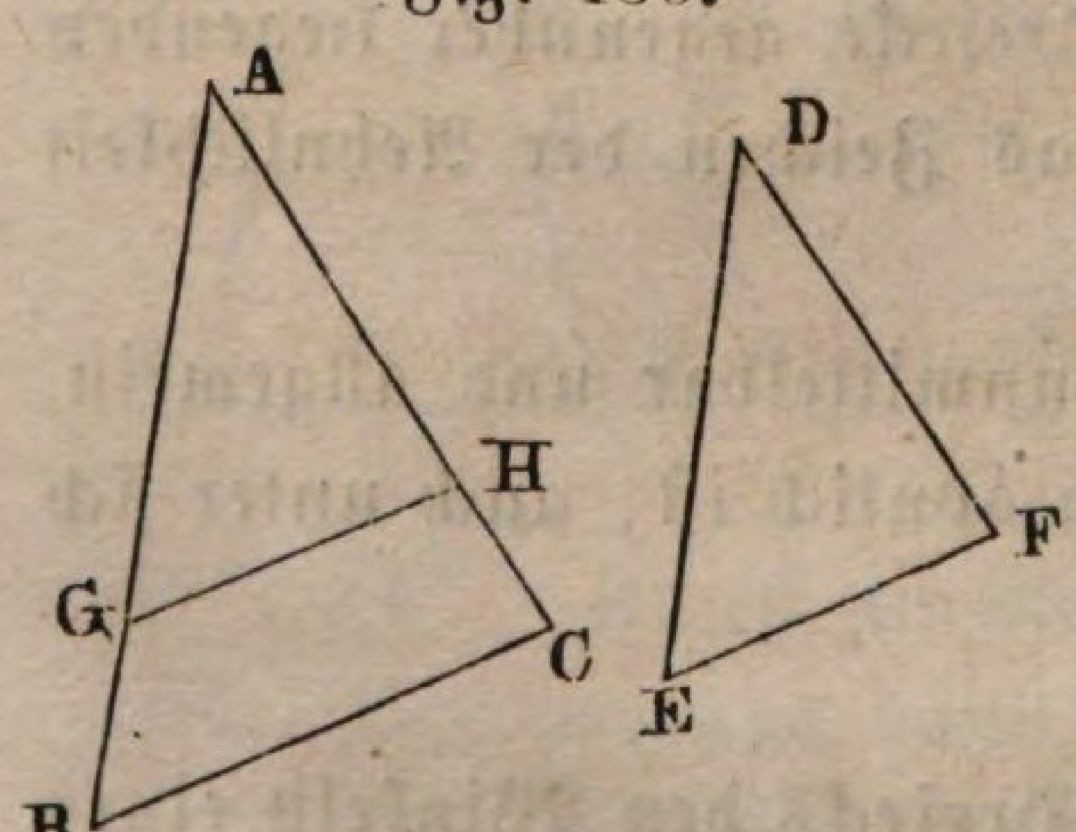
2. Zusatz. Da in jeder Proportion die inneren und auch die äußeren Glieder vertauscht werden dürfen, so können bei ähnlichen Dreiecken zwei Paar homologer Seiten in doppelter Folge oder Weise proportionirt sein. Aus den obigen Proportionen folgen nämlich diese anderen:

$$AB : AC = DE : DF, \quad AC : BC = DF : EF,$$

oder kürzer geschrieben:

$$AB : AC : BC = DE : DF : EF.$$

Fig. 136.



43. Satz. Sind zwei Seiten eines Dreiecks mit zweien Seiten eines anderen proportionirt und die eingeschlossenen Winkel gleich, so sind auch die übrigen Winkel paarweise gleich, die Dreiecke ähnlich.

Beweis. Vorausgesetzt, in den Dreiecken ABC und DEF sei $\measuredangle A = D$

und $AB : DE = AC : DF$. Macht man dieselbe Construction wie vorhin, so ist $AB : AG = AC : AH$. Hieraus und aus der vorausgesetzten Proportion folgt aber (19, Zus.), daß $AH = DF$. Die Dreiecke AGH und DEF sind also congruent, und deßhalb ist $\sphericalangle E = AGH = B$, $\sphericalangle F = AHG = C$; $EF = GH$. Aus diesem letzteren folgt noch $BC : EF = AB : DE$.

44. **Satz. Sind die drei Seiten eines Dreiecks den Seiten eines anderen proportionirt, so sind die Winkel der Dreiecke, welche homologen Seiten gegenüber liegen, gleich, diese ähnlich.**

Die Voraussetzung ist nun:

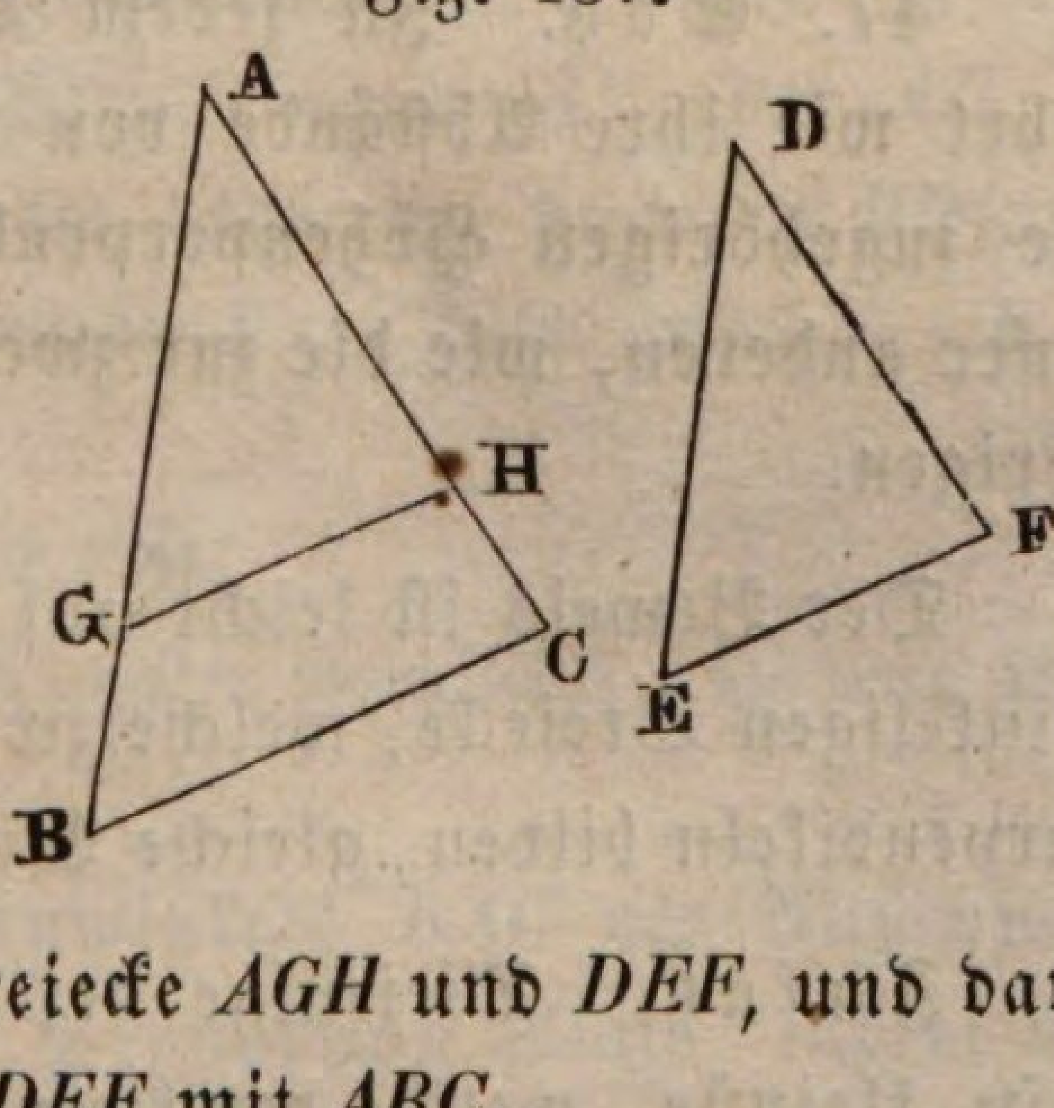
$$AB : DE = AC : DF = BC : EF.$$

Macht man dieselbe Construction wie vorher und vergleicht man diese Proportionen einzeln mit den im zweitvorhergehenden Satze schon angeführten $AB : AG = AC : AH = BC : GH$, so folgt nach 19, Zusatz, daß, außer $AG = DE$, auch $AH = DF$, $GH = EF$. Deßhalb ist $\triangle AGH \cong \triangle DEF$, und also $\sphericalangle D = A$, $\sphericalangle E = AGH = B$, $\sphericalangle F = AHG = C$, daher $\triangle DEF \sim ABC$.

45. **Satz. Sind zwei Seiten eines Dreiecks zweien Seiten eines anderen proportionirt und liegen dabei einem Paar dieser Seiten (die entweder Antecedenten oder Consequenten der Proportion sind), gleiche Winkel, dem anderen Paar aber Winkel von einerlei Art gegenüber, so sind die Dreiecke ähnlich.**

Beweis. In den Dreiecken ABC, DEF sei $AB : DE = BC : EF$, $\sphericalangle A = D$, $\sphericalangle C$ und F von einerlei Art, d. i. zugleich spitz oder stumpf. Bei Anwendung derselben Hülfslinie GH, wie in 42, 43 und 44 ist $AB : AG = BC : GH$, daher $GH = EF$. Hieraus, und da $AG = DE$, $\sphericalangle A = D$, $\sphericalangle AHG = C$, also von derselben Art wie F, folgt nach II. 11 wieder die Congruenz der Dreiecke AGH und DEF, und daraus weiter die Aehnlichkeit des Dreiecks DEF mit ABC.

Fig. 137.



46. Vergleicht man die vorstehenden vier Sätze über die Aehnlichkeit der Dreiecke mit den entsprechenden vier Sätzen: II. 8, 9, 10, 11 über die Congruenz nach der Ordnung, in welcher letztere zu den

Beweisen der ersteren gebraucht werden, so ergiebt sich folgende Gegenüberstellung der Bedingungen, unter welchen Congruenz und Aehnlichkeit Statt finden.

Dreiecke sind congruent:	**Dreiecke sind ähnlich:**
wenn sie übereinstimmen	
1. in zwei Winkeln und einer Seite,	in zwei Winkeln,
2. in einem Winkel und der Länge der zwei einschließenden Seiten,	in einem Winkel und dem Verhältnisse der einschließenden Seiten,
3. in der Länge der drei Seiten,	in dem Verhältnisse zweier Seiten zur dritten,
4. in der Länge zweier Seiten, der Größe eines der gegenüber stehenden Winkel und der Art des anderen.	in dem Verhältnisse zweier Seiten, der Größe u. s. w. wie nebenstehend.

Die Bedingungen der Aehnlichkeit sind daher denen der Congruenz nahe gleichlautend, und diese gehen in jene über, wenn man in 1) die Seite wegläßt, bei 2. 3. und 4. aber statt der gleichen Länge der Seiten deren gleiches Verhältniß bedingt. In allen vier Fällen fordert die Aehnlichkeit eine Gleichheit weniger zur Bedingung als die Congruenz.

47. Satz. **In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten umgekehrt wie ihre Abstände von der gegenüber liegenden Ecke oder wie die zugehörigen Höhenperpendikel, „umgekehrt“ d. i. eine Seite zu einer anderen, wie die zur zweiten gehörige Höhe zu der zur ersten gehörigen.**

Der Beweis ist leicht auf 42 zu gründen, indem die beiden rechtwinkeligen Dreiecke, welche zwei Seiten des Dreiecks mit ihren Höhenperpendikeln bilden, gleiche Winkel haben.

Zusatz. Diejenige der drei Höhen eines Dreiecks ist die größte, resp. kleinste, welche der kleinsten, resp. größten Seite als Grundlinie angehört.

48. Satz. **In ähnlichen Dreiecken verhalten sich zwei homologe Seiten, als Grundlinien betrachtet, wie die zugehörigen Höhen.**

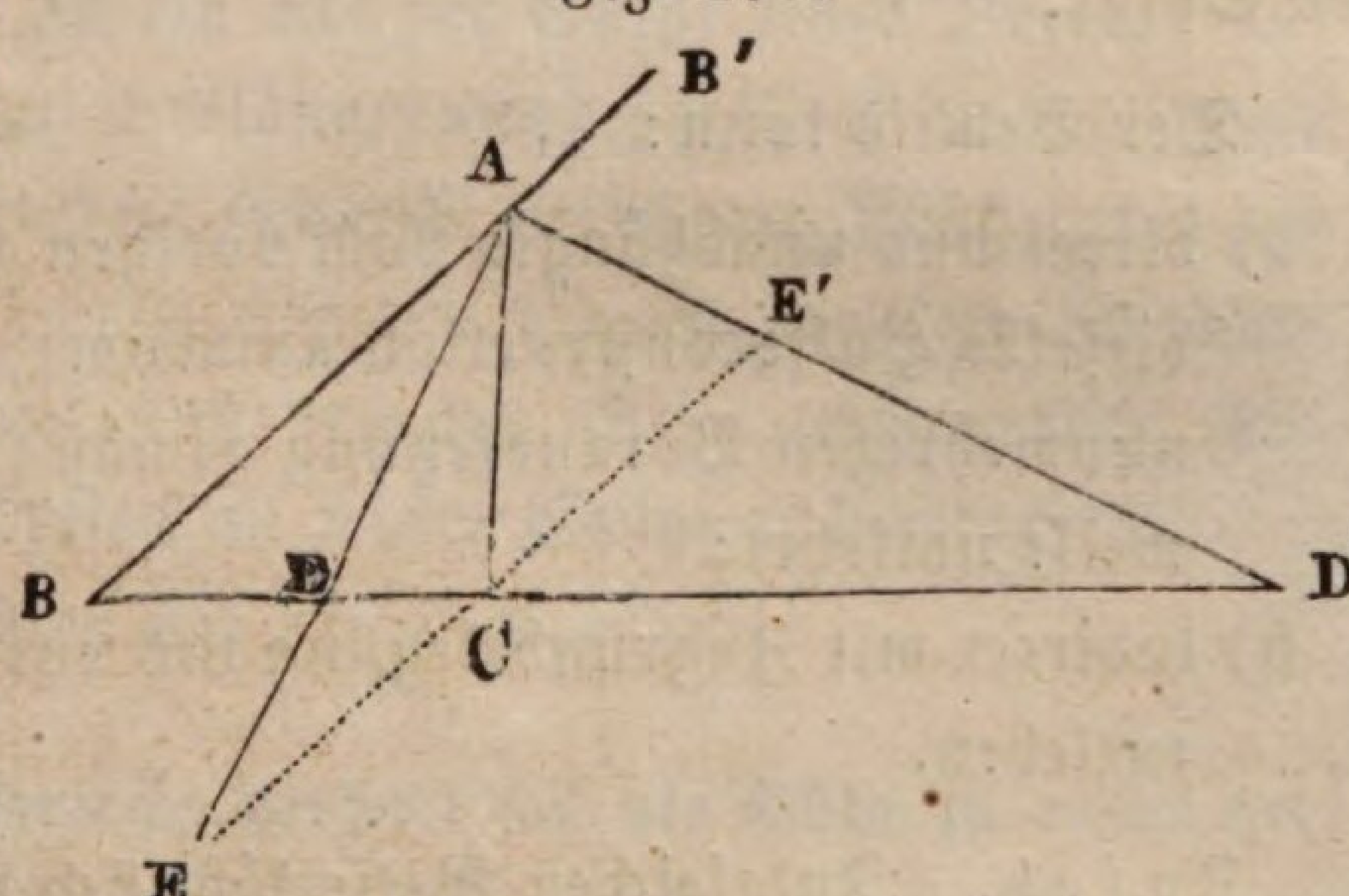
Denn die Grundlinien verhalten sich zunächst wie zwei andere homologe Seiten, diese wie die Höhen.

Fünfter Abschnitt.

Proportionen am einzelnen Dreiecke und am Kreise.

49. **Halbirt eine gerade Linie einen (inneren) Winkel eines Dreiecks, so theilt sie die gegenüber liegende Seite in zwei Stücke, die sich zu einander, wie die an ihnen liegenden Seiten des Dreiecks verhalten.**

Fig. 138.



Beweis. Im Dreiecke *ABC* sei der Winkel *BAC* durch *AD* halbirt. Die Seite *BC* wird dadurch in die Stücke *BD*, *DC* getheilt, von denen zu beweisen ist, daß

$BD : DC = BA : AC.$

Ist das Dreieck gleichschenkelig, nämlich $AB = AC$, so ergiebt sich die Richtigkeit der Proportion aus der alsdann nach II. 8 stattfindenden Gleichheit der Stücke *BD*, *DC*.

Sind aber *AB* und *AC* ungleich, so ziehe man durch einen der zwei Punkte *B* oder *C*, z. B. durch *C* eine Parallele mit *AB* oder *AD*, es sei mit *AB*. Dieselbe treffe die verlängerte *AD* in *E*; dann ist $BD : DC = BA : EC$, zugleich aber ist $\sphericalangle\, CED = DAB = DAC$, mithin $CE = CA$, und also auch:

$$BD : DC = BA : AC.$$

Man versuche den Beweis auch mittelst zweier Parallelen, die man durch *D* mit *AB* oder *AC* ziehen kann.

1. Zusatz. Wird statt des Innenwinkels *BAC* der Außenwinkel *B′AC* halbirt, so findet eine analoge Proportion Statt, indem nun die Halbirungslinie (den Fall ausgenommen, wo $AB = AC$) die Verlängerung der Seite *BC* trifft, und der Punkt *D′*, worin dieses geschieht, an die Stelle des Punktes *D* tritt, so daß

$$BD' : D'C = BA : AC$$

sein wird. Der Beweis ist wörtlich derselbe wie vorhin. Wie lassen sich beide Proportionen unter einen Satzausdruck bringen?

2. Zusatz. Sind die drei Seiten des Dreiecks ABC in Zahlen nach einem als Einheit genommenen Maße gegeben, und $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, so sind die vier in Rede stehenden Segmente, wenn $c > b$, durch folgende Ausdrücke zu berechnen:

$$BD = \frac{ca}{b + c};\ DC = \frac{ba}{b + c};\ BD' = \frac{ca}{c - b};\ D'C = \frac{ba}{c - b}.$$

50. Satz. **Umgekehrt: Theilt eine von der Spitze eines Dreiecks aus gezogene gerade Linie die Grundlinie in zwei, den an ihnen liegenden Seiten proportionirte, Stücke, so halbirt sie den Winkel an der Spitze.**

Der Beweis kann:

a) direct und unabhängig vom vorigen geführt werden, indem man dieselbe Hülfsconstruction anwendet, die Schlußfolge jedoch der nunmehrigen Voraussetzung gemäß ($BD : DC = AB : AC$) theilweise umkehrt;

b) indirect mit Zugrundelegung des vorigen. Die erste Art ist vorzuziehen.

Zusatz. In gleicher Weise läßt sich das von der Halbirungslinie des Außenwinkels Erwiesene umkehren: Trifft nämlich die von der Spitze eines Dreiecks ausgehende gerade Linie die Verlängerung der Grundlinie in einem Punkte, dessen Abstände von den Endpunkten dieser Grundlinie sich wie die an ihnen liegenden Dreiecks-Seiten verhalten, so halbirt sie den Außenwinkel an der Spitze.

51. Satz. **Im rechtwinkeligen Dreiecke ist:**

a) das aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Loth die mittlere Proportionale zwischen den beiden dadurch gebildeten Abschnitten der Hypotenuse;

b) jede der Katheten ist die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Abschnitte.

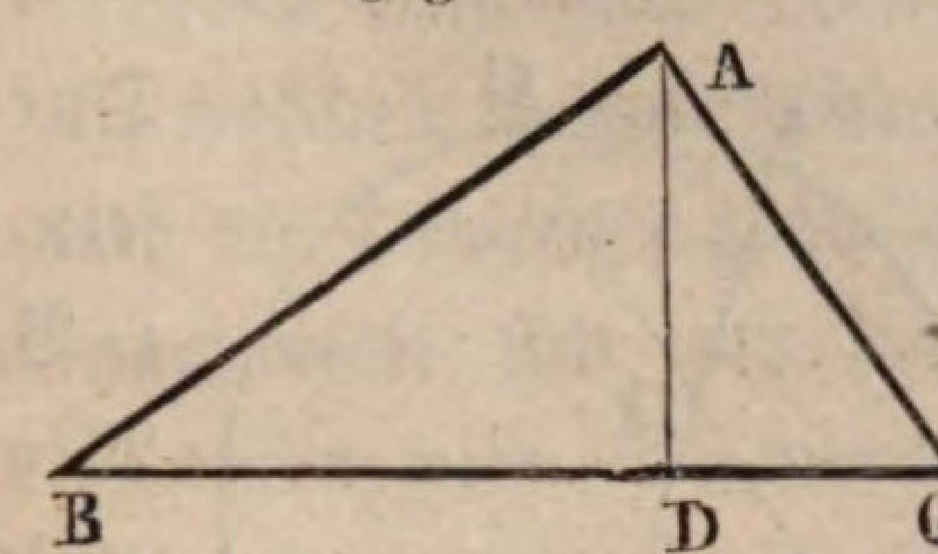
Das rechtwinkelige Dreieck sei ABC, A die Spitze des rechten Winkels, das gefällte Loth AD; es ist zu zeigen, daß:

1) $BD : AD = AD : DC$;

2) $BC : BA = BA : BD$, und $BC : CA = CA : CD$.

Zu dem Ende weise man erst (nach 42) die Aehnlichkeit der Dreiecke *BAC*, *BAD*, *DAC* nach, bestimme die homologen Seiten und stelle die gleichen Verhältnisse derselben zusammen. Die Vergleichung der Dreiecke *BAD*, *ADC* liefert die erste der drei obigen Proportionen, das Dreieck-Paar *ABC*, *DAB* die zweite, das Paar *ABC*, *ACD* die dritte.

Fig. 139.



1. Zusatz. Das Loth ist noch die vierte Proportionale zur Hypotenuse und den beiden Katheten, was auch unmittelbar aus 47 hervorgeht.

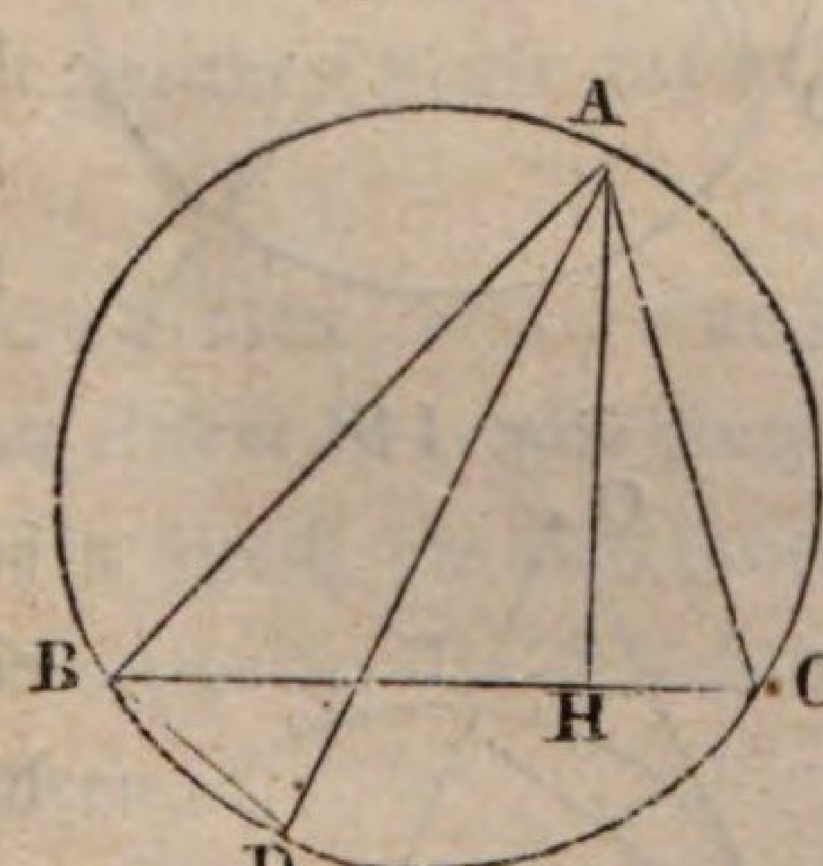
2. Zusatz. Umgekehrt: Ist ein aus der Spitze eines Dreiecks auf die Grundlinie (nicht auf deren Verlängerung) gefälltes Loth mittlere Proportionale zwischen den beiden dadurch gebildeten Abschnitten der Grundlinie, oder ist eine der beiden übrigen Seiten mittlere Proportionale zwischen der Grundlinie und dem der Seite anliegenden Abschnitte derselben, so ist das Dreieck an seiner Spitze rechtwinkelig.

Der Beweis ist direct zu führen und auf 43 zu gründen.

52. Satz. **In jedem Dreiecke verhält sich die Höhe zu einer der beiden Dreiecks-Seiten, worauf sie nicht senkrecht steht, wie die andere zum Durchmesser des umschriebenen Kreises.**

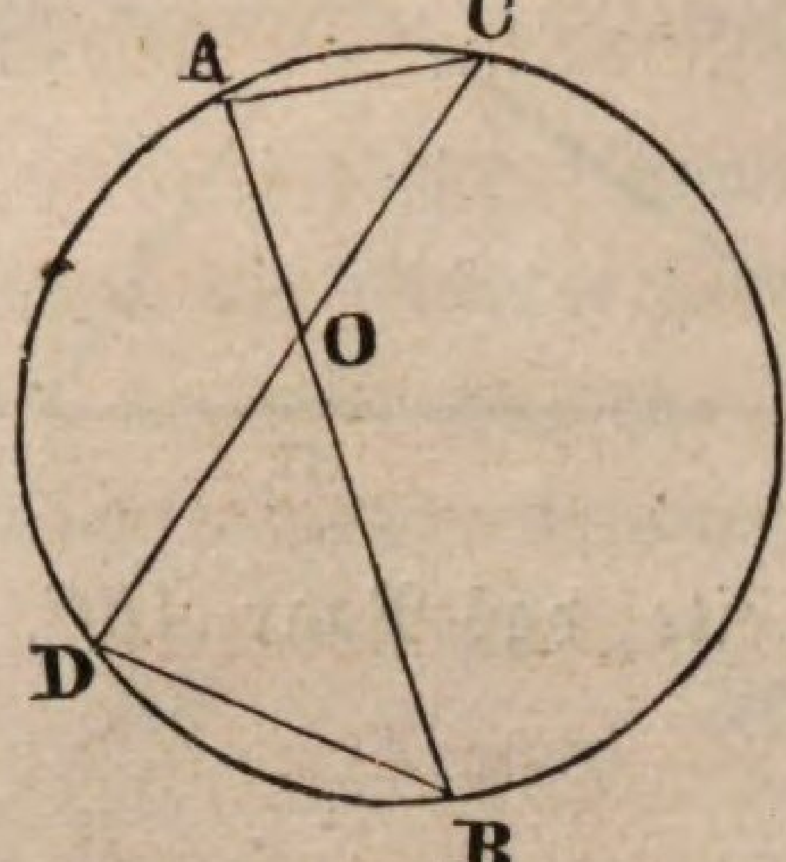
Das Dreieck sei *ABC* und aus *A* auf *BC* der Höhenperpendikel *AH* gefällt; auch sei dem Dreieck ein Kreis umschrieben und *AD* der Durchmesser dieses Kreises; dann wird $AH : AB = AC : AD$ sein. Zum Beweise verbinde man *D* mit *B* oder *C* und weise nach, daß die Dreiecke *ABD* und *AHC* oder die Dreiecke *ADC* und *ABH* gleiche Winkel haben, woraus dann die ausgesprochene Proportionalität nach 42 unmittelbar folgt.

Fig. 140.



53. Satz. **Durchschneiden sich zwei Sehnen innerhalb des Kreises, so sind die vier Stücke derselben umgekehrt proportionirt.** (Die beiden Stücke der einen Sehne bilden die inneren, die Stücke der anderen die äußeren Glieder der Proportion.)

Fig. 141.



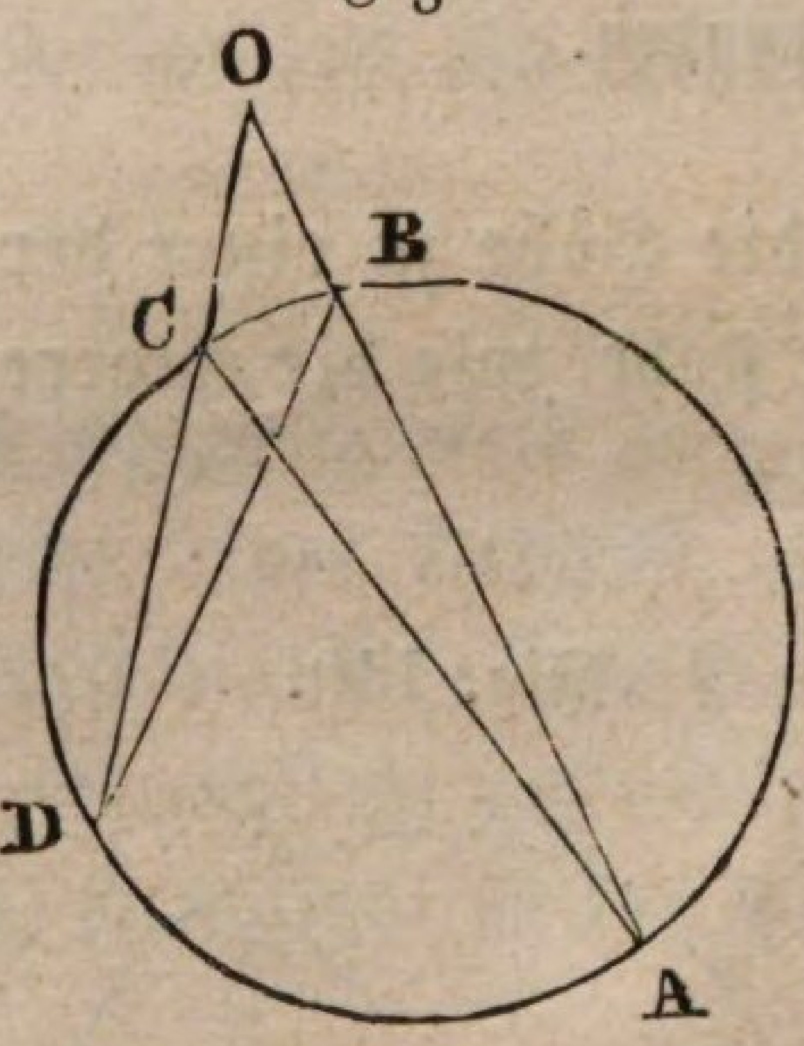
Die Sehnen seien AB und CD; ist O ihr Durchschnittspunkt, so wird $AO : CO = DO : BO$ sein. Zum Beweise verbinde man die Endpunkte, z. B. A mit C, D mit B, und zeige, daß zwei der Winkel bei den Dreiecken AOC, DOB paarweise gleich sind, worauf (aus 42) sogleich die zu beweisende Proportion folgt.

1. Zusatz. Wird also eine Sehne durch eine zweite halbirt, so ist die Hälfte der ersten die mittlere Proportionale zwischen den beiden Theilen der anderen.

2. Zusatz. Ein auf dem Durchmesser eines Kreises bis zum Umfange errichtetes Perpendikel ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Stücken des Durchmessers.

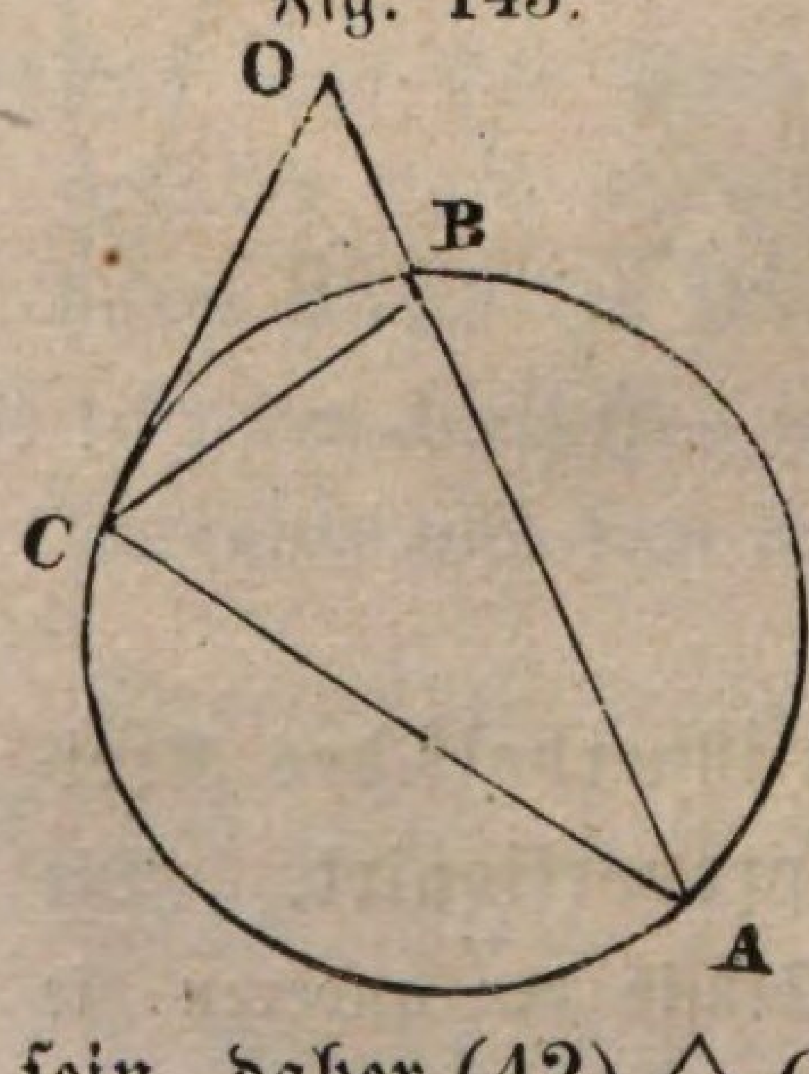
54. Satz. **Gehen von einem Punkte außerhalb des Kreises zwei Secanten an denselben, so verhalten dieselben sich umgekehrt wie ihre äußeren** (d. i. außerhalb des Kreises liegenden) **Abschnitte.**

Fig. 142.



Die Secanten seien OA, OD, die äußeren Abschnitte derselben OB, OC; dann ist $OA : OD = OC : OB$. Denn verbindet man, wie im vorigen Satze, A mit C, B mit D, so ergeben sich wie dort die, wegen Gleichheit ihrer Winkel, ähnlichen Dreiecke OAC, OBD, deren homologe Seiten sofort die zu beweisende Proportion liefern. Will man den Beweis mittelst der Verbindungslinien BC, DA führen, so hat man sich, um die Gleichheit der Winkel zu zeigen, auf III. 21 zu berufen.

Fig. 143.



55. Satz. **Gehen von einem Punkte außerhalb des Kreises eine Secante an denselben und eine Tangente, diese bis zur Berührung, so ist die Tangente mittlere Proportionale zwischen der Secante und deren äußerem Abschnitte.**

Es sei OA die Secante, OB ihr äußerer Abschnitt, OC die Tangente, und C der Berührungspunkt der letzteren. Verbindet man diesen mit A und B, so wird nach III. 20, $\sphericalangle\, OCB = OAC$ sein, daher (42) $\triangle\, OCB \sim OAC$ und $OA : OC = OC : OB$.

56. **Bemerkung.** Die drei vorhergehenden Sätze sind eigentlich nur besondere Fälle eines allgemeineren, in welchen sie zusammenfließen, sobald man die Sehnen, Secanten und die Tangente gemeinschaftlich als gerade Linien betrachtet, die paarweise sich und eine Kreisperipherie treffen. Stets sind dann diejenigen vier Segmente, welche zwischen dem Durchschnittspunkte dieser Geraden und dem Kreisumfange liegen, umgekehrt proportionirt, so daß die beiden Segmente der einen Linie die äußeren, die der anderen die mittleren Glieder der Proportion bilden. Die Tangente ist dabei als eine gerade Linie anzusehen, deren zwei Durchschnittspunkte mit dem Kreisumfange ineinander liegen.

57. **Umkehrungen:**

1) Kreuzen zwei gerade Linien sich so, daß die vier Stücke derselben zwischen dem Durchschnittspunkte und den Endpunkten umgekehrt proportionirt sind, so läßt sich durch diese vier Endpunkte eine Kreislinie beschreiben.

2) Verhalten sich zwei von einem Punkte auslaufende begränzte gerade Linien umgekehrt wie zwei in diesem Punkte anfangende Abschnitte derselben, so läßt sich durch die vier Endpunkte der beiden geraden Linien und der beiden Abschnitte eine Kreisperipherie ziehen.

3) Ist ein auf einer geraden Linie zwischen den Endpunkten derselben errichtetes Loth mittlere Proportionale zwischen den beiden Stücken, in welche die Linie durch das Loth getheilt wird, so liegt der Endpunkt des Loths im Umfange eines über der geraden Linie beschriebenen Halbkreises.

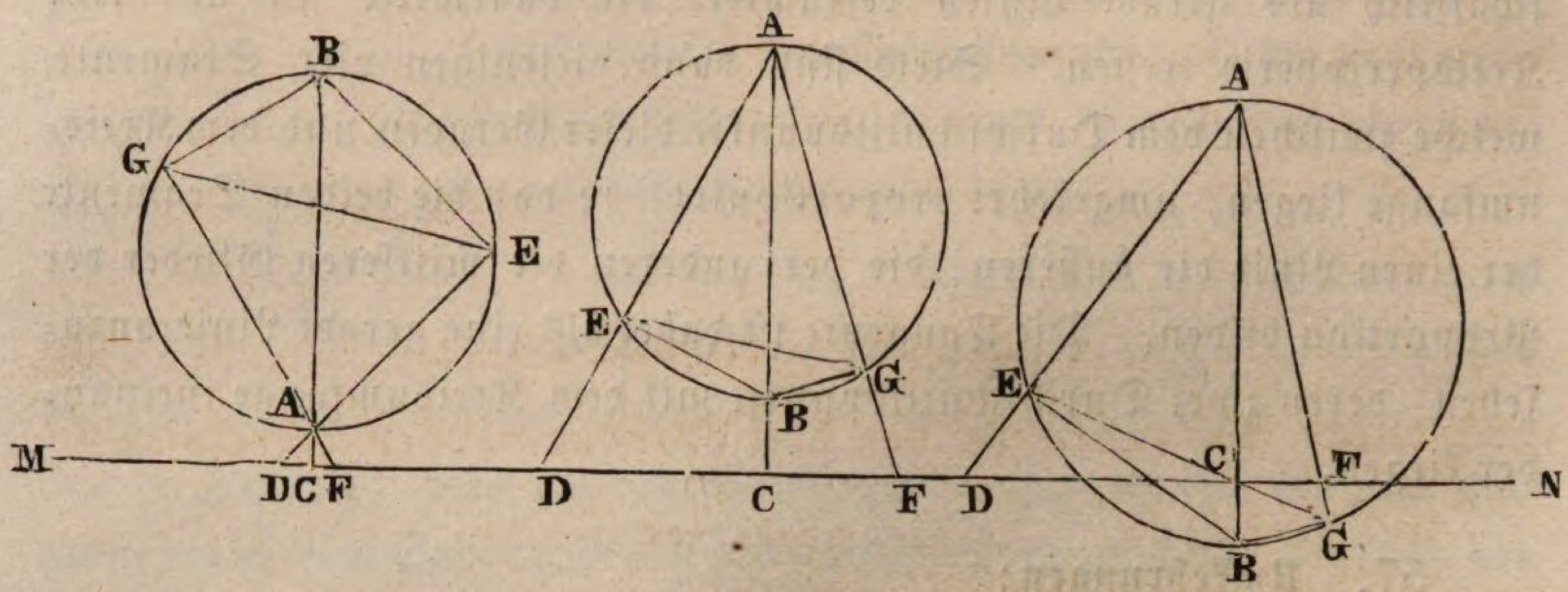
4) Gehen von einem Punkte aus zwei gerade Linien, deren eine die mittlere Proportionale zwischen der anderen und einem in jenem Punkte anfangenden Segmente derselben ist, so wird ein durch die Endpunkte der beiden geraden Linien und des Segments der zweiten beschriebener Kreis die erste Linie in ihrem Endpunkte berühren.

Die Beweise dieser Umkehrungen sind indirect zu führen und werden als einfach der Selbstübung überlassen.

58. **Satz. Steht ein Kreisdurchmesser (AB) auf einer geraden Linie (MN) senkrecht, und zieht man durch einen der Endpunkte (A) des Durchmessers zwei gerade Linien (AD, AF), so sind die vier Stücke derselben, welche einerseits vom Endpunkte (A) des Durchmessers,**

andererseits von der geraden Linie (MN) und dem Kreisumfange begränzt werden, umgekehrt proportionirt.

Fig. 144.

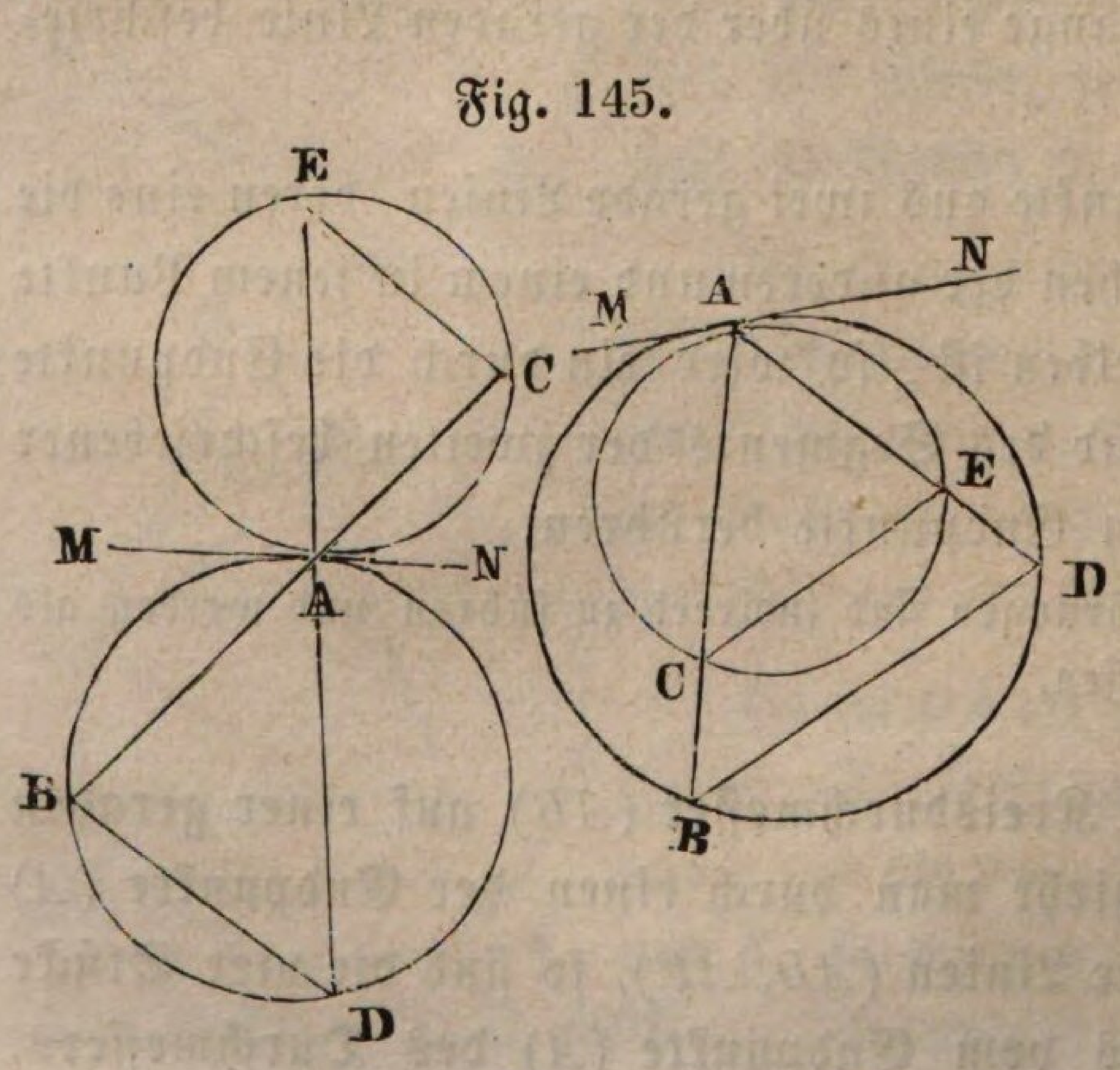


Der Durchmesser AB oder dessen Verlängerung treffe MN in C, die durch A gezogenen Geraden mögen den Umfang in E, G, die MN in D, F treffen; verbindet man B mit G und E, so ist leicht zu erweisen, daß $\sphericalangle AGE = ADF$, $\sphericalangle AEG = AFD$, daher (42) $\triangle\ AGE \sim ADF$ und $AD : AG = AF : AE$.

Zusatz. Eine der Linien kann BAC selbst sein, so daß auch $AD : AB = AC : AE$.

59. Satz. **Gehen durch den Berührungspunkt zweier Kreise zwei gerade Linien, so sind die vier Stücke derselben zwischen dem Berührungspunkte und den Umfängen der Kreise der Ordnung nach proportionirt.**

Fig. 145.



Der Berührungspunkt sei A; die durch ihn gehenden Geraden seien BC und DE, die den einen Kreis in B und D, den andern in C und E treffen, es wird, die Berührung der Kreise mag eine äußere oder innere sein, die Proportion $AB : AC = AD : AE$ Statt finden.

Zum Beweise ziehe man durch A eine gemeinschaftliche Tangente MN an die

beiden Kreise und zeige mit Hülfe von III, 20, daß $\sphericalangle ABD = ACE$ oder $\sphericalangle ADB = AEC$, woraus dann durch Anwendung von Satz 42 obige Proportion hervorgeht.

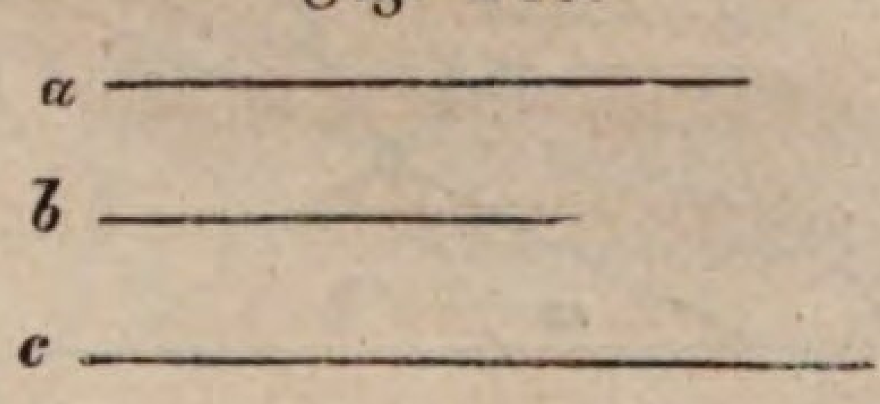
Zusatz. Die Sehnen BD, CE, welche die Endpunkte der genannten Stücke verbinden, sind parallel.

Sechster Abschnitt.

Elementar-Aufgaben zu den drei vorhergehenden Abschnitten.

60. Aufgabe. **Zu drei gegebenen geraden Linien die vierte Proportionale zu finden.**

Fig. 146.



Die drei gegebenen Linien seien a, b, c, a sei die erste Proportionale, die vierte zu suchende x, so daß

$$a : b = c : x.$$

Die früheren Sätze bieten mehrfache Mittel zur Auflösung.

1) Will man diese zunächst auf Satz 37 gründen, so hat man nur die Stücke a, b, c auf zwei sich treffenden, übrigens beliebigen geraden Linien so abzutragen, wie die Anwendung jenes Satzes es fordert, also a und b auf einer, c auf der anderen Linie, dabei alle drei, oder wenigstens zwei, nämlich a und c vom Durchschnittspunkte an. Es sei also z. B. $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ genommen. Verbindet man nun A mit C und zieht durch B eine Parallele mit AC, so schneidet diese auf OC ein Stück $OX = x$ ab. Wäre dagegen statt OB das Stück $AB = b$ genommen worden, so wäre auch nicht OX, sondern CX die vierte Proportionale.

Fig. 147.

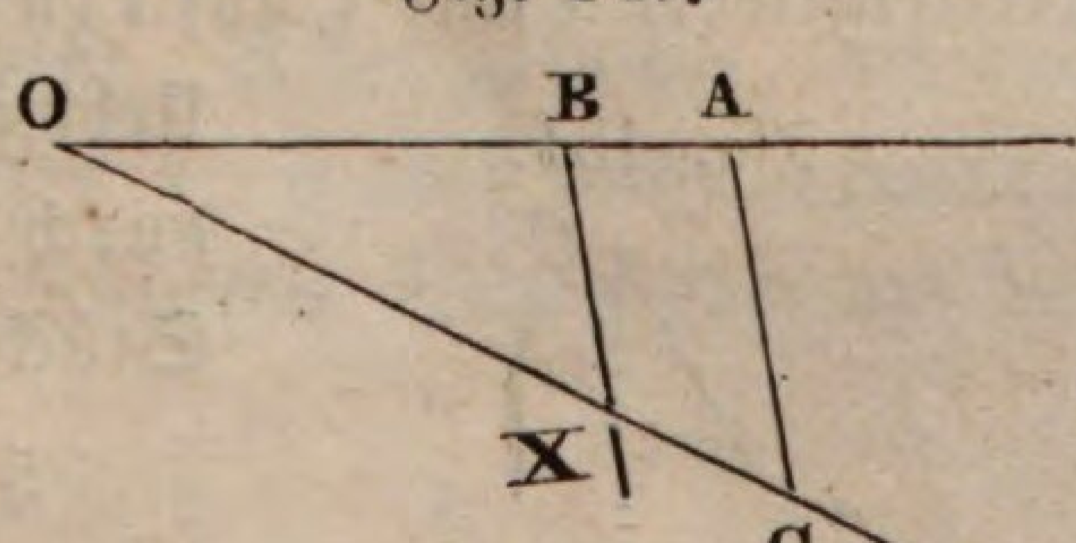
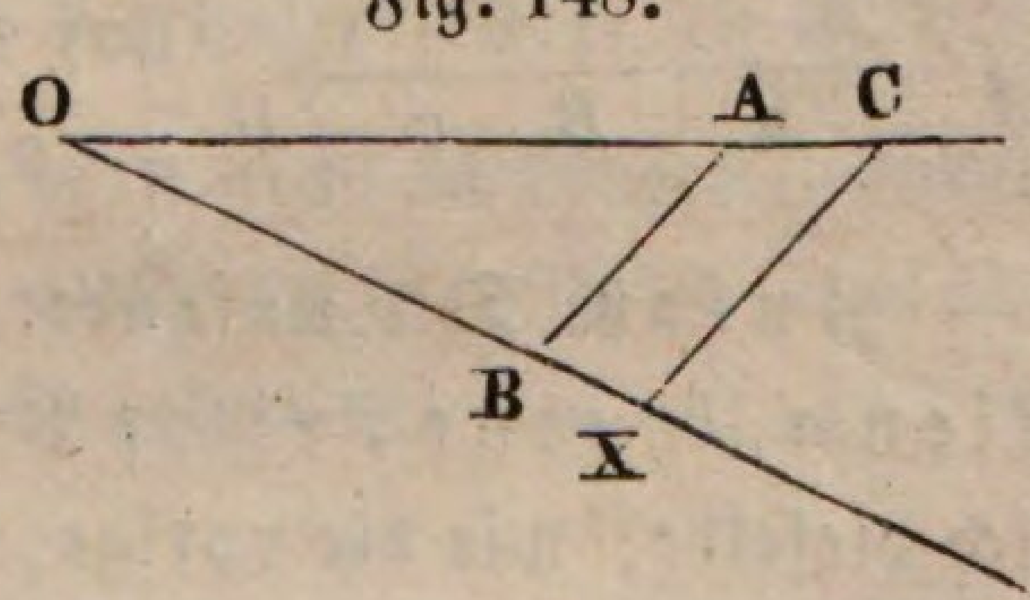


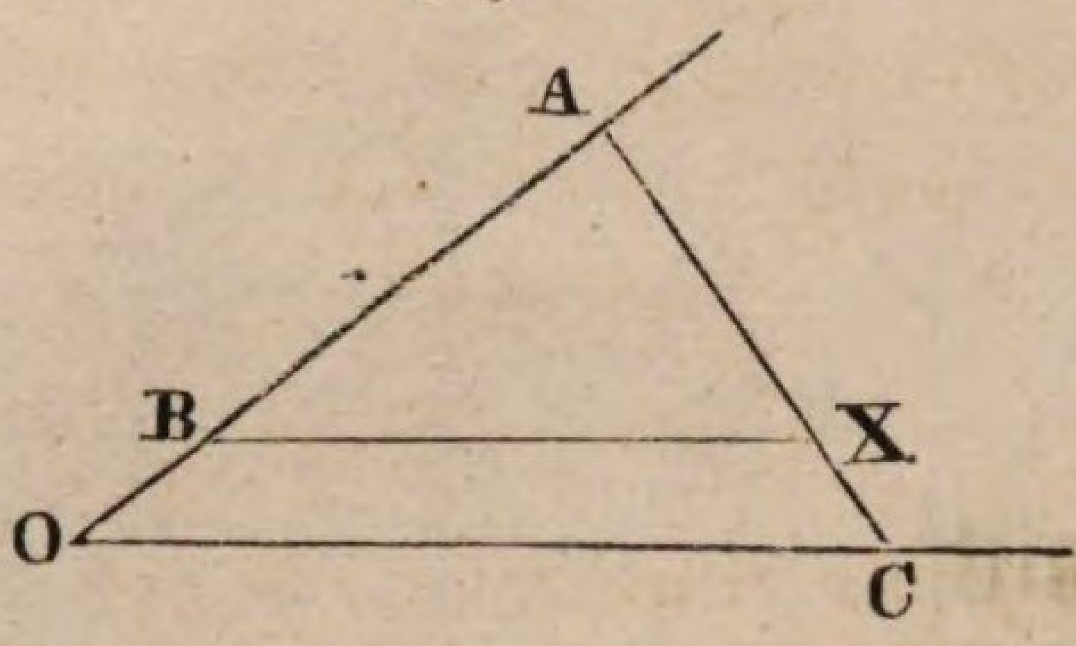
Fig. 148.



Zu bemerken ist, daß, da die Mittelglieder der Proportion $a : b = c : x$ vertauscht werden dürfen, man auch a und c auf eine der beiden Geraden, b auf der anderen abtragen kann, worauf dann A

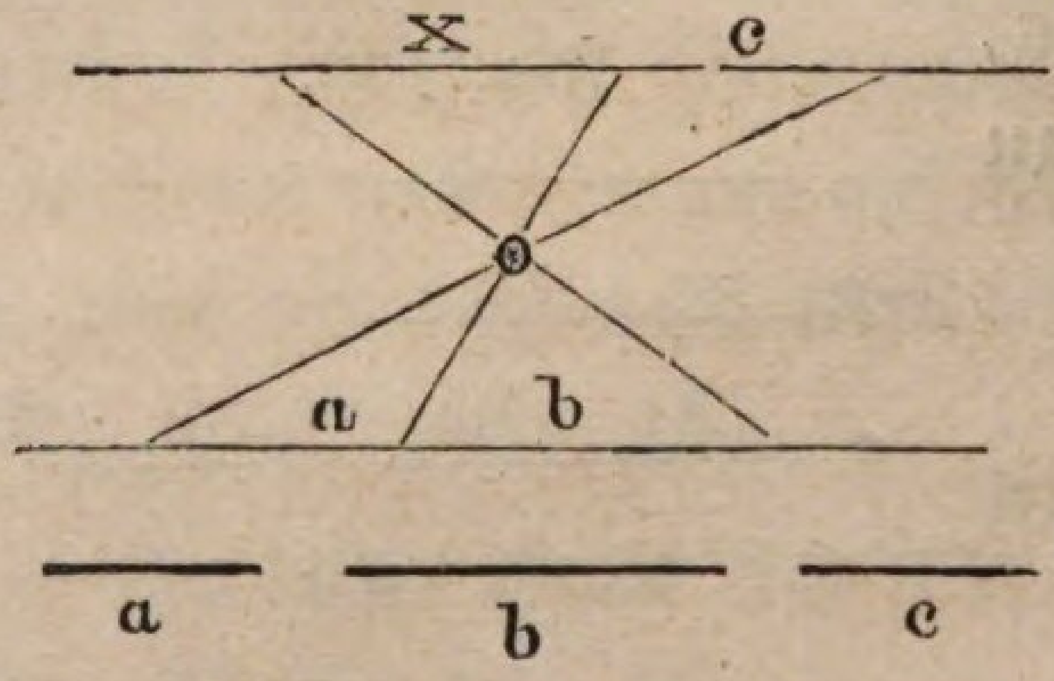
mit B zu verbinden und durch C eine Parallele mit AB zu ziehen bleibt. — Bei dieser sowohl als der vorigen Anordnung kommen die Mittelglieder b und c der Proportion auf verschiedene Geraden zu liegen.

Fig. 149.



2) Eine zweite auf Satz 39 zu gründende Auflösung stimmt im Wesentlichen mit der vorigen überein. Nachdem wie zuvor auf zwei in O sich schneidenden Geraden $OA = a$, $OC = c$ genommen und A mit C verbunden worden, nehme man noch $AB = b$ und ziehe durch B eine Parallele mit OC bis zur Begegnung mit AC. Geschieht diese in X, so ist BX die gesuchte Linie.

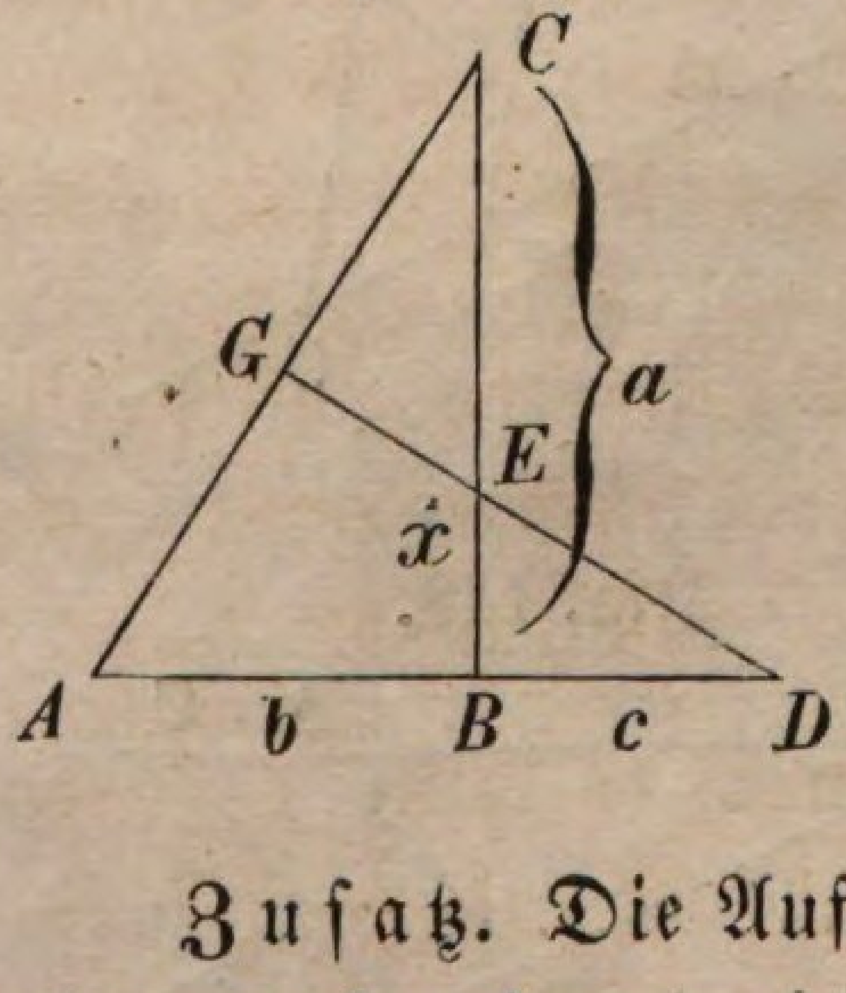
Fig. 150.



3) Verschieden von der ersten fällt eine auf Satz 40 zu gründende Auflösung aus. Die gegebenen Linien a, b, c sind danach auf zwei Parallellinien aufzutragen und ihre Endpunkte so zu verbinden, wie die Anwendung des Satzes es fordert. Die Figur genügt, das Verfahren zu veranschaulichen, dessen wörtliche Ausführung der Selbstübung überlassen bleibt.

4) Man benutze Satz 53 oder Satz 54, um eine vierte Proportionale zu construiren. Indem zur Anwendung derselben die gegebenen Stücke a, b, c wieder auf zwei gerade Linien vom Durchschnittspunkte derselben an getragen werden, kommen jetzt, was wohl zu merken, die Mittelglieder b und c auf eine Linie zu liegen, a auf die andere. Das Uebrige wird durch Beschreibung eines Kreises durch die Endpunkte der drei aufgetragenen Stücke nach III, 32 vollendet.

Fig. 151.

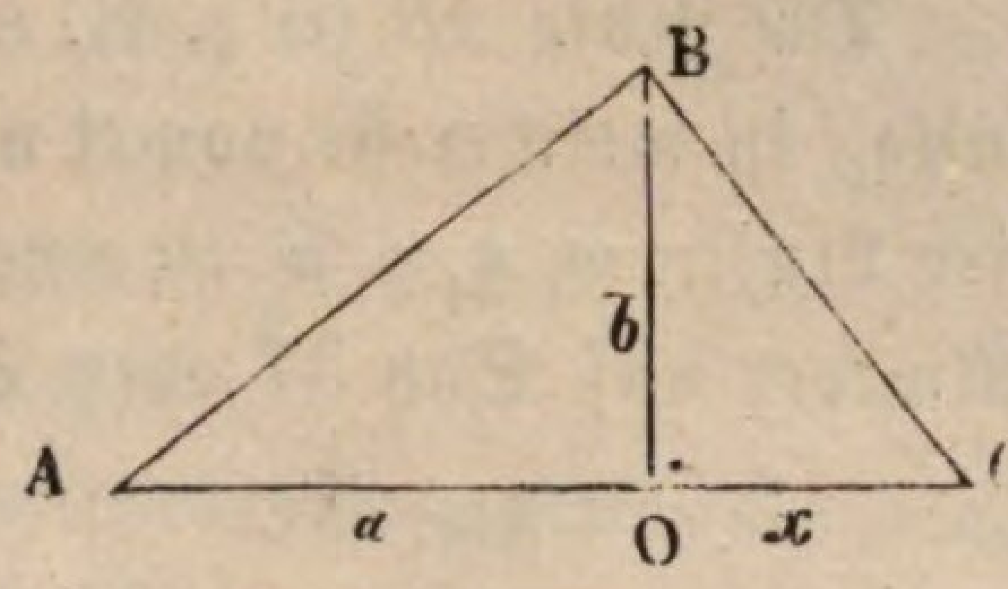


5) Eine 5. besondere Lösung ergiebt noch sich durch Anwendung zweier rechtwinkeligen Dreiecke ABC, EBD, deren Seiten wechselseitig auf einander senkrecht stehen. Man mache $BC = a$, $AB = b$, $BD = c$, dann ist $BE = x$.

Zusatz. Die Aufgabe: Zu zwei gegebenen geraden Linien a, b, eine dritte Proportionale zu finden, ist wesentlich dieselbe, wie die vorige, da man in dieser nur $c = b$ zu setzen hat.

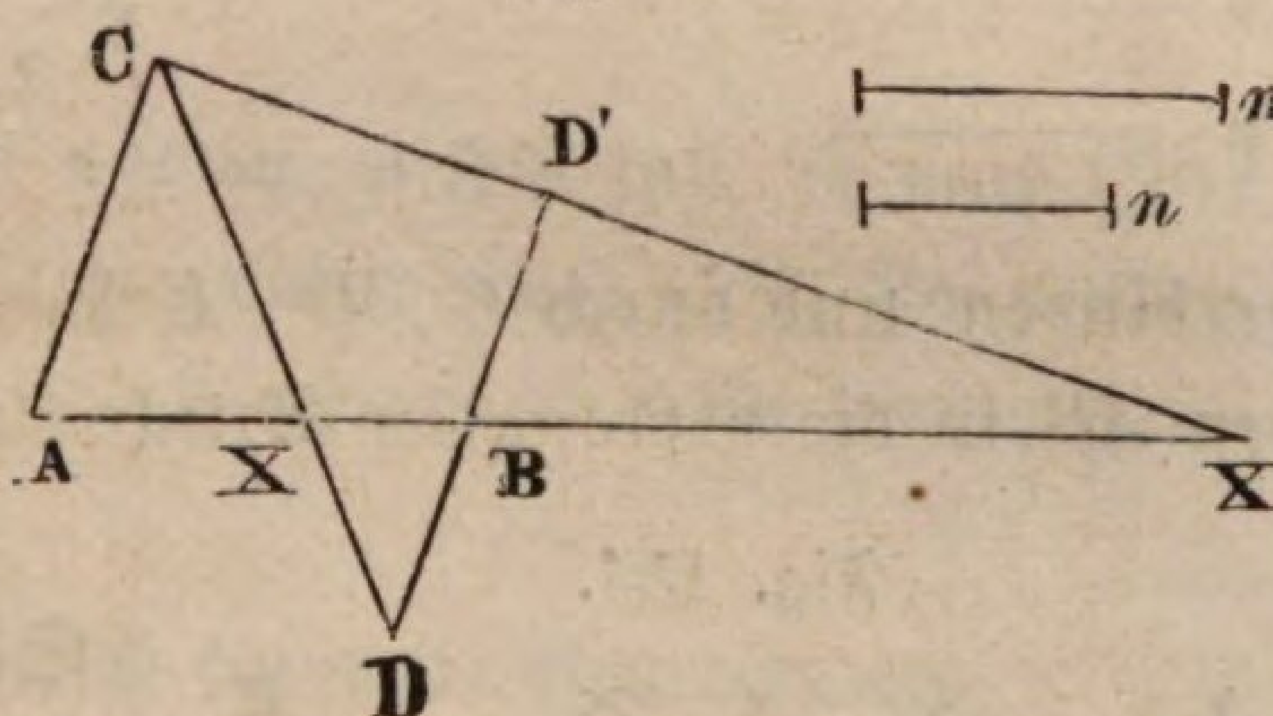
Man kann daher dieselben Constructionen gebrauchen, aber auch vortheilhaft Satz 51 anwenden, indem man auf einem der Schenkel eines rechten Winkels $OA = a$, auf dem anderen $OB = b$ nimmt, A mit B verbindet, dann $BC \perp AB$ zieht bis zur Verlängerung von AO; OC wird die dritte Proportionale zu a und b sein.

Fig. 152.



61. **Aufgabe. Auf einer geraden Linie einen Punkt zu finden, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten dieser Linie ein gegebenes Verhältniß haben.**

Fig. 153.



Auflösung. Die gegebenen Punkte seien A und B. Das Verhältniß ihrer Abstände von dem zu findenden Punkte X sei das der Linien m und n, so daß $AX : XB = m:n$ sein soll. Hieraus folgt, wenn X zwischen A und B liegt: $m + n : m = AB : AX$, wenn aber X nicht zwischen A und B liegen soll und $m > n$ ist: $m - n : m = AB : AX$; daher muß jedenfalls AX die vierte Proportionale zu drei gegebenen Linien werden und die Aufgabe reducirt sich auf die vorige. Unter den verschiedenen hiernach möglichen Constructionen ist folgende zu merken: Durch A und B ziehe man zwei Parallelen, nehme die eine $AC = m$, die andere BD (oder BD') $= n$; verbinde C mit D (D'); der Punkt X (X'), wo CD (CD') die gegebene Linie trifft, ist der gesuchte, der doppelt vorhanden ist und zwischen die Punkte A, B oder nicht dazwischen fällt, je nachdem die Parallelen auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite von AB gezogen werden.

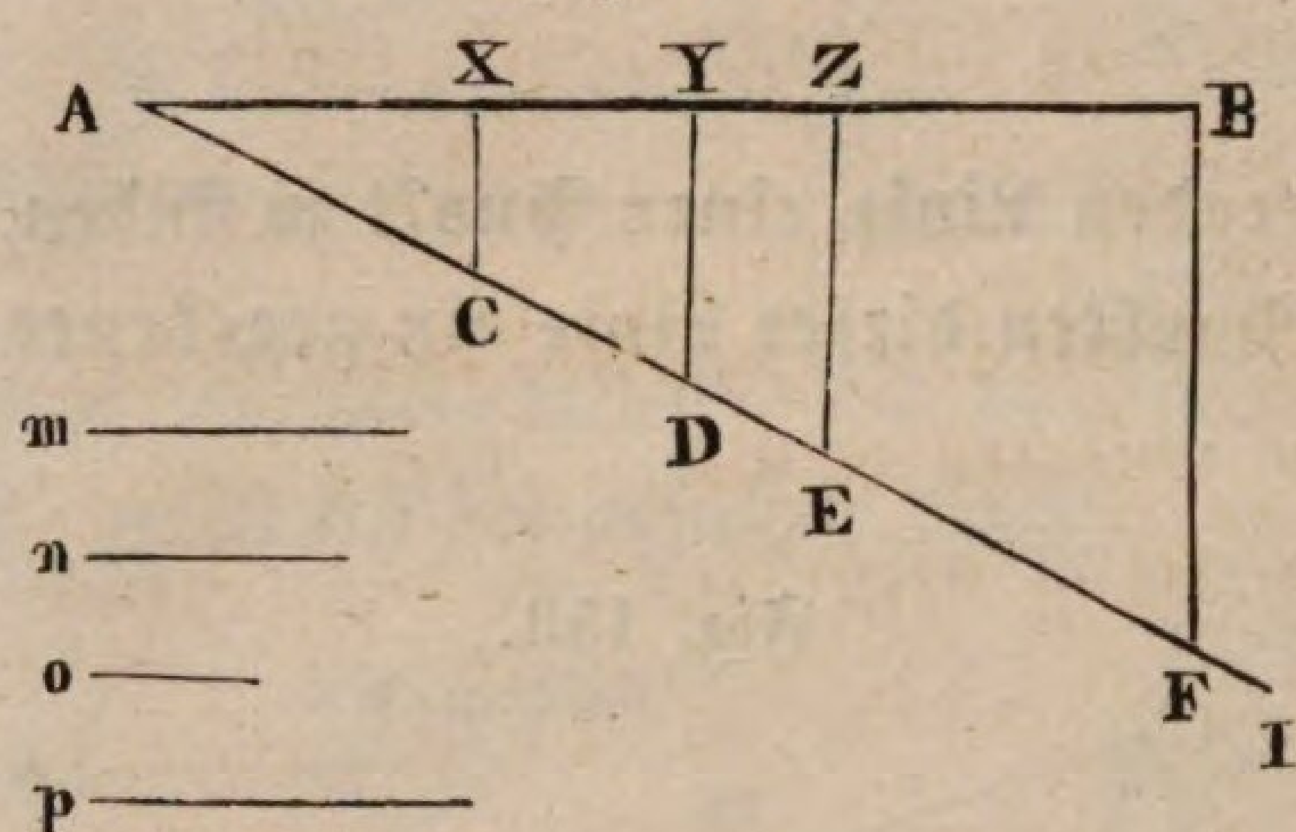
Zusatz. Durch die Lösung dieser Aufgabe werden zwei Linien AX und XB gefunden, deren Summe und Verhältniß, eben so zwei Linien AX' und BX', deren Differenz und Verhältniß gegeben ist.

Bemerkung. Ist das Verhältniß $m:n$ nicht in Linien, sondern in ganzen Zahlen gegeben, so kann man auch AB in resp. $m + n$ oder $m - n$ gleiche Stücke theilen; dieser Stücke gehen dann m auf AX resp. AX', n auf BX, resp. BX'.

62. Eine begrenzte gerade Linie in mehrere Stücke zu theilen, deren Verhältnisse zu einander gegeben sind.

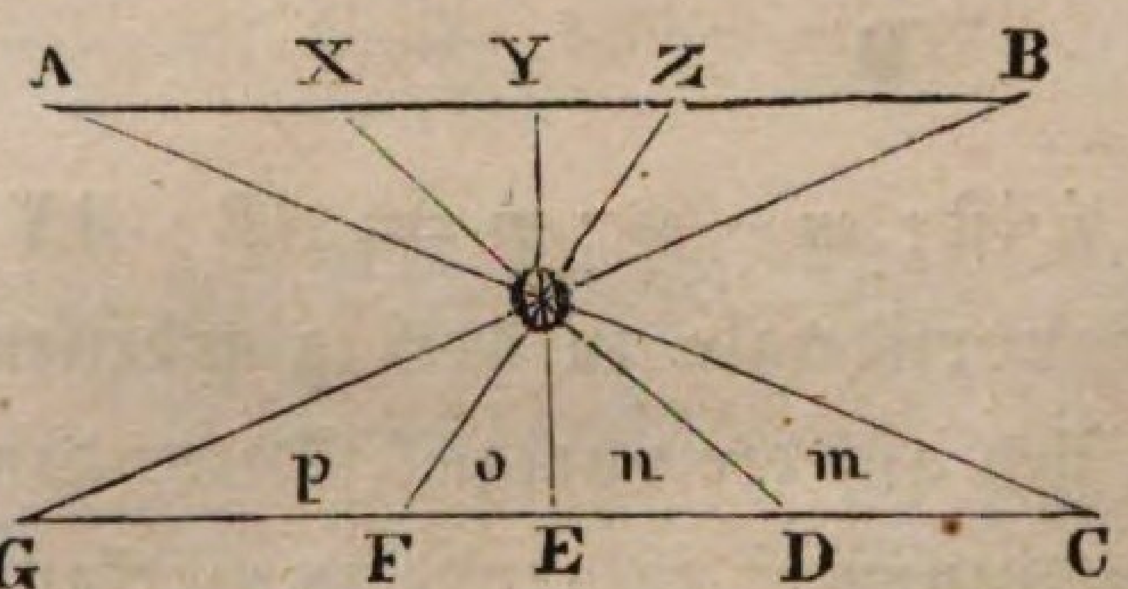
Die Linie AB sei z. B. in vier Stücke zu theilen, die in der Ordnung, in welcher sie von A nach B hin auf einander folgen, sich wie die vier Linien m, n, o, p, zu einander verhalten sollen. Die Auflösung ist entweder auf Satz 37 oder Satz 40 zu gründen.

Fig. 154.



Dem ersten gemäß hat man durch A unter beliebigem Winkel (der nur nicht $= 2R$ sein darf) eine andere Gerade AL zu ziehen und auf dieser von A an die gegebenen Linien m, n, o, p nach der Ordnung aufzutragen, so daß z. B. $AC = m$, $CD = n$, $DE = o$, $EF = p$, hierauf F mit B zu verbinden und durch C, D, E Parallelen mit BF zu ziehen. Sie werden AB in die verlangten Stücke theilen.

Fig. 155.

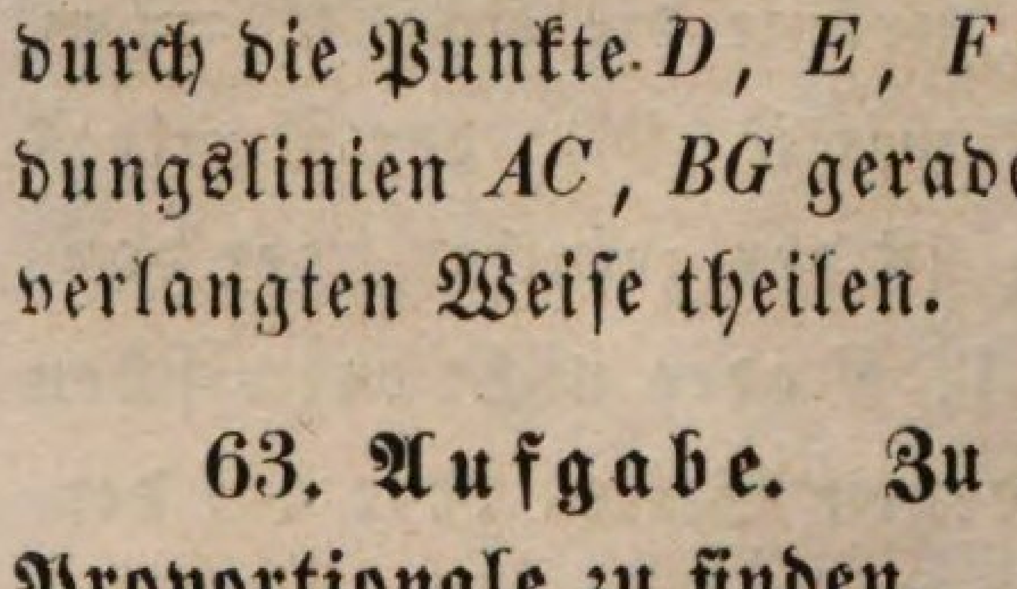


Dem zweiten der angeführten Sätze gemäß hat man, was am kürzesten ist, mit AB eine Parallele zu ziehen, auf diese die vier Stücke m, n, o, p aufzutragen, so daß z. B. $CD = m$, $DE = n$, $EF = o$, $FG = p$, dann C mit A, G mit B zu verbinden und durch die Punkte D, E, F und den Durchschnittspunkt O der Verbindungslinien AC, BG gerade Linien zu ziehen. Diese werden AB in der verlangten Weise theilen.

63. Aufgabe. Zu zwei gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionale zu finden.

Die einfachste Auflösung giebt Satz 51 in Verbindung mit III, 19, 1. Zusatz. Es seien nämlich m und n die beiden gegebenen Linien, x die gesuchte, so daß $m : x = x : n$. Entweder nun:

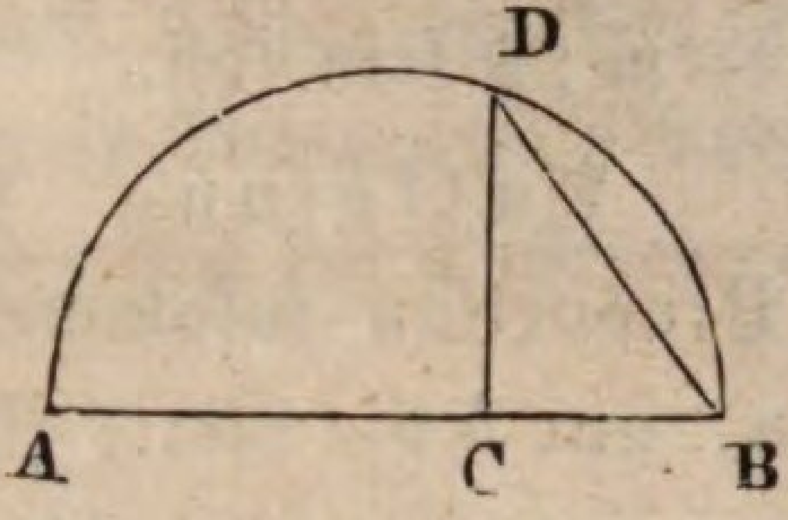
Fig. 156.



1) trage man m und n neben einander auf eine gerade Linie ab, so daß $AB = m$, $BC = n$, und beschreibe über $AB = m + n$ einen Halbkreis. Das in B auf AC bis zum

Umfange errichtete Perpendikel BD ist dann $= x$; oder:

Fig. 157.



2) man nehme $AB =$ der größeren der beiden gegebenen Linien, die m sei, und auf AB ein Stück $BC = n$, beschreibe über AB einen Halbkreis und errichte in C auf AB eine Senkrechte CD; die Sehne BD wird nun die verlangte mittlere Proportionale sein.

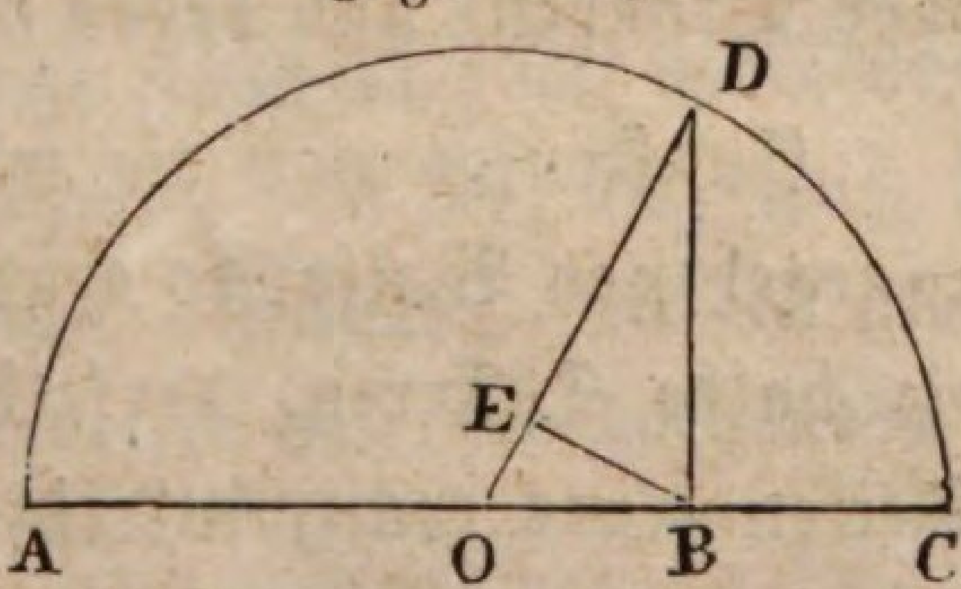
Eine dritte Auflösung könnte auf Satz 55 gegründet werden, ist aber weniger einfach.

64. **Aufgabe. Zu zwei geraden Linien, m, n, das harmonische Mittel*) zu finden, d. h. eine Linie x zwischen m und n, deren Unterschiede von m und n sich wie m und n selbst verhalten, so daß, wenn $m > n$, $m - x : x - n = m : n$.**

Auflösung. Da $m - x : x - n = m : n$ sein soll, so muß (26) auch $m - n : x - n = m + n : n$ sein, daher auch (28) $2m : x = m + n : n$ oder $\frac{1}{2}(m + n) : n = m : x$. Hiernach ist x die vierte Proportionale zu $\frac{1}{2}(m + n)$, n und m.

Eine zweite Lösung ergiebt sich durch folgende Bemerkung:

Fig. 158.



Ist p eine mittlere Proportionale zu m und n, so ist sie es auch vermöge der vorhin bewiesenen Proportion zu $\frac{1}{2}(m + n)$ und x (s. 32, Zus.), also x die dritte Proportionale zu $\frac{1}{2}(m + n)$ und p; woraus sich die durch nebenstehende Figur angedeutete Construction ergiebt, worin $AB = m$, $BC = n$, $AO = OC = OD = \frac{1}{2}(m + n)$, BD (senkrecht auf AC) $= p$, $BE \perp OD$, $DE = x$.

Zusatz. Das arithmetische Mittel zweier Linien verhält sich zum geometrischen Mittel wie dieses zum harmonischen.

65. **Aufgabe. Von einer Proportion kennt man die äußeren Glieder und das Verhältniß der inneren; die inneren Glieder selbst zu finden.**

Die gegebenen äußeren Glieder seien a, b, die gesuchten inneren x,

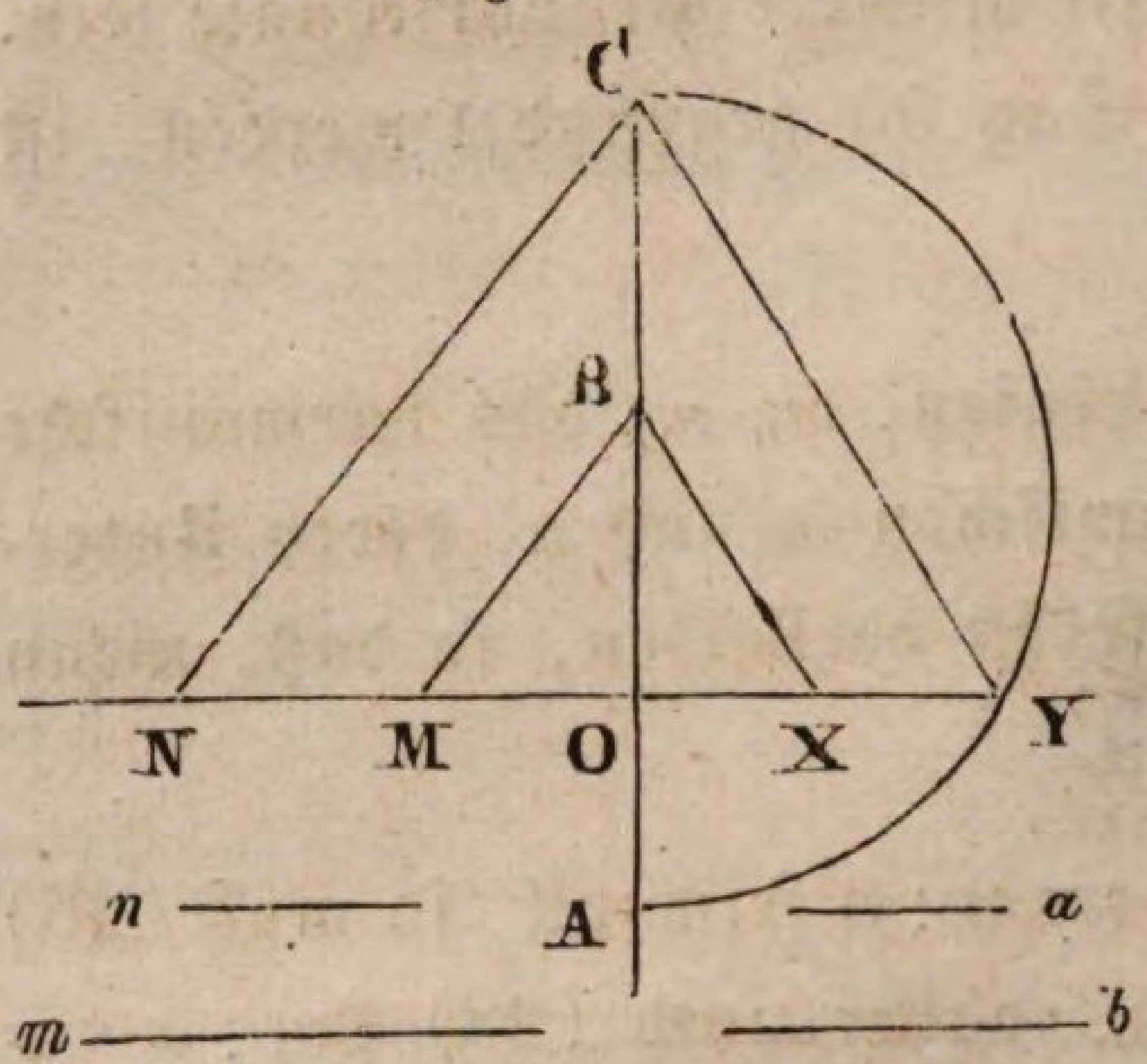
---

*) Die Bezeichnung „harmonisches Mittel" rührt von Pappus her (Lib. III).

y; $m : n$ das gegebene Verhältniß, so daß $a : x = y : b$, dabei $x : y = m : n$ sein soll.

Auflösung. Nimmt man, um die zweiten Verhältnisse dieser Proportion zusammenhängend zu machen, da die ersten es sind, zu m, n, und b die vierte Proportionale c, so daß $m : n = b : c$, so ist auch $x : y = b : c$. Aus dieser Proportion und der ersten $a : x = y : b$ folgt aber (31) $a : y = y : c$. Hiernach hat man erst zu m, n, b eine vierte Proportionale c, dann zu a und c die mittlere Proportionale y zu suchen; aus dieser und m, n oder b, c ergiebt sich x.

Fig. 159.



Nebenstehende Figur enthält die ausgeführte Construction; es ist darin $OA = a$, $OB = b$, $OM = m$, $ON = n$, $OC = c$, $OY = y$, $OX = x$.

Eine andere Constructionsweise mag auf Satz 37 gegründet werden, an den auch die Auflösung unmittelbar geknüpft werden kann.

66. Aufgabe. Zwei gerade Linien zu finden, deren Summe oder Differenz und deren mittlere Proportionale gegeben ist.

Construirt man die mittlere Proportionale nach der ersten in 63 angegebenen Weise, so ergiebt sich, daß die halbe Summe zweier Linien, die halbe Differenz derselben und die mittlere Proportionale die drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks bilden, von welchem im gegenwärtigen Falle zwei Seiten gegeben sind. Es ist also leicht die dritte zu finden.

67. Aufgabe. Von einer Proportion kennt man die äußeren Glieder und die Summe oder Differenz der mittleren; diese letzteren selbst zu finden.

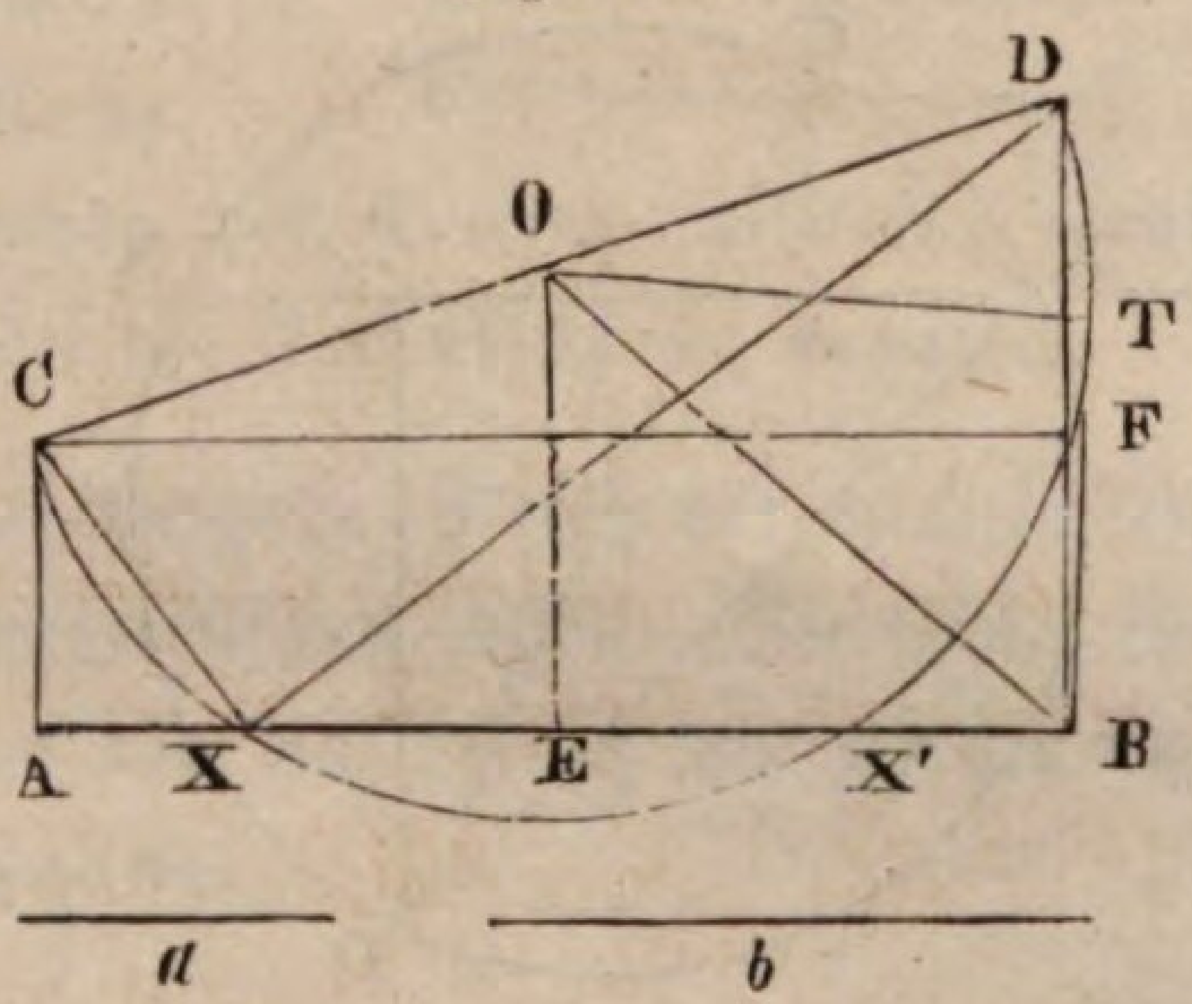
Die gegebenen äußeren Glieder seien a, b, die zu findenden inneren x, y; es soll $a : x = y : b$ und dabei entweder $x + y = s$ oder $x - y = d$ sein, wo s und d gegebene Linien bedeuten.

1. Aufl. Nimmt man zunächst zwischen a und b eine mittlere Proportionale c, so muß (32, Zus.) diese c auch mittlere Proportionale von x, y sein. Die Aufgabe ist dadurch auf die vorige reducirt. Zu bemerken bleibt, daß, da die mittlere Proportionale zweier Größen

stets kleiner, höchstens eben so groß als deren halbe Summe ist (30, Zus.) c nicht $> \frac{1}{2}s$ sein darf, wenn für den Fall, daß s gegeben ist, die Auflösung noch möglich sein soll. Ist $c = \frac{1}{2}s$, so sind x und y beide $= \frac{1}{2}s$; ist $c < \frac{1}{2}s$, so sind x und y ungleich. — Ist die Differenz d gegeben, so ist die Auflösung immer möglich.

2. Aufl. Ohne vorher die mittlere Proportionale zu a und b zu suchen, kann die Auflösung unmittelbar auf Satz 42 gegründet werden. Soll nämlich:

Fig. 160.



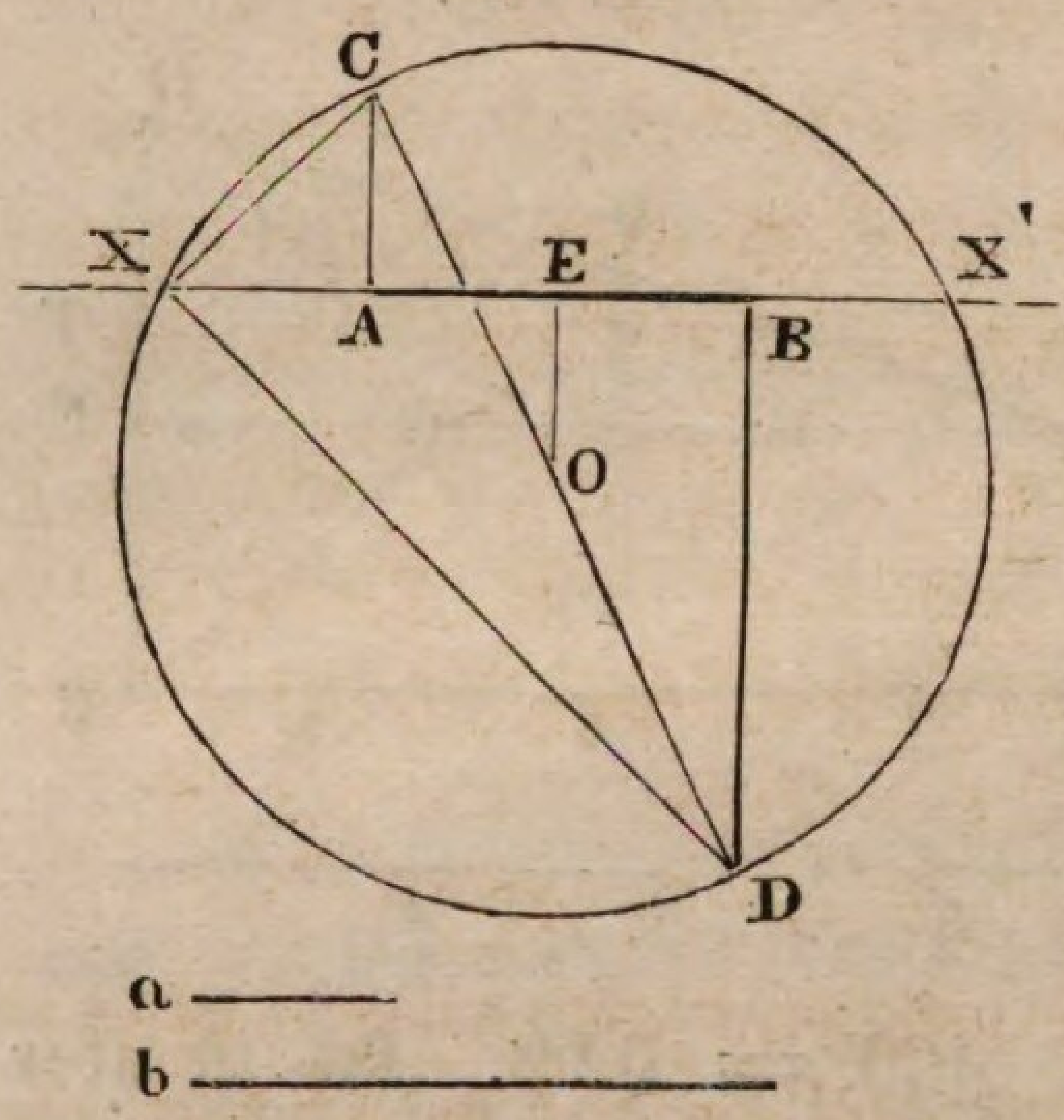
$x + y = s$ sein und man macht eine Gerade $AB = s$, so kommt es darauf an, diese AB in zwei Theile AX, XB zu schneiden, so daß $a : AX = XB : b$. Damit diese vier Stücke homologe Seiten ähnlicher Dreiecke werden, errichte man auf AB in A und B die Senkrechten $AC = a$ und $BD = b$, beide nach einerlei Seite von AB. Dann muß vermöge Satz 43 $\triangle\, CAX \sim XBD$ sein, insbesondere $\sphericalangle\, ACX = DXB$. Es ist aber $\sphericalangle\, ACX + CXA = R$, daher auch $\sphericalangle\, DXB + CXA = R$ und also auch $\sphericalangle\, CXD = R$; X liegt daher auf dem Umfange eines über CD als Durchmesser zu beschreibenden Halbkreises (Umkehrung von III, 19, Zus. 1). Die auszuführende Construction ist hieraus offenbar, und es bleibt nur hinsichtlich des Durchschnitts des Halbkreises mit AB Folgendes zu bemerken:

Aus O, der Mitte von CD, sei auf AB die Senkrechte OE gefällt, ferner durch C mit AB eine Parallele CF gezogen, welche BD in F trifft, endlich aus B an den Halbkreis die Tangente BT gezogen, deren Berührungspunkt T ist; O sei mit T und B verbunden, dann ist E die Mitte von AB, also $AE = EB = \frac{1}{2}s$, der Halbkreis geht, da $\sphericalangle\, CFD = R$, durch F, BF ist $= AC$, BT mittlere Proportionale zwischen AC und DB oder $BT = c$, wenn $a : c = c : b$. Je nachdem nun in den beiden rechtwinkeligen Dreiecken OEB, OTB, welche die gemeinschaftliche Hypotenuse OB haben, BT d. i. $c >= $ oder $< BE$ d. i. $\frac{1}{2}s$ ist, wird $OT <=$ oder $> OE$ sein. Im ersten Falle, wenn $c > \frac{1}{2}s$, ist die Aufgabe unmöglich und der Halbkreis trifft AB gar nicht, im zweiten, wenn $c = \frac{1}{2}s$, berührt der Halbkreis die AB in deren Mitte E und

$AE = EB = \frac{1}{2}s$ sind die verlangten Theile; im dritten Falle, wenn $c < \frac{1}{2}s$, trifft der Halbkreis die AB in zwei gleich weit von E abstehenden Punkten X und X', deren jeder AB in die verlangten Stücke theilt. Da E die Mitte sowohl von AB als von XX' ist, so ist auch $AX = BX'$, $XB = X'A$.

II. Ist statt der Summe s die Differenz d der Mittelglieder gegeben, so gelten dieselben Schlüsse zur Auffindung der Construction. Nachdem eine gerade Linie $AB = d$ gemacht worden, kommt es nur darauf an,

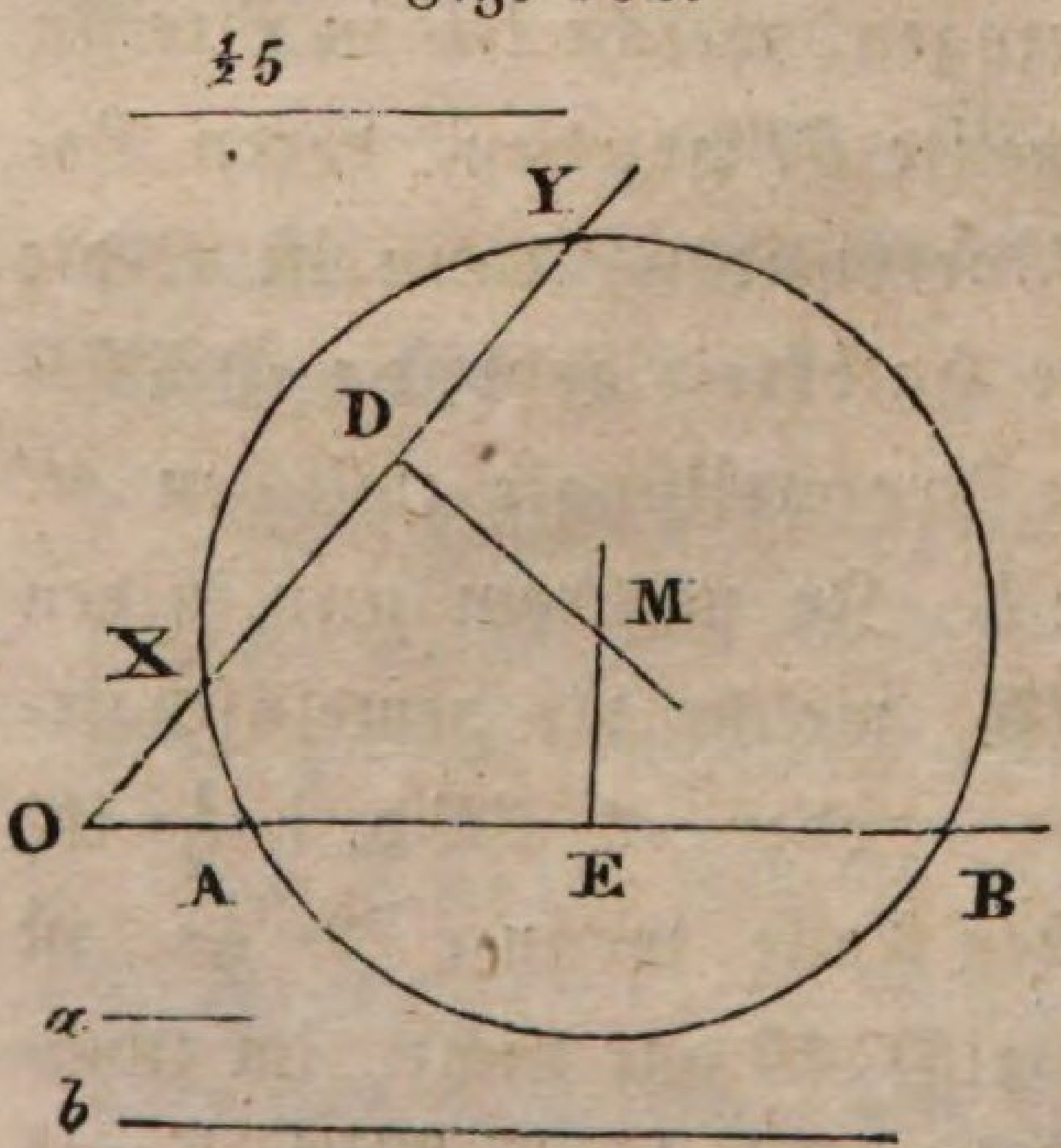
Fig. 161.



auf der einen oder anderen Verlängerung von AB einen Punkt X (X') zu finden, so daß $a : AX = BX : b$. Man errichte wieder in A und B auf AB die Senkrechten $AC = a$, $BD = b$, jetzt aber auf verschiedenen Seiten von AB, und verbinde X mit C und D; dann muß, soll X der obigen Proportion genügen, $\sphericalangle ACX = BXD$ und also $\sphericalangle CXD = R$ sein. X liegt daher wieder im Umfange eines über CD als Durchmesser zu beschreibenden Kreises. Dieser Kreis schneidet immer, wie auch a, b und d sein mögen, die Verlängerung von AB in zweien, gleich weit von deren Mitte E, so wie von A und B abstehenden Punkten X und X', so daß sowohl AX und XB als die gleichen BX' und $X'A$ als die verlangten Mittelglieder anzusehen sind.

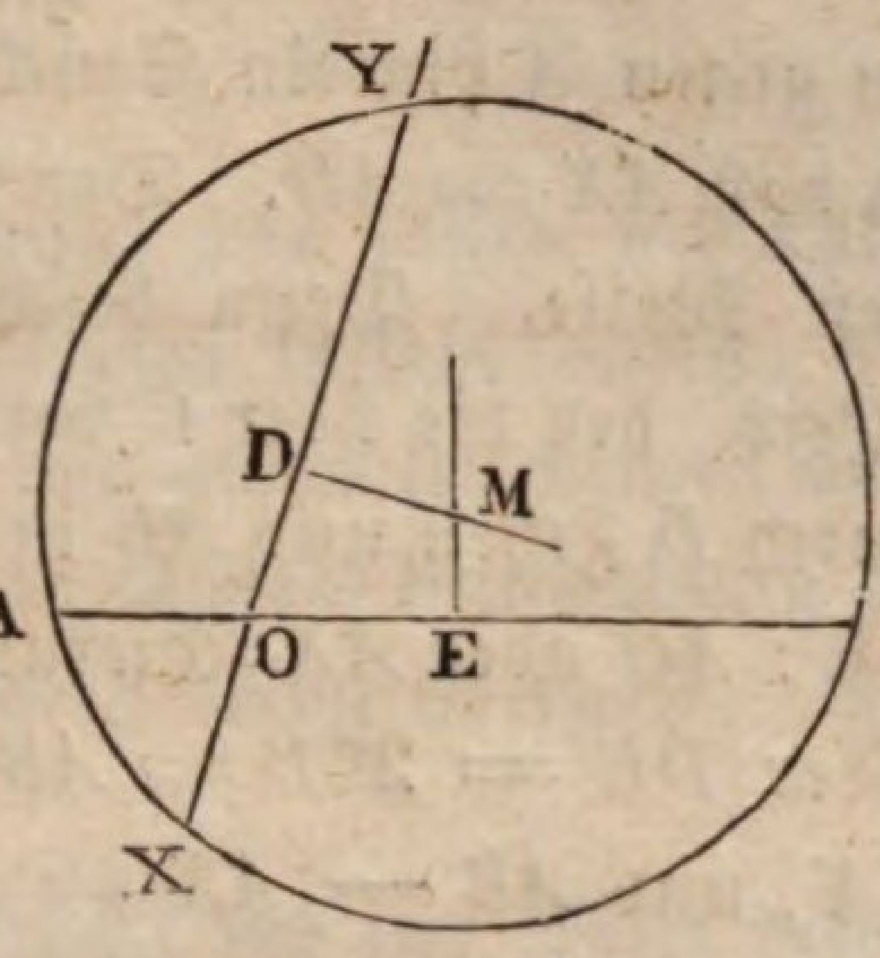
Eine 3. Auflösung der Aufgabe kann auf Satz 53 und 54, resp. deren Umkehrung 57, gestützt werden. Denkt man sich nämlich x und y als gefunden und mit a und b auf zwei gerade Linien von deren Durchschnittspunkte O an aufgetragen, a und b auf der einen, x und y auf der anderen Linie, so müssen, da $a : x = y : b$ sein soll, die Endpunkte dieser vier aufgetragenen Stücke jedenfalls in einer Kreisperipherie liegen. Fällt man aus dem Mittelpunkte M dieses Kreises Senkrechte auf die beiden in O sich schneidenden geraden

Fig. 162.



Linien, nämlich MD auf diejenige, auf welcher x, y liegen, ME auf die andere, so ist, wenn x und y auf derselben Seite von O liegen, $OD =$ deren halben Summe $= \frac{1}{2}s$; wenn aber x, y zu verschiedenen Seiten von O liegen, $OD =$ deren halben Differenz $= \frac{1}{2}d$. Hiernach wird es leicht sein, die in nebenstehenden Figuren (Fig. 162 und 163), worin $OA = a$, $OB = b$, OD in der einen $= \frac{1}{2}s$, in der anderen $= \frac{1}{2}d$, $OX = x$, $OY = y$ ausgeführte Construction einzusehen. Das Durchschneiden des Kreises mit OD, wenn $\frac{1}{2}s > c$, wird auf gleiche Weise wie bei der 2. Auflösung bewiesen.

Fig. 163.

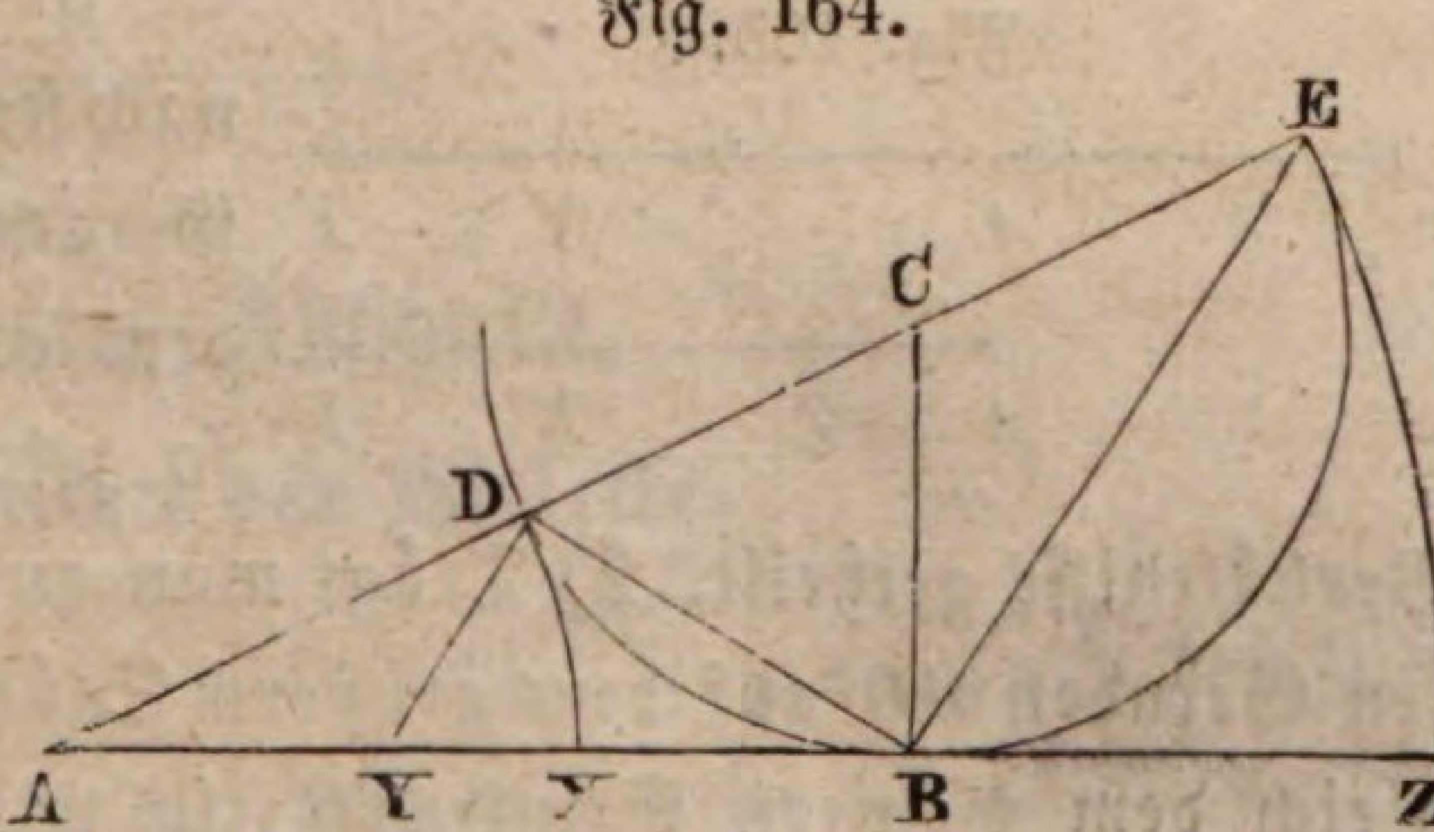


Bemerkung. Die oben gelöste Aufgabe ist eine der wichtigsten, weil eine Menge anderer sich darauf zurückführen lassen. Sie leistet für die geometrische Construction das, was die Auflösung der quadratischen Gleichungen für die Rechnung.

68. **Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie nach stetiger Proportion, d. h. in zwei Stücke so zu theilen, daß sie sich zum größeren Stücke verhält wie das größere zum kleineren.** (Goldener Schnitt, Sectio aurea, Sectio divina.)

Aufl. AB sei die gegebene Linie. Angenommen, die Theilung sei geschehen und der Punkt X liege auf AB so, daß $AB : AX = AX : XB$. Aus dieser Proportion folgt aber, daß $AB + AX : AX + XB$ oder $AB = AB : AX$. Da hiernach AB die mittlere Proportionale von $AB + AX$ und AX und zugleich die Differenz dieser Linien ist so reducirt sich die Aufgabe auf die in 66. Die dort gegebene Auflösung fordert, daß man ein rechtwinkeliges Dreieck bilde, dessen eine Kathete die mittlere Proportionale, die andere die halbe gegebene Differenz sei. Hieraus fließt folgende einfache Construction:

Fig. 164.



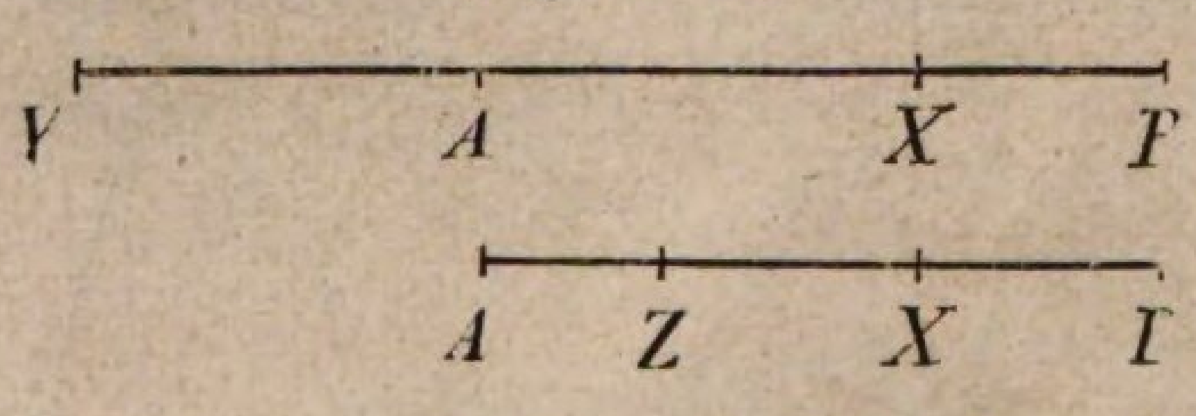
Auf AB errichte man in einem der beiden Endpunkte, z. B. in B'

eine Senkrechte $BC = \frac{1}{2}AB$, verbinde C mit A, nehme auf CA von C an gegen A hin ein Stück $CD = CB$ und trage AD von A an auf AB, so daß $AX = AD$. Der Punkt X theilt dann AB in der vorgeschriebenen Weise. Denn beschreibt man um C mit CB als Radius einen Kreis, der die über C verlängerte AC noch in E trifft, so wird derselbe durch D gehen und AB in B berühren; daher hat man (55) $AE : AB = AB : AD$ oder AX; hieraus folgt $AB : AX = AE - AB : AB - AX$. Aber $DE = 2CB = AB$, daher $AE - AB = AE - DE = AD = AX$, und $AB - AX = XB$, folglich ist $AB : AX = AX : XB$.

1. Zusatz. Trägt man AD entgegengesetzt, d. i. auf der Verlängerung von BA über A hinaus ab, so entsteht ein zweiter Punkt X', der, wie leicht einzusehen, so liegt, daß $BX' : BA = BA : AX'$. Nimmt man ferner $AZ = AE$, so gewinnt man noch einen Punkt Z, der so liegt, daß $AZ : AB = AB : BZ$. Es ist damit die umgekehrte Aufgabe gelöst: eine Linie AZ oder BX' zu finden, deren größeres aus stetiger Theilung hervorgehendes Stück eine gegebene Linie AB ist.

2. Zusatz. Zieht man $DY \parallel EB$ oder $DY \perp DB$, so wird, da $AE : ED = ED : AD$, auch $AB : BY = BY : AY$ sein. AB ist daher in Y nochmals stetig getheilt, die Größe der Theile aber dieselbe, nämlich: $AY = XB$, $YB = XA$. Auch folgt aus $AB : AX = AX : XB = AB - AX : AX - XB$, daß $AX : AY = AY : YX$, mithin ist auch AX in Y stetig getheilt.

Fig. 165.



3. Zusatz. 1) Verlängert man eine nach stetigem Verhältnisse in X getheilte Gerade AB um ein Stück AY gleich dem größeren Stück AX der Linie AB, so wird auch YB in A nach stetigem Verhältnisse getheilt. 2) Trägt man auf einer in X harmonisch getheilten Geraden AB auf dem größern Stücke XA von X ein Stück XZ ab, gleich dem kleinern Stücke XB, so wird auch AX in Z nach stetigem Verhältnisse getheilt.

Beweise leicht.

69. Aufgabe. Die Zahlverhältnisse:

a) der Hypotenuse eines rechtwinkeligen, gleichschenkeligen Dreiecks zur Kathete oder der Diagonale eines Quadrates zur Seite desselben;

b) der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks zur Seite;

c) der beiden Abschnitte einer nach stetiger Proportion getheilten Linie unter sich und zur ganzen Linie

zu finden.

Diese Verhältnisse sind sämmtlich irrational und lassen sich näherungsweise auf zweifache Art berechnen. Die eine besteht darin, daß man von der Betrachtung der Quadrate über den gedachten Linien ausgeht, die Verhältnisse derselben bestimmt, dann mittels Anwendung der arithmetischen Wurzelausziehung zu den Linien selbst übergeht. Auf diesem Wege ergiebt sich Folgendes:

Zu a) Die Diagonale eines Quadrates verhält sich zur Seite desselben wie $\sqrt{2} : 1$ oder wie $2 : \sqrt{2} = 1.414213... : 1 = 1 : 0,707106$.

Zu b) Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks zur Seite wie $\sqrt{3} : 2 = 1,73205... : 2 = 0,866025... : 1$.

Zu c) Eine nach stetiger Proportion getheilte Linie verhält sich zu ihrem größeren Abschnitte und dieser zum kleineren, wie $2 : \sqrt{5} - 1 = \sqrt{5} + 1 : 2 = 1.61803... : 1$.

Die andere Art, die Verhältnisse zu berechnen, wendet die geometrische Construction an, um zu bestimmen, wie oftmal die kleinere der beiden Linien, deren Verhältniß gesucht wird, von der größeren, der Rest von der kleineren, der neue Rest vom vorigen und so weiter sich abziehen läßt.

Das Nähere siehe im Anhange.

Siebenter Abschnitt.

Aehnlichkeit der Vielecke.

70. **Zwei Vielecke werden ähnlich genannt** in demselben Falle, wie Figuren überhaupt, wenn sie nämlich in Allem übereinstimmen, wovon ihre Gestalt abhängt. Dazu ist aber nöthig, nicht allein, daß die Winkel am Umfange beider Vielecke der Ordnung nach gleich, sondern auch, daß die Seiten beider Figuren, welche gleiche Winkel einschließen, proportionirt seien.

Hieraus folgt von selbst, daß die Vielecke gleich viele Seiten und Ecken haben müssen und daß jeder Ecke und Seite des einen, eine Ecke und Seite des anderen der Ordnung nach entspreche. Je zwei entspre-

chende Ecken, an denen gleiche Winkel liegen, werden **homologe** Ecken genannt; ebenso diejenigen Seiten und Diagonalen, welche homologe Ecken verbinden, **homologe Seiten und Diagonalen**.

71. **Satz. Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie zwei homologe Seiten.**

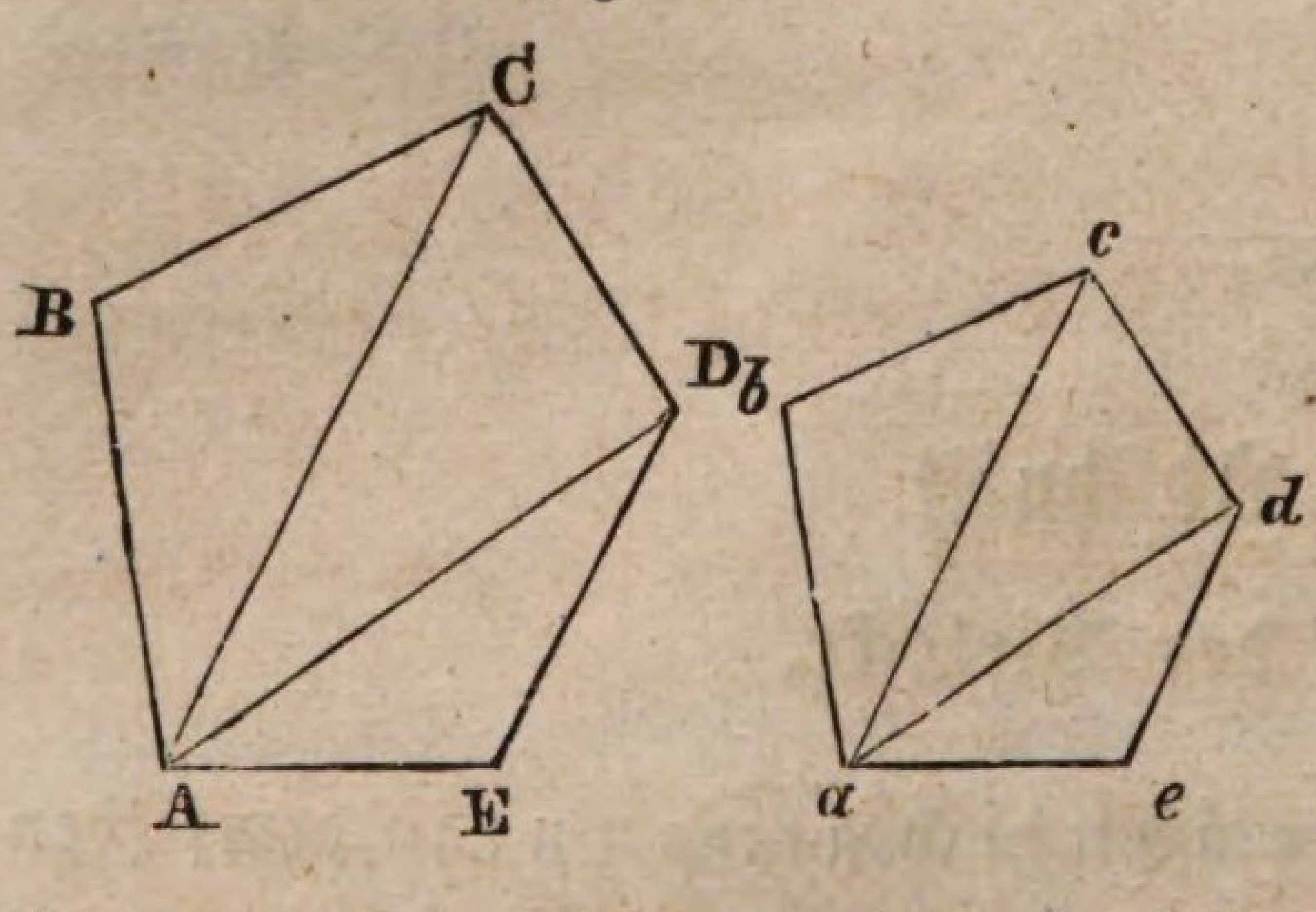
Zum Beweise hat man nur den in 26 ausgesprochenen Satz aus der Proportionslehre anzuwenden.

72. **Satz. Stimmen zwei Vielecke von n Seiten überein, entweder:**
1) in dem Verhältnisse von $n - 1$ dieser Seiten und in der Größe der $n - 2$ eingeschlossenen Winkel, oder:
2) in $n - 1$ Winkeln aus jedem Vielecke und dem Verhältnisse von $n - 2$ an einander stoßenden Seiten,
so sind die Vielecke ähnlich.

Beweis. Vorausgesetzt, in den beiden Vielecken $ABCDE$, $abcde$ sei **entweder** $AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de$, und dabei $\sphericalangle B = b$, $C = c$, $D = d$; **oder** es sei $\sphericalangle B = b$, $C = c$, $D = d$, $E = e$, und dabei $AB : ab = BC : bc = CD : cd$, so werden die Vielecke sowohl im einen Falle als im anderen ähnlich sein.

Zum Beweise seien die Diagonalen AC, AD, ac, ad gezogen.

Fig. 166.



Aus $\sphericalangle B = b$ und $AB : ab = BC : bc$ folgt nach S. 43, daß $\triangle ABC \sim abc$, also $\sphericalangle BAC = bac$, $BCA = bca$ und $AC : ac = BC : bc$. Aber $BC : bc = CD : cd$, daher auch $AC : ac = CD : cd$, dabei $\sphericalangle ACD = BCD - ACB = bcd - acb = acd$; folglich ist nach demselben Satze 43 auch $\triangle ACD \sim acd$ und daher $\sphericalangle CAD = cad$, $\sphericalangle ADC = adc$, $AD : ad = CD : cd$. Bei der ersten Voraussetzung hat man weiter $CD : cd = DE : de$, daher auch $AD : ad = DE : de$; außerdem $\sphericalangle ADE = CDE - ADC = cde - adc = ade$, weshalb nach Satz 43 $\triangle ADE \sim ade$. Bei der zweiten Voraussetzung ist gleichfalls $\sphericalangle ADE = ade$, außerdem $\sphericalangle AED = aed$, daher nun nach Satz 42 wieder $\triangle ADE \sim ade$. Außer den bedungenen Gleichheiten hat man also noch im ersten Falle $DE : de = AE : ae$, $\sphericalangle E = e$, $\sphericalangle A = a$, im zweiten gleichfalls

$A = a$, $CD : cd = DE : de = AE : ae$. Die Winkel der Vielecke sind daher alle paarweise gleich, die Seiten proportionirt, die Vielecke also ähnlich.

1. Zusatz. Die Aehnlichkeit zweier Vielecke fordert eine Gleichheitsbedingung weniger als die Congruenz derselben; jene fordert $2n-4$ Bedingungen, diese $2n-3$.

2 Zusatz. Rechtecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnisse zweier anstoßenden Seiten, Rhomben, wenn sie in einem Winkel, Rhomboiden, wenn sie in einem Winkel und dem Verhältnisse der beiden einschließenden Seiten übereinstimmen.

73. Satz. **Aehnliche Vielecke lassen sich immer in eine gleiche Anzahl paarweise ähnlicher Dreiecke zerlegen.**

Beweis. Ein Vieleck $ABC..G$ sei auf beliebige Weise, etwa durch die Diagonalen, AF, AE, BE, BD in Dreiecke getheilt. Zieht man in einem ähnlichen Vielecke $abc...g$*) die homologen Diagonalen af, ae, be, bd, so wird dieses Vieleck in eine gleiche Anzahl Dreiecke getheilt wie jenes, und diese Dreiecke werden der Reihe nach den ersten ähnlich sein. Wie im Beweise des vorigen Satzes ergiebt sich nämlich aus der vorausgesetzten Aehnlichkeit der Vielecke zunächst die der Dreiecke AGF, agf, welche einen Winkel mit dem Vielecke gemein haben. Hieraus folgt weiter die Aehnlichkeit der anstoßenden Dreiecke AEF, aef. Aus der Aehnlichkeit dieser die der folgenden AEB, aeb u. s. w., zuletzt die Gleichheit der Winkel der noch übrigen Dreiecke BDC, bdc, und daher nach Satz 42 die Aehnlichkeit derselben.

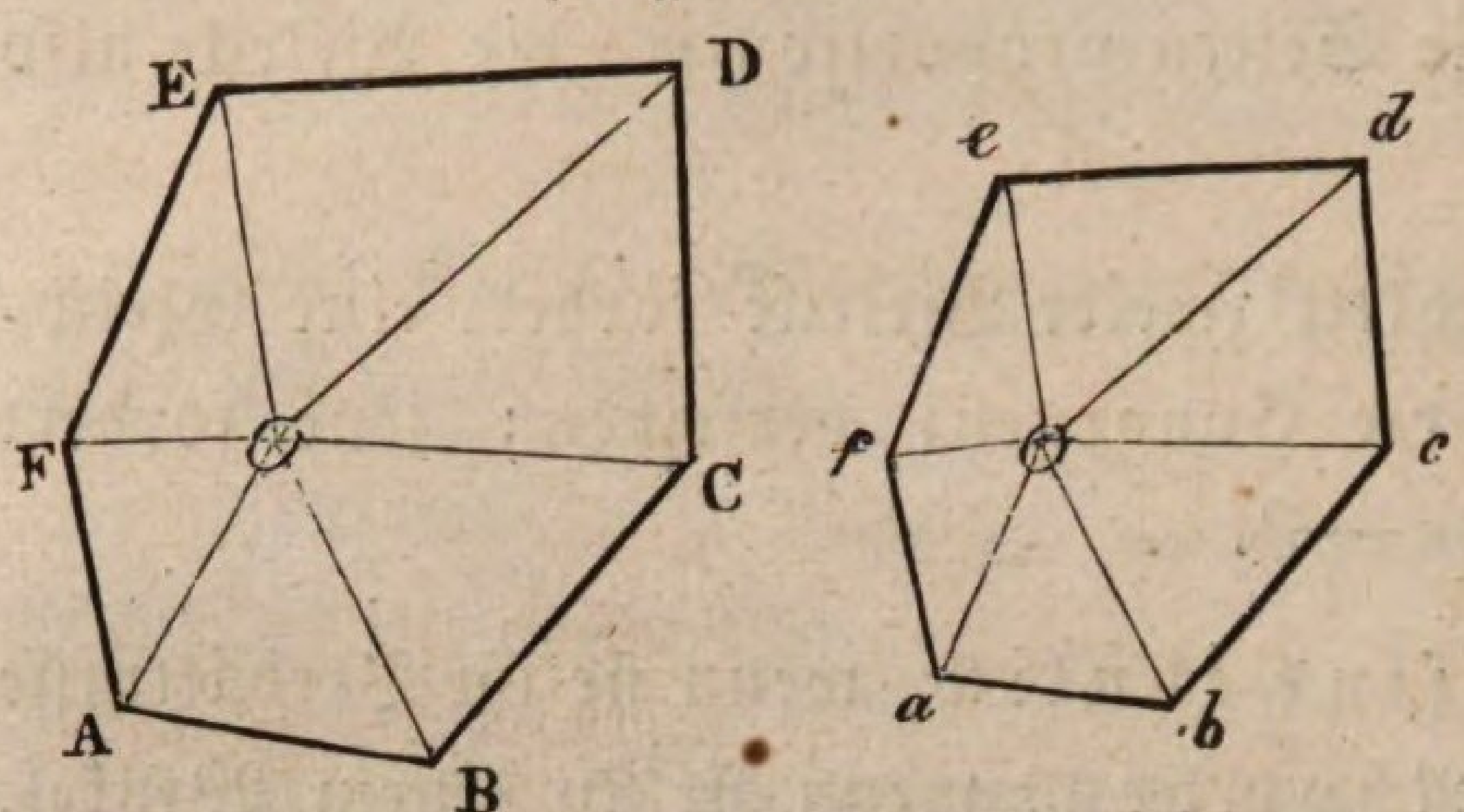
Zusatz. Je zwei homologe Diagonalen verhalten sich wie zwei homologe Seiten.

74. Satz. **Jedem Punkte in der Ebene eines von zwei ähnlichen Vielecken entspricht ein gleichliegender (homologer) Punkt in dem anderen, so daß beide Punkte von den homologen Ecken der Figuren proportionirte Abstände haben.**

Beweis. O sei ein Punkt in der Ebene des Polygons $ABCDEF$ und derselbe sei mit zwei Ecken, am besten den Endpunkten einer Seite, z. B. AB verbunden. Errichtet man nun auf der mit AB homologen Seite ab des ähnlichen Polygons $abcdef$ ein dem Dreiecke ABO ähn-

*) Anm. Die Zeichnung einer Figur wird dem Leser überlassen.

Fig. 167.



liches Dreieck *abo*, so daß die gleichen Winkel beider Dreiecke an homologen Ecken der Vielecke liegen, so ist *o* ein dem Punkte *O* entsprechender, gleichliegender (oder homologer) Punkt. Verbindet man nämlich beide Punkte mit den übrigen Ecken, so läßt sich wie in Satz 72 nach der Reihe die Aehnlichkeit der Dreiecke *BOC* und *boc*, *COD* und *cod* ꝛc. beweisen, so daß also $AB : ab = AO : ao = BO : bo = CO : co$ u. s. w. $= FO : fo$.

Zusatz. Die Verbindungslinien gleichliegender Punkte in jedem Vielecke verhalten sich wie die homologen Seiten; sie machen dazu gleiche Winkel mit denselben und können selbst als homologe Linien der Vielecke betrachtet werden.

75. Satz. **Liegen zwei ähnliche Vielecke so, daß zwei anstoßende Seiten des einen den homologen Seiten des anderen parallel sind, so treffen sämmtliche gerade Linien, die homologe Ecken verbinden, nöthigenfalls verlängert, in Einem Punkte zusammen, welcher dann der Aehnlichkeitspunkt beider Vielecke** (bei der statt habenden Lage) **heißt.**

Beweis. Die Seiten *ab* und *bc* eines Vielecks *abcdef* seien parallel den homologen Seiten *AB*, *BC* eines zweiten ähnlichen Vielecks *ABCDEF*, nämlich: $ab \parallel AB$, $bc \parallel BC$. Aus der Gleichheit der Winkel beider Vielecke folgt, daß bei dieser Annahme auch die übrigen homologen Seiten parallel sein müssen, $CD \parallel cd$, $DE \parallel de$ ꝛc. Verbindet man *A* mit *a* und *B* mit *b*, so treffen diese Linien sich (da *ab* nicht $= AB$ sein soll, in welchem Falle die Vielecke congruent wären) irgendwo selbst oder verlängert. Es geschehe dieses in *O*. Da nun $BO : bo = AB : ab = BC : bc$, so liegen (39, Zus.) *C*, *c*, *O* in gerader Linie oder die gerade Linie *Cc* geht durch *O*. Dasselbe läßt sich in gleicher Weise von *Dd*, *Ee* .... zeigen, folglich ist *O* der Aehnlichkeitspunkt, d. i. derjenige Punkt, in welchem alle, zwei homologe Ecken der Polygone verbindenden geraden Linien zusammentreffen.

1. Zusatz. Der Aehnlichkeitspunkt ist ein gemeinschaftlicher homologer Punkt beider Vielecke. Seine Abstände von den homologen Ecken verhalten sich wie die homologen Seiten.

Fig. 168.

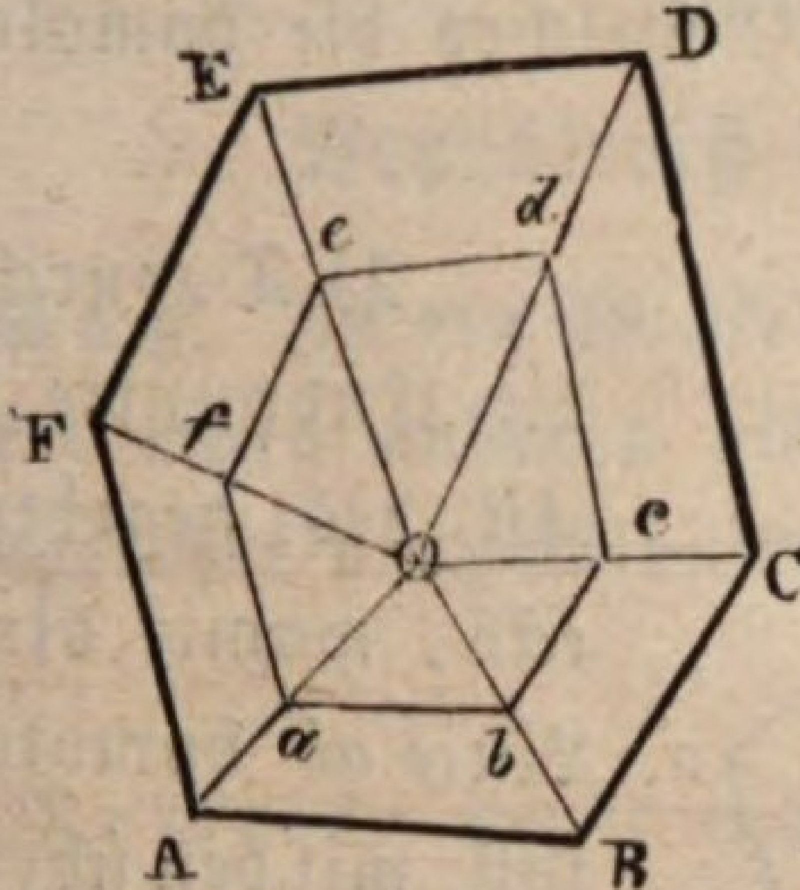
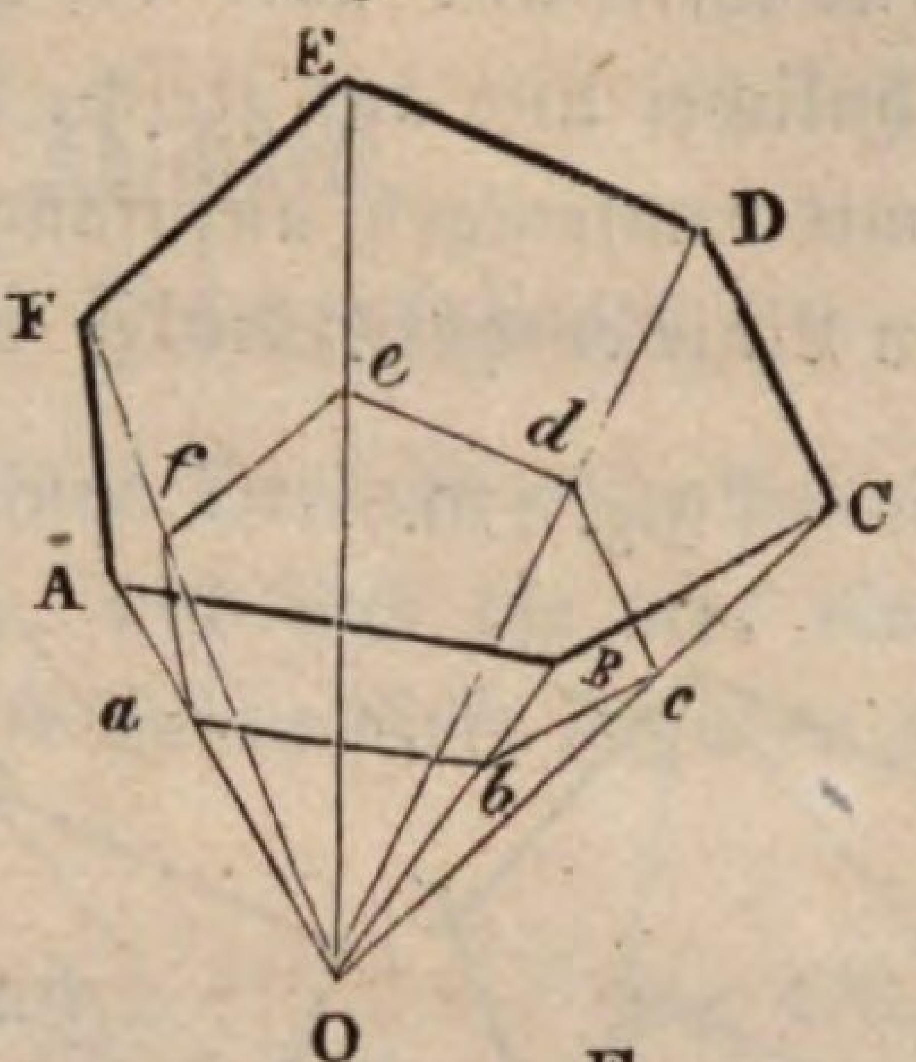
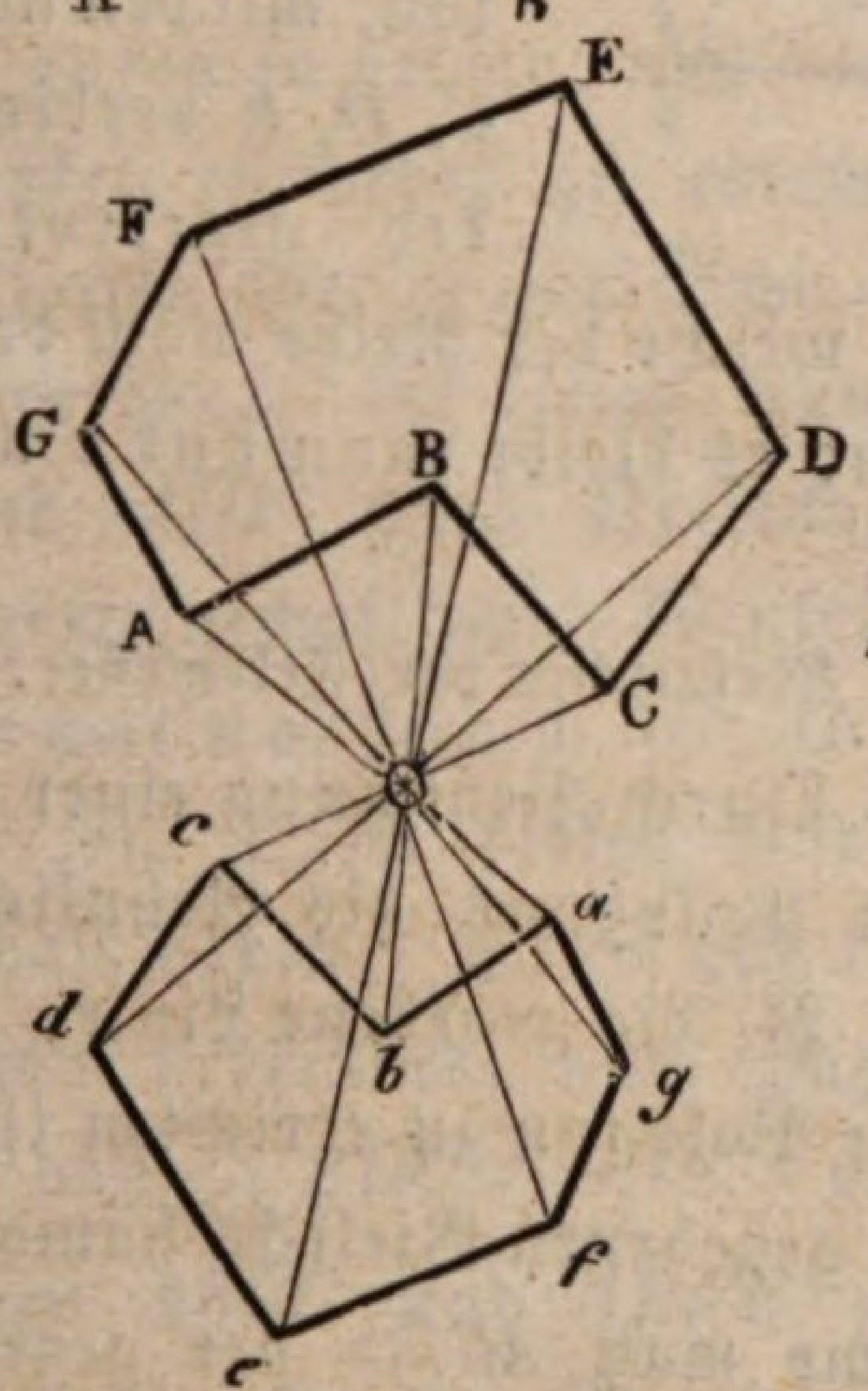
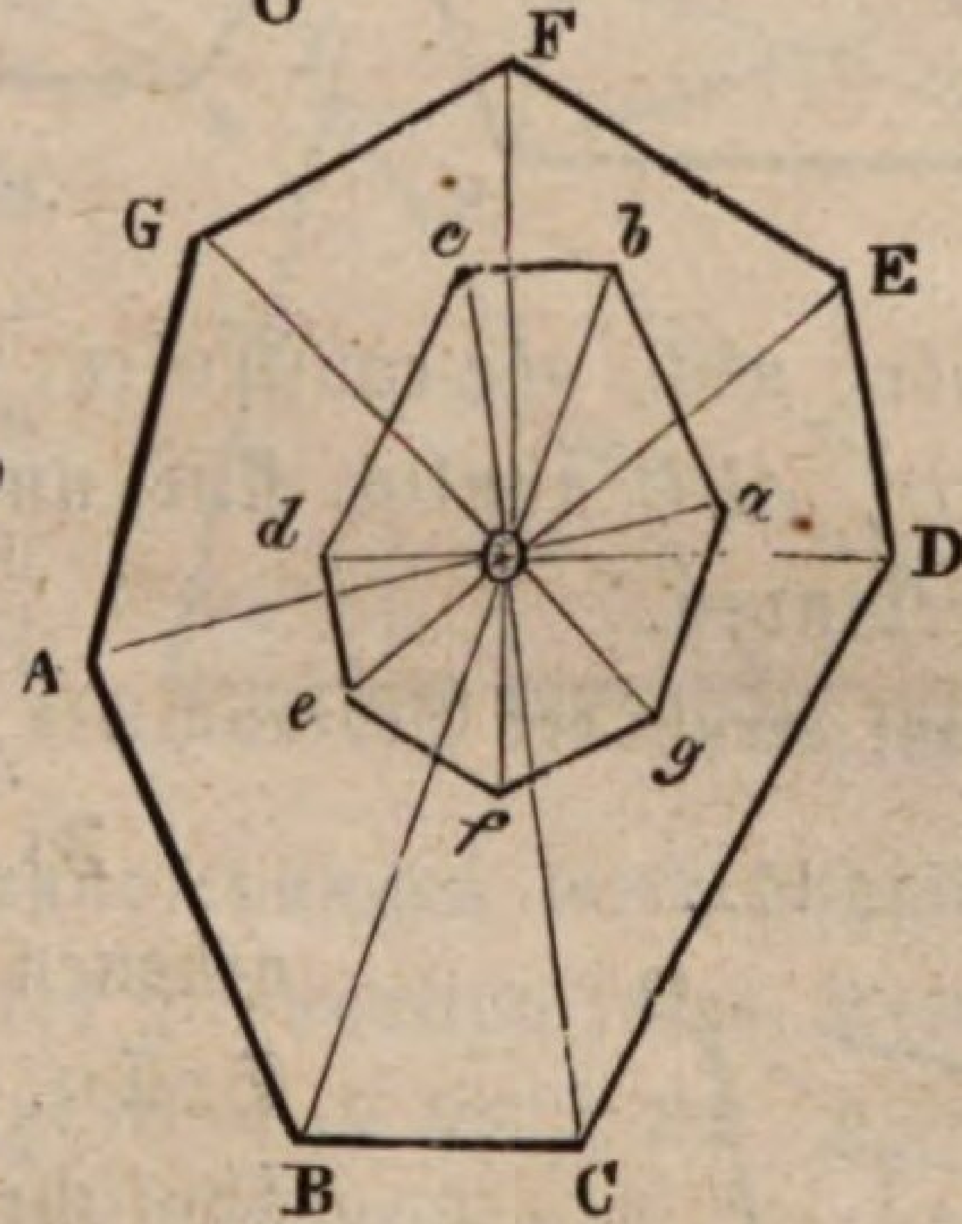


Fig. 169.







2. Zusatz. Man bemerke den Unterschied in der Lage des Punktes *O*, nachdem die parallelen Seiten der beiden Vielecke in gleicher oder in entgegengesetzter Richtung auf einander folgen. Im ersten Falle ist *O* der Punkt, nach welchem hin die Linien *Aa*, *Bb*, ..., die homologe Ecken verbinden, convergiren und in welchem die Verlängerungen dieser Linien zusammentreffen; im anderen Falle gehen die Verbindungslinien *Aa*, *Bb*, ... selbst durch *O*, kreuzen sich daselbst und *O* liegt zwischen je zwei homologen Ecken.

Bemerkung. Hierauf beruht der Gebrauch des Storchschnabels beim Zeichnen; ferner die Theorie der Camera obscura und des Auges.

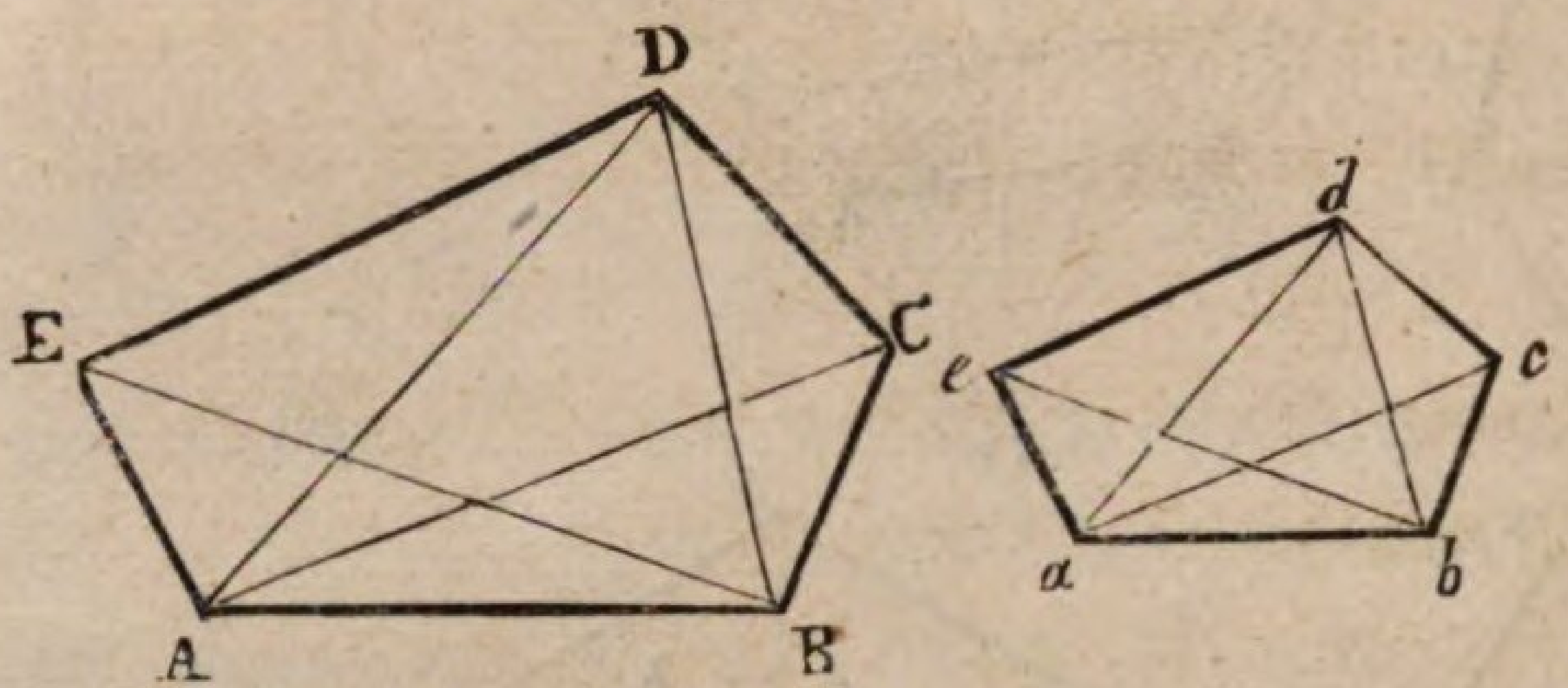
76. Aufgabe. Ueber einer gegebenen geraden Linie ein Polygon zu construiren, das einem gegebenen ähnlich ist.

Dieses kann auf verschiedene Weise geschehen:

1) Auf Grund von Satz 73 dadurch, daß man das gegebene Poly-

gon in Dreiecke theilt und über der gegebenen geraden Linie folgeweiſe eine Reihe ähnlicher und auf gleiche Art an einander ſtoßender Dreiecke conſtruirt, mit demjenigen anzufangen, welches die homologe Seite zur gegebenen Linie enthält.

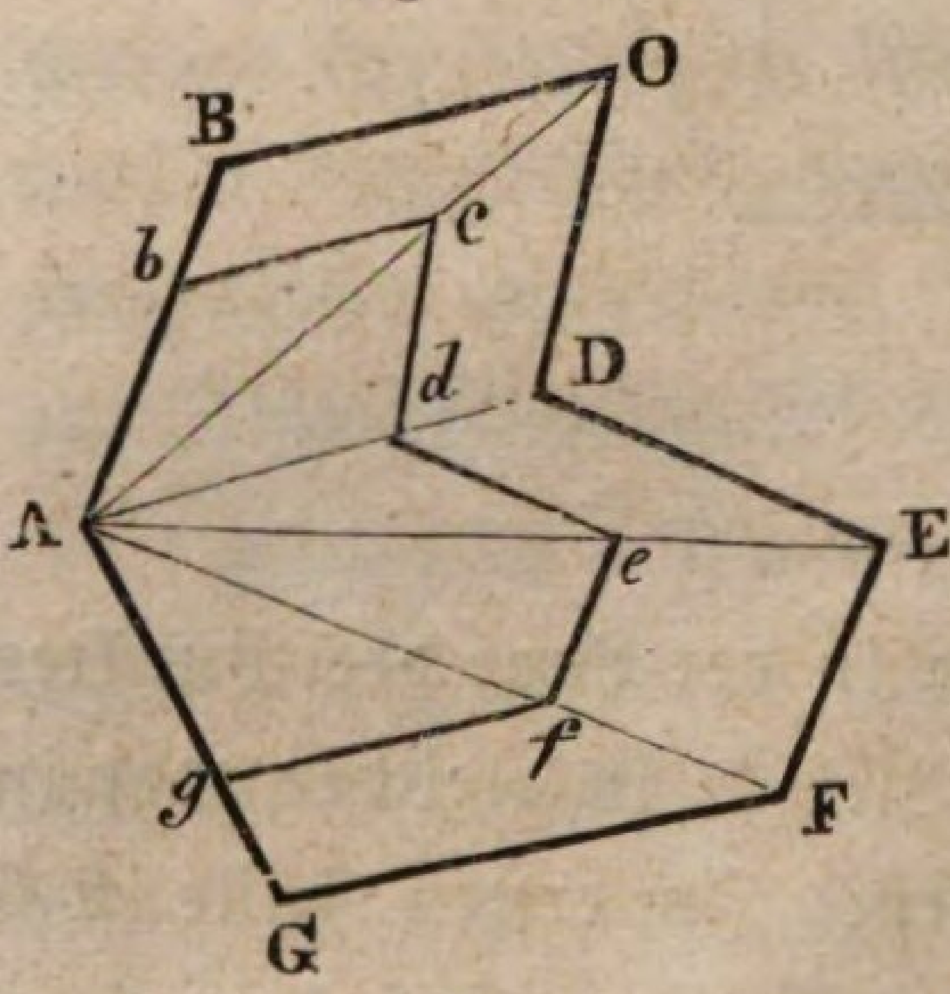
Fig. 170.



2) Dadurch, daß man die Endpunkte der Seite *AB* des gegebenen Vielecks, womit die gegebene Linie *ab* homolog werden ſoll, mit den übrigen Ecken *C*, *D*, *E* verbindet und auf der gegebenen Linie *ab* Dreiecke *abc*, *abd*, *abe* conſtruirt, welche der Reihe nach den Dreiecken *ABC*, *ABD*, *ABE* ähnlich ſind und es bleibt dann nur *c* mit *d*, *d* mit *e* ꝛc. zu verbinden.

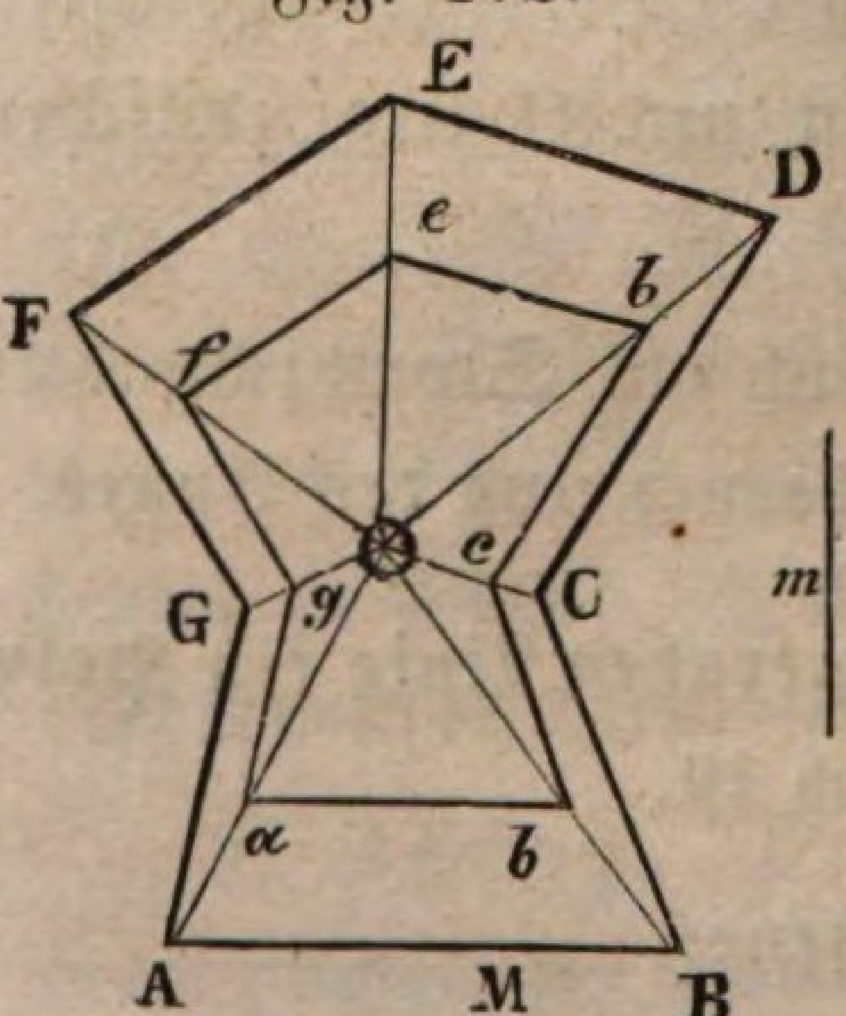
Hierauf beruht der Gebrauch des Meßtiſches der Feldmeſſer.

Fig. 171.



3) Durch Benutzung einer Ecke des gegebenen Polygons als Aehnlichkeitspunkt. Soll z. B. die gegebene Linie, worauf das ähnliche Polygon zu errichten iſt, mit Seite *AB* des gegebenen Vielecks homolog werden, ſo nehme man *Ab* = der gegebenen Linie und, *A* zum Aehnlichkeitspunkte machend, ziehe man die Diagonalen *AC*, *AD* ꝛc., hierauf die Parallelen *bc*, *cd*, . . . mit den Seiten *BC*, *CD*, . . ., jede bis zur folgenden Diagonale. Das hierdurch entſtehende Polygon *Abcdefg* wird dem gegebenen *ABCDEFG* ähnlich ſein.

Fig. 172.



4) Indem man einen anderen inneren oder äußeren Aehnlichkeitspunkt, z. B. den inneren *O* annimmt. Das Verfahren iſt analog dem vorigen, und durch die Figur, worin *ab* = *AM* = *m* (der gegebenen Linie), genugſam angedeutet.

Der Beweis, welcher als leicht dem Leſer zur Uebung überlaſſen bleibt, enthält zugleich die Umkehrung von Satz 75.

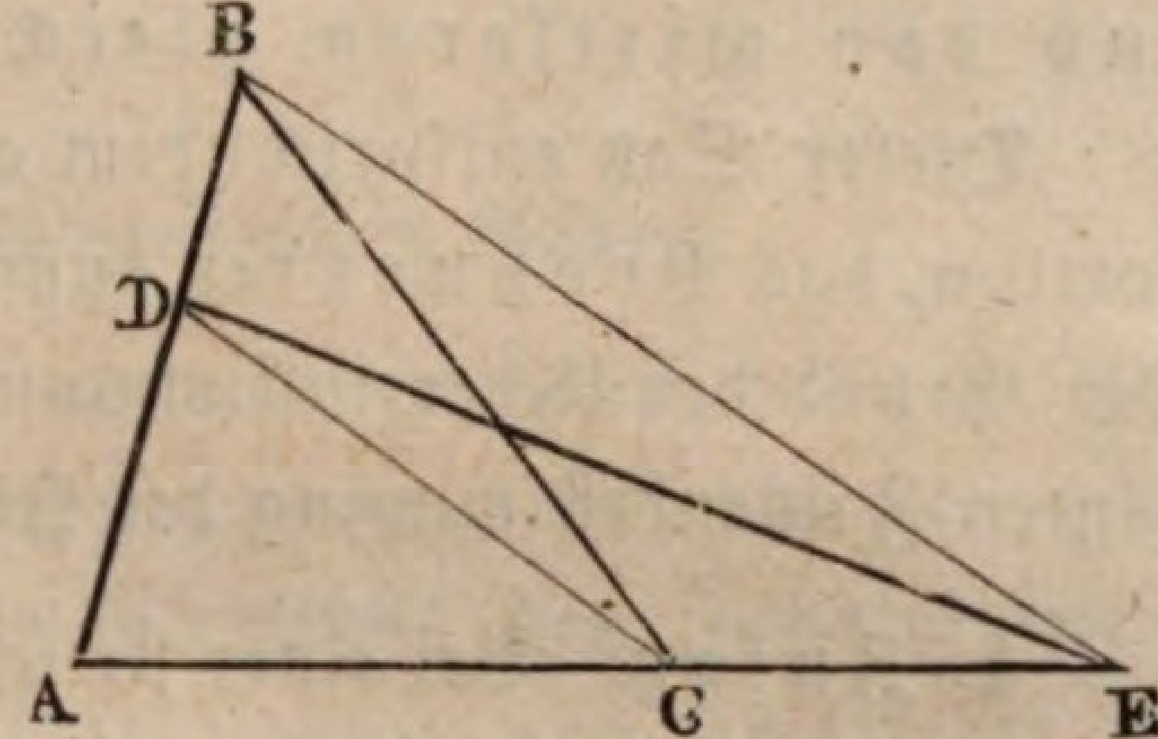
Achter Abschnitt.

Verhältniß des Flächeninhalts.

77. Satz. Ist ein Winkel eines Dreiecks oder Parallelogramms dem Winkel eines anderen gleich, und sind die vier einschließenden Seiten umgekehrt proportionirt, so haben diese Figuren gleichen Flächeninhalt.

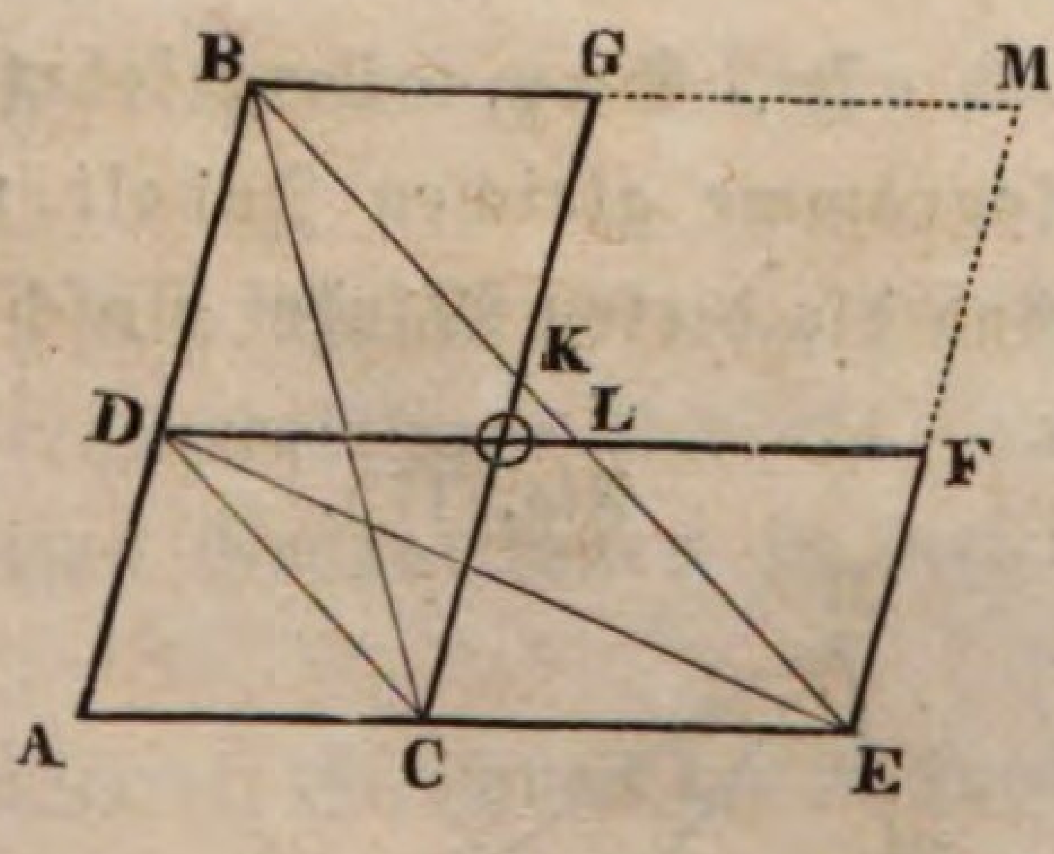
Zum Beweise denke man sich die beiden Figuren so gelegt, daß die gleichen Winkel entweder zu einem gemeinschaftlichen oder zu zwei Scheitelwinkeln werden. Es seien nun 1) *ABC* und *ADE* zwei Dreiecke, welche den gemeinschaftlichen Winkel *A* haben, und worin außerdem $AB : AE = AD : AC$ sei. Unter diesen Voraussetzungen werden die Dreiecke gleichen Inhalt haben. Denn aus der Proportion folgt, wenn man *B* mit *E*, *D* mit *C* verbindet, nach Satz 38, daß $DC \parallel BE$, hieraus nach IV, S. 12, daß $\triangle BDC = EDC$, und schließlich daß $\triangle ABC = ADE$.

Fig. 173.



2) Seien *ABGC* und *ADFE* zwei Parallelogramme, so liegend, daß sie den gemeinschaftlichen Winkel *A* haben, und so beschaffen, daß $AB : AD = AE : AC$. Dieser Voraussetzung gemäß ist nach 1, $\triangle ABC = ADE$. Die Parallelogramme sind aber das Doppelte dieser Dreiecke, daher sind auch die Parallelogramme gleich groß.

Fig. 174.



Ein zweiter Beweis könnte auf IV. S. 14 gegründet werden. Verlängert man nämlich *BG* und *EF* bis zum Treffen (es geschehe in *M*), so ist *ABME* ein Parallelogramm; die Punkte *A*, *O*, *M* liegen (39, Zus.) in gerader Linie; die Parallelogramme *BO*, *OE* sind daher nach IV, 14 gleich, also auch die Parallelogramme *BC*, *DE*.

Bemerkung. Die gegebenen Beweise bleiben wesentlich dieselben, wenn die Figuren so gelegt sind, daß die gleichen Winkel ein Paar Scheitelwinkel bilden. Die Ausführung wird dem Schüler als Uebung überlassen.

1. Zusatz. Die gleichen Parallelogramme *AG* und *AF* bestehen zugleich aus congruenten Stücken; denn die Parallelogramme *DCKB* und *DCEL* lassen sich (IV, 10) in solche zerlegen, und außerdem ist $\triangle$ *BGK* $\cong$ *LFE*, $\triangle$ *ADC* gemeinschaftlich.

2. Zusatz. Zwei Rechtecke und daher auch zwei schiefe Parallelogramme, desgleichen zwei Dreiecke, deren Grundlinien sich umgekehrt verhalten wie ihre Höhen, haben gleichen Inhalt.

3. Zusatz. Bei jeder Proportion unter vier Linien ist das aus den äußeren Gliedern gebildete Rechteck dem aus den mittleren gleich.

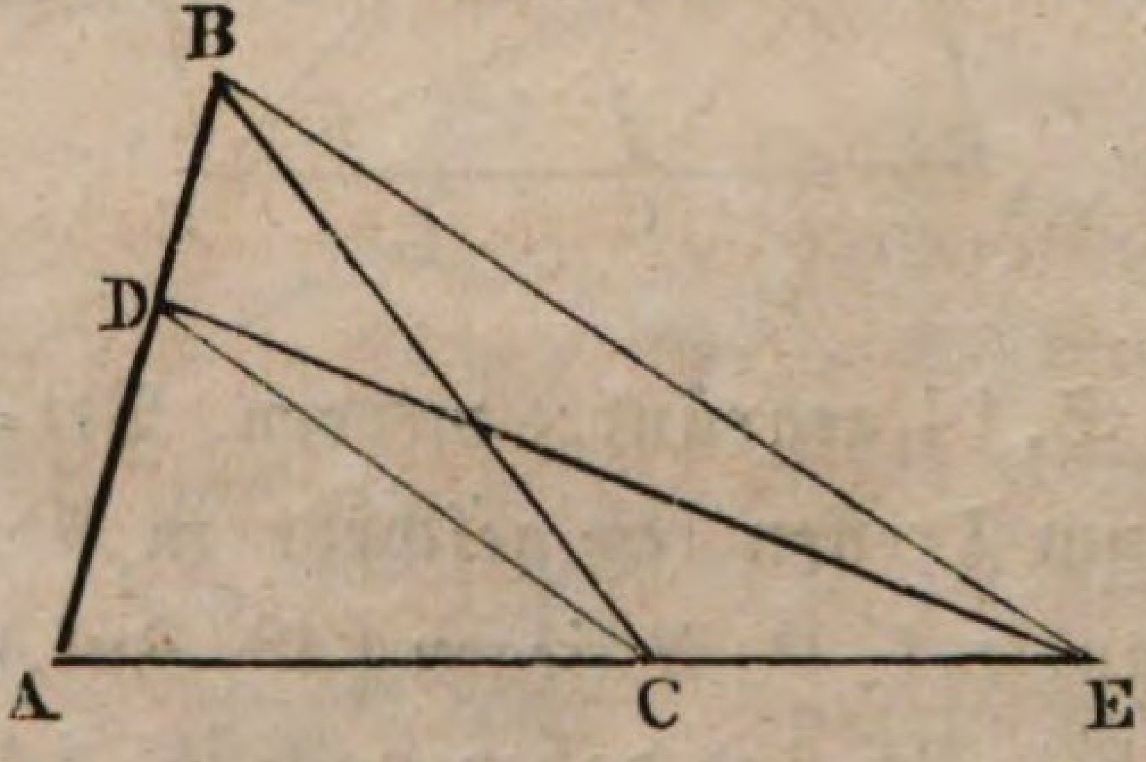
Dieser Satz entspricht dem arithmetischen, daß in jeder Zahlenproportion, das Product der äußeren Glieder dem der inneren gleich ist. Der Grund der Uebereinstimmung beider Sätze liegt in der IV. 3 gezeigten Zahlenbestimmung des Inhalts eines Rechteckes.

4. Zusatz. Bei einer stetigen Proportion zwischen drei Linien ist das Quadrat der mittleren Proportionale dem Rechtecke der beiden äußeren Glieder gleich.

5. Zusatz. Der Satz behält seine Gültigkeit, wenn die Voraussetzung theilweise dahin abgeändert wird, daß die Dreiecke oder Parallelogramme statt zweier gleichen Winkel zwei Supplementar-Winkel haben.

78. Satz. Umgekehrt: haben zwei Dreiecke oder zwei Parallelogramme gleichen Inhalt und außerdem einen gleichen Winkel, so sind die diesen Winkel einschließenden Seiten umgekehrt proportionirt.

Fig. 175.



Beweis. Es sei $\triangle$ *ABC* = $\triangle$ *ADE*, und diese Dreiecke mögen einen gleichen Winkel bei *A* haben; durch Aufeinanderlegung wird dieser Winkel zum gemeinschaftlichen, wenn er es nicht schon ist. Zu zeigen ist, daß *AB* : *AD* = *AE* : *AC*. Zu dem Ende ziehe man *BE*, *DC* und denke sich $\triangle$ *ADC* von den gegebenen abgezogen; dann bleibt $\triangle$ *BDC* = *EDC*. Diese Dreiecke haben aber dieselbe Grundlinie *DC*, also müssen sie (IV, S. 12, Zus. 1) auch dieselbe Höhe haben, d. i. *BE* muß $\parallel$ *DC* sein. Hieraus folgt aber nach S. 37 *AB* : *AD* = *AE* : *AC*.

Für Parallelogramme wie AG, AF (s. v. Fig.) findet dasselbe Statt, da ihre Gleichheit die ihrer Hälften, d. i. der Dreiecke ABC, ADE nach sich zieht.

Der Beweis kann übrigens auch mittelst indirecter Schlußweise auf den vorigen Satz gegründet werden.

1. Zusatz. Sind zwei Rechtecke, und daher auch zwei schiefwinkelige Parallelogramme oder zwei Dreiecke gleich, so verhalten sich ihre Grundlinien umgekehrt wie die Höhen.

2. Zusatz. Die im 5. Zusatze des vorigen §. gemachte Bemerkung gilt auch hier.

79. Bemerkung zu den zwei vorhergehenden Sätzen.

Nachdem in diesen Sätzen bewiesen und namentlich im 3. Zus. S. 77 und 1. Zus. S. 78 es ausgesprochen worden, daß mit jeder Proportion zwischen vier Linien die Gleichheit des Inhalts zweier Rechtecke oder gleichwinkeligen Parallelogramme und umgekehrt mit der letzteren Gleichheit stets eine Proportion zwischen vier Linien verbunden ist, wird man leicht in diesen Sätzen den eigentlichen Verknüpfungspunkt zwischen der Lehre von der Proportionalität der Linien und der von der Gleichheit des Flächeninhaltes der Figuren erkennen. Zugleich wird man einsehen, wie mehrere im Früheren unabhängig von einander bewiesene Sätze einerseits über gleiche Rechtecke, andererseits über Linien-Proportionen gegenseitig von einander abhängen oder sich paarweise gegenseitig begründen. So:

1) Satz 21, Zusatz 2, und Satz 22, Capitel IV. über die Gleichheit von Quadraten und Rechtecken beim rechtwinkeligen Dreiecke, und Satz 51 dieses Capitels über die stetigen Proportionen in diesem Dreiecke.

2) Die Sätze 31 und 32, Cap. IV, über die Gleichheit der Rechtecke aus den Abschnitten zweier am Kreise sich schneidenden geraden Linien, und die Sätze 53, 54 und 55 dieses Capitels über die Proportionalität dieser Abschnitte.

So wird man aus Satz 58 schließen dürfen:

Zieht man durch den Endpunkt A eines Kreisdurchmessers gerade Linien bis zur Begegnung mit dem Kreisumfange und einer gegebenen, auf jenem Durchmesser senkrecht stehenden Geraden, so sind die Rechtecke aus den beiden Abschnitten einer

jeden, welche zwischen A und den Punkten der Begegnung liegen, alle gleich groß.

So wird man ferner die Aufgaben:

a) ein gegebenes Rechteck ohne Aenderung des Inhalts in ein Quadrat zu verwandeln;

b) ein gegebenes Rechteck in ein anderes von gegebenem Seiten-Verhältnisse zu verwandeln;

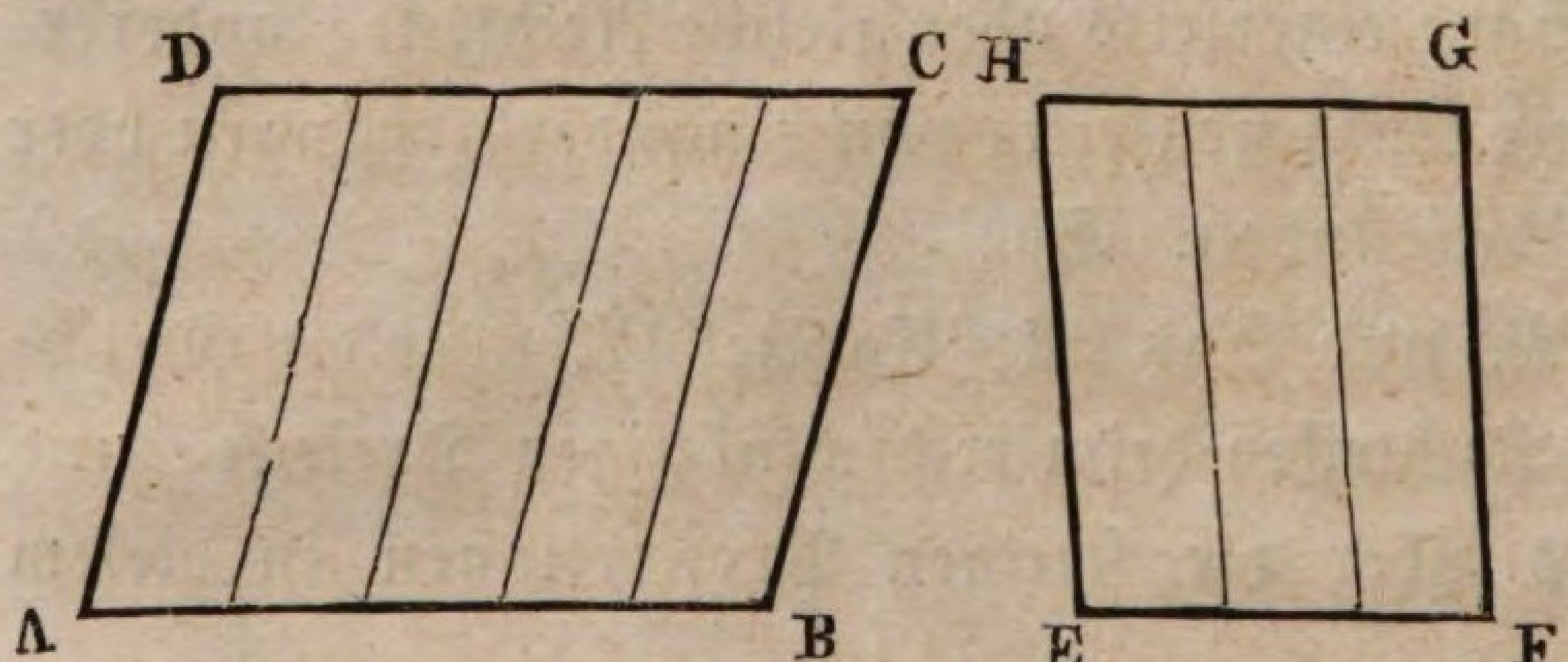
c) ein gegebenes Rechteck in ein anderes zu verwandeln, dessen Umfang gegeben ist oder dessen Seiten einen gegebenen Unterschied haben;

d) eine gerade Linie so zu theilen, daß das Quadrat über einem der Abschnitte dem Rechtecke aus der ganzen Linie und dem anderen Abschnitte gleich kommt;

als identisch mit den in Nr. 63, 65, 67, 68 dieses Capitels gelösten Aufgaben erkennen oder als solche wenigstens, die sich durch Anwendung von Satz 77, Zusatz 3, unmittelbar auf diese reduciren und daher keiner neuen Auflösung bedürfen.

80. Satz. **Parallelogramme, desgleichen Dreiecke von gleicher Höhe, verhalten sich wie ihre Grundlinien, und die von gleicher Grundlinie wie ihre Höhen.**

Fig. 176.

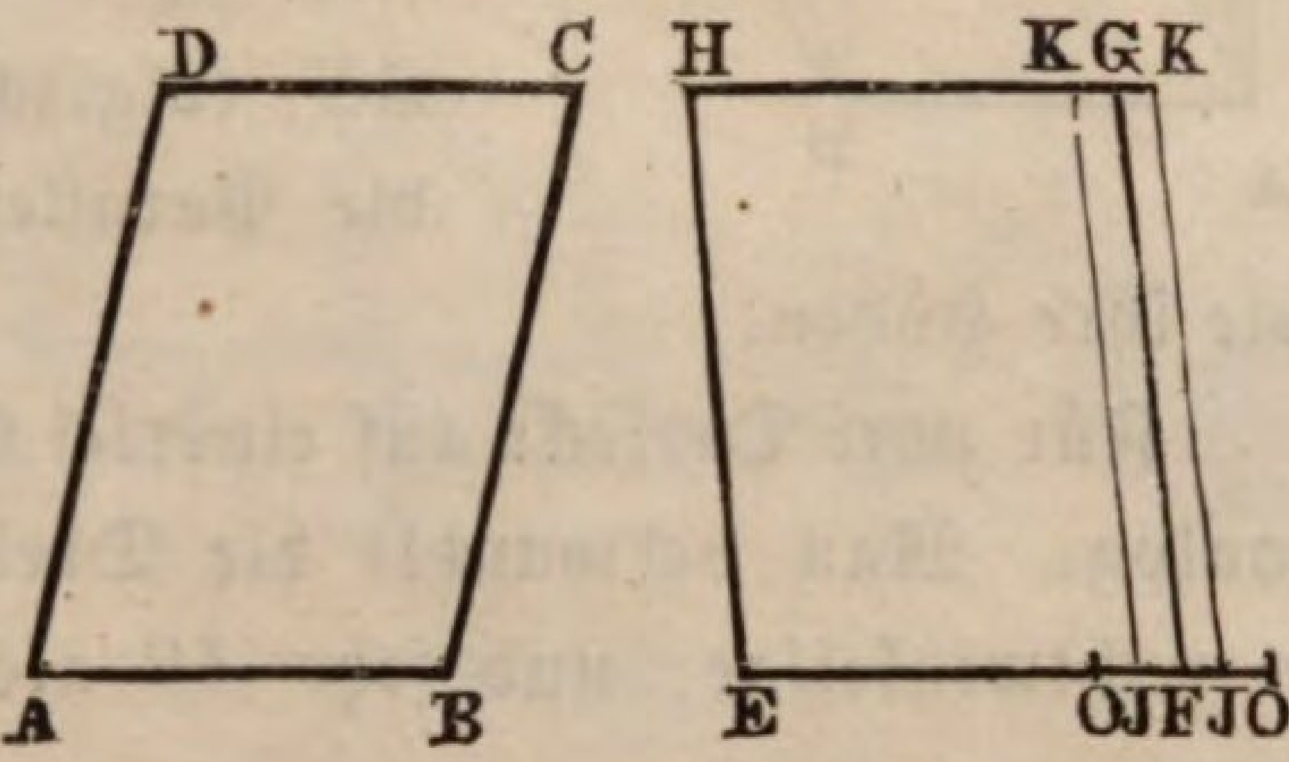


Beweis I. AC, EG seien zwei Parallelogramme von gleicher Höhe, AB und EF die Grundlinien derselben.

Sind 1) diese Grundlinien commensurabel und ist ihr gemeinsames Maß in AB . . $m$mal, in EF . . $n$mal enthalten, so verhält sich AB zu EF wie m zu n. Man denke sich AB wirklich in m gleiche Stücke getheilt, deßgleichen EF in n unter sich und den ersten gleiche. Durch die Theilpunkte seien Parallellinien mit Seite AD oder BC in dem einen, und mit EH oder FG in dem anderen Parallelogramme bis zu den gegenüber liegenden Seiten CD, GH gezogen. Dann wird das Parallelogramm AC in m unter sich congruente, und das Parallelogramm EG in n gleichfalls unter sich congruente Stücke getheilt. Aber jedes jener m Stücke ist jedem dieser n Stücke an Inhalt gleich, da sie

gleiche Grundlinien und dieselbe Höhe haben (IV, 10); folglich ist ein solches Stück das gemeinschaftliche Maß der Parallelogramme, welches in dem einen *m*mal, im anderen *n*mal enthalten ist. Diese verhalten sich also wie $m : n$, d. i. eben so wie die Grundlinien, mithin $AC : EG = AB : EF$.

Fig. 176.

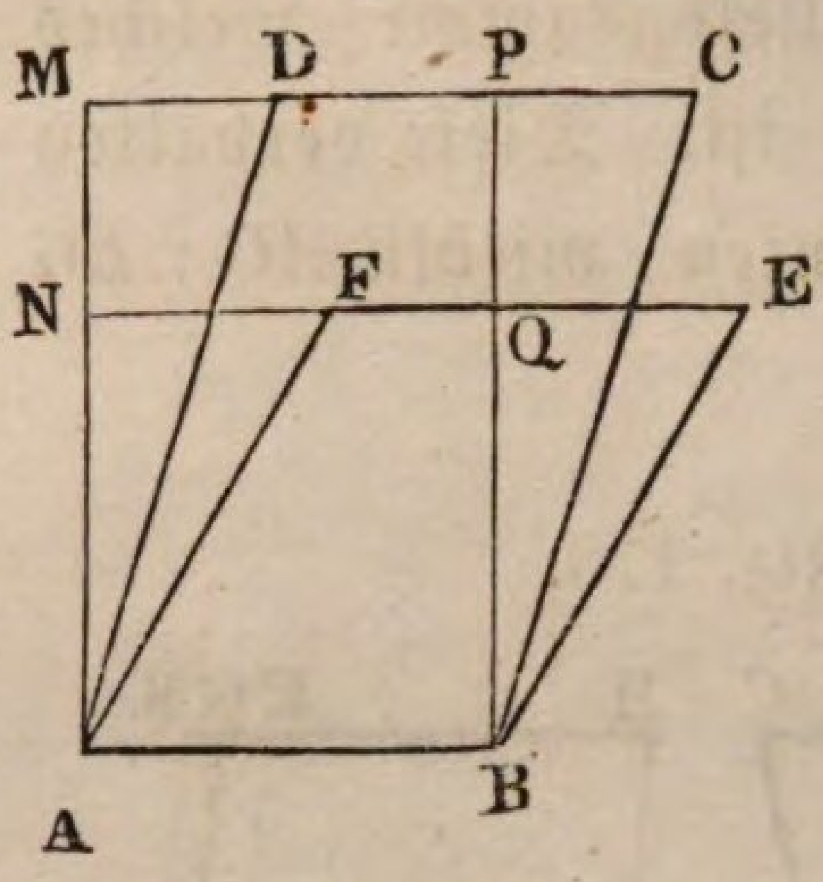


2) Sind die Grundlinien incommensurabel, so sind es auch die Parallelogramme. Die vorige Proportion findet nichts desto weniger Statt. Denn gesetzt, es wäre Parallelogramm AC zu Parallelogramm EG nicht wie $AB : EF$, sondern etwa wie $AB : EO$, so daß $EO >$ oder $< EF$. Theilt man dann, was immer möglich ist, AB in gleiche Theile, die kleiner als OF sind, trägt diese Theile auf EF und, im Falle $EO > EF$, noch über F hinaus, so muß wenigstens ein Endpunkt dieser Theile zwischen O und F fallen. Bezeichnet man ihn mit J und zieht durch ihn $JK \parallel FG$, so ist, weil AB, EJ commensurabel sind, $AC : EK = AB : EJ$. Die Annahme aber war $AC : EG = AB : EO$. Dies kann nicht zusammen bestehen. Denn ist $EO > EF$, so ist EO auch $> EJ$, Parallelogramm $EK > EG$, mithin $AC : EK < AC : EG$, $AB : EJ > AB : EO$, und daher um so mehr $AC : EG > AB : EO$; ist dagegen $EO < EF$, so ist EO auch $< EJ$, $EK < EG$, mithin $AC : EK > AC : EG$, $AB : EJ < AB : EO$, und um so mehr $AC : EG < AB : EO$, jedesmal in Widerspruch mit der Annahme. Es kann daher nur Parallelogramm AC : Parallelogramm $EG = AB : EF$ sein.

Für Dreiecke kann dasselbe mit fast gleichen Worten bewiesen werden, wenn man nur statt der Parallelen gerade Linien von der Spitze der Dreiecke nach den Theilpunkten der Grundlinie zieht und sich in Betreff der Gleichheit der so entstehenden Theile auf IV. 12 beruft. Die Nothwendigkeit eines eigenen Beweises fällt aber weg, wenn man berücksichtigt, daß ein Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms von derselben Grundlinie und Höhe ist.

II. Daß sich auch Parallelogramme von gleicher Grundlinie wie die Höhen verhalten, ergiebt sich sofort aus dem Vorigen, wenn man solche Parallelogramme mit Beibehaltung ihrer Grundlinie in Rechtecke

Fig. 177.



verwandelt; so z. B. die Parallelogramme AC und AE der nebenstehenden Figur, welche dieselbe Grundlinie AB haben, in die Rechtecke AP, AQ. Sieht man nun AB als die Höhe dieser Rechtecke an, so sind AM, AN die Grundlinien derselben und es folgt aus I., daß $AP : AQ = AM : AN$; aber $AP = AC$, $AQ = AE$, folglich auch $AC : AE = AM : AN$, d. i. die Parallelogramme AC, AE verhalten sich wie ihre Höhen.

Für zwei Dreiecke auf einerlei Grundlinie AB ist der Beweis ganz analog. Man verwandle die Dreiecke mittels Parallellinien zu AB in rechtwinkelige, und sehe AB als gemeinschaftliche Höhe dieser letzteren an.

Fig. 178.

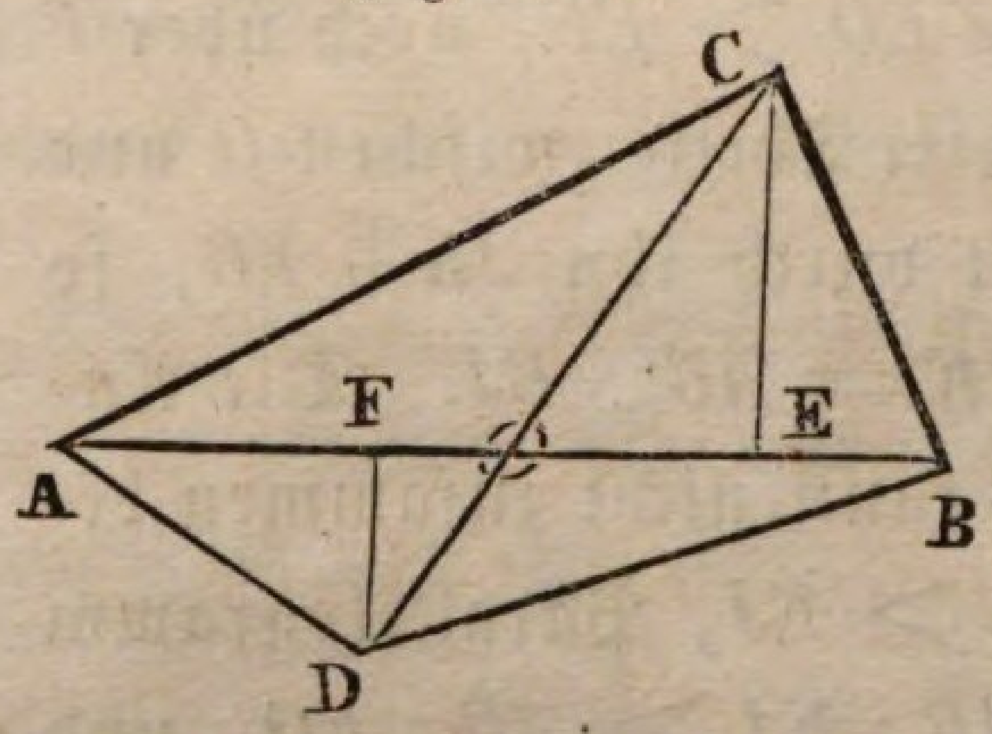
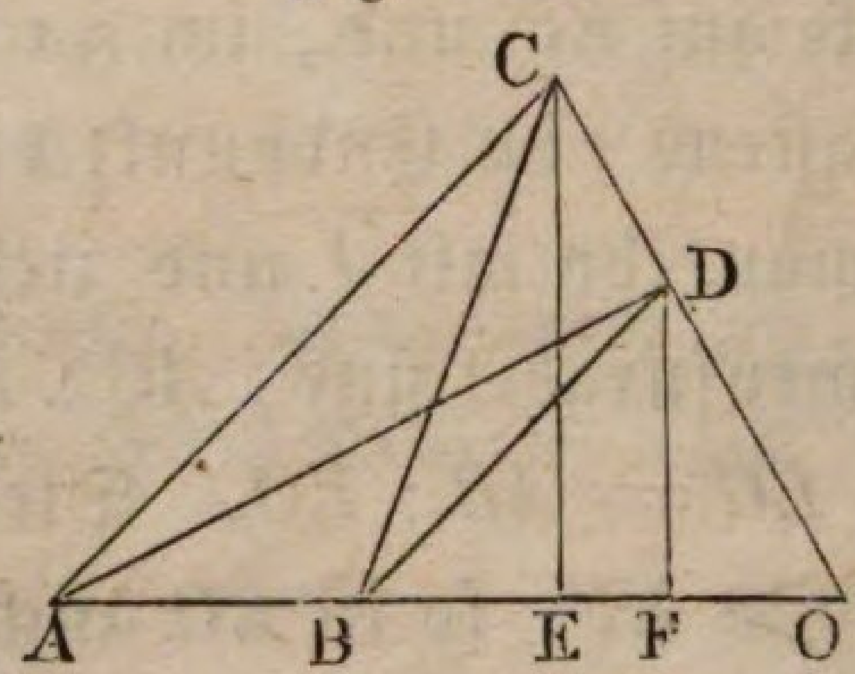


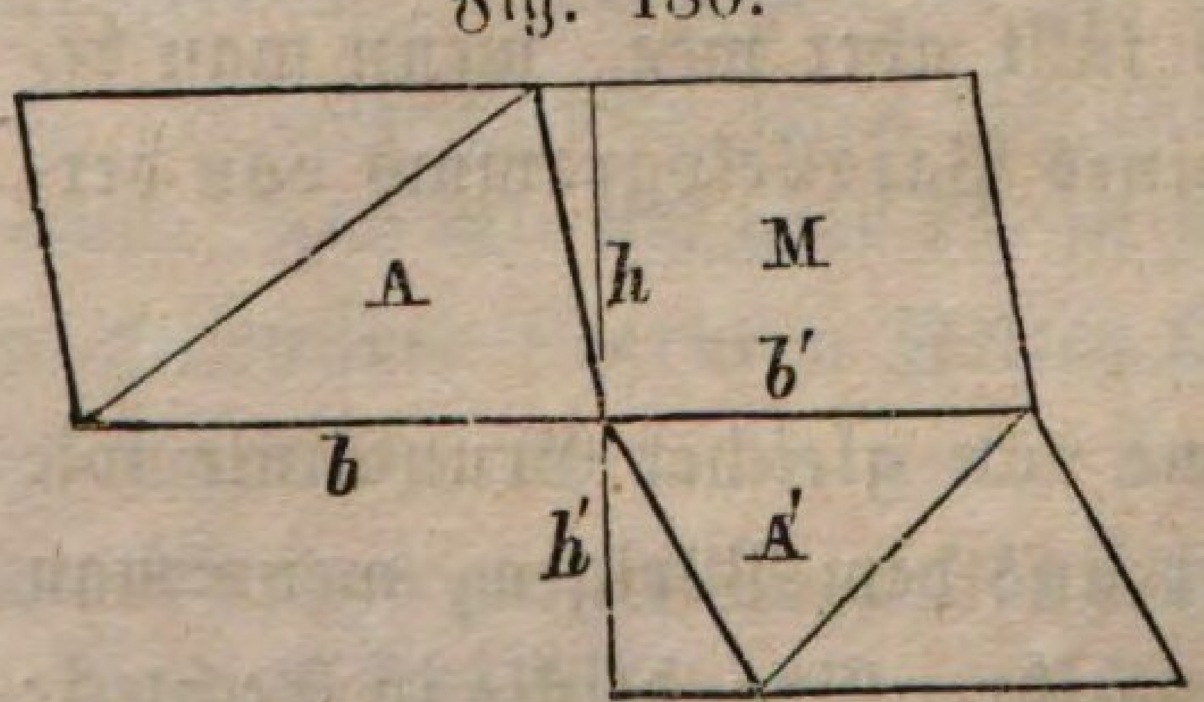
Fig. 179.



Zusatz. Haben zwei Dreiecke ABC, ABD eine gemeinschaftliche Grundlinie AB, so verhalten sie sich auch wie diejenigen beiden Segmente CO, OD einer durch ihre Spitzen C, D gehenden geraden Linie, welche zwischen diesen Spitzen und der Grundlinie oder deren Verlängerung liegen. Denn fällt man aus C und D auf AB die Senkrechten CE, DF, so ist nach obigem Satze $\triangle\ ABC : \triangle\ ABD = CE : DF = CO : OD$, da $\triangle\ COE \sim DOF$.

81. Satz. **Dreiecke und Parallelogramme überhaupt stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundlinien und Höhen. Haben sie einen gleichen Winkel oder ergänzen zwei Winkel derselben sich zu $2R$, so stehen die Dreiecke und Parallelogramme auch im zusammengesetzten Verhältnisse der diese Winkel einschließenden Seiten.**

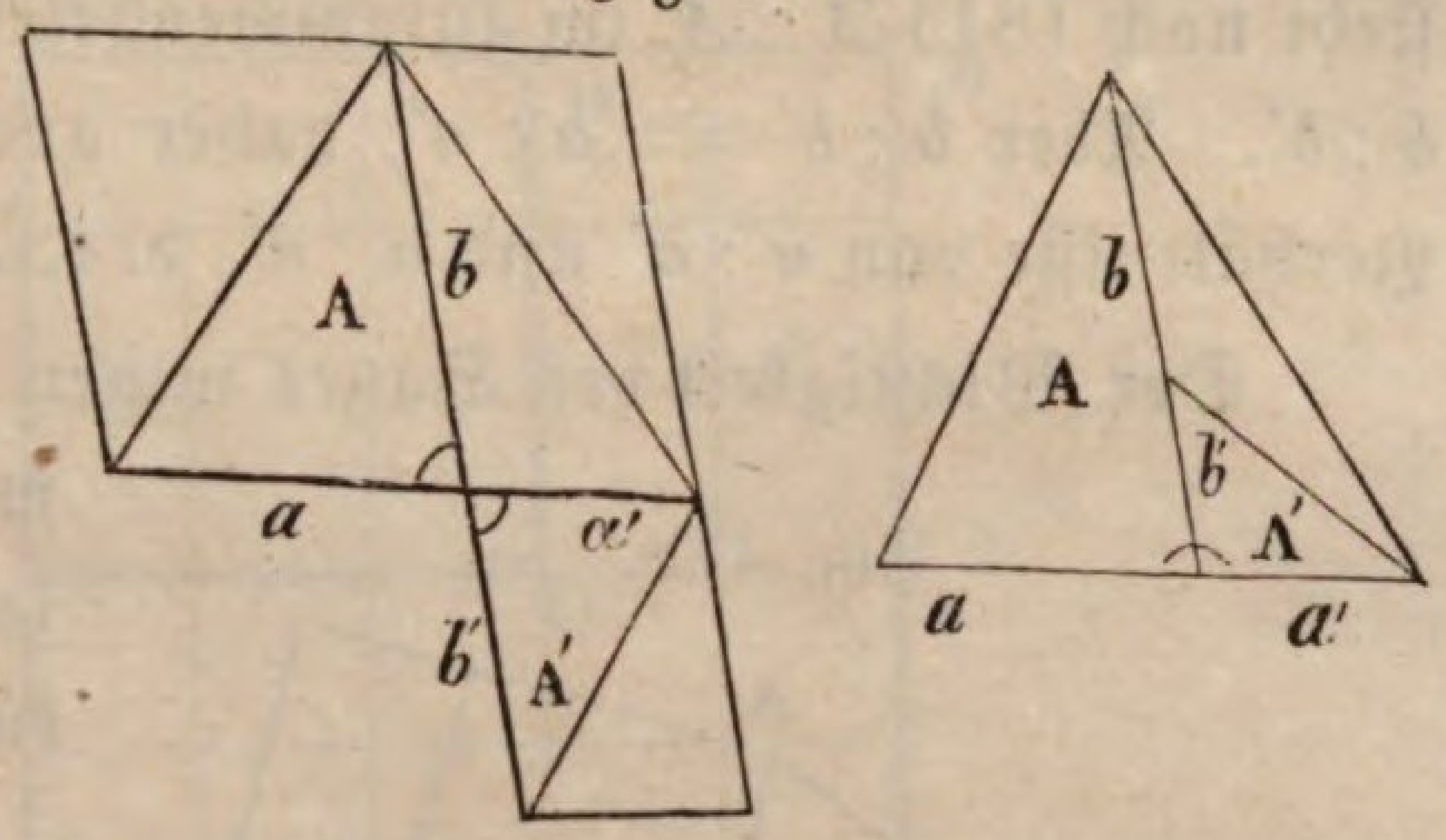
Fig. 180.



Beweis I. Ein Dreieck oder Parallelogramm A habe die Grundlinie b, die Höhe h; ein zweites A'

die Grundlinie b', die Höhe h'. Bildet man ein drittes M, welches mit A gleiche Höhe h, mit A' aber gleiche Grundlinie b' hat, so ist (80) $A : M = b : b'$ und $M : A' = h : h'$; folglich steht (nach V. 34, Erkl.) $A : A'$ in einem aus $b : b'$ und $h : h'$ zusammengesetzten Verhältnisse.

Fig. 181.



II. Haben A und A' einen gleichen Winkel oder ergänzt bei Dreiecken ein Winkel von A einen Winkel von A' zu $2R$, und diese Winkel werden bei A von den Seiten a und b, bei A' von den Seiten a' und b' eingeschlossen, so läßt sich wieder ein drittes Parallelogramm oder Dreieck M machen, welches einen derselben Winkel oder den Supplementarwinkel enthält und a', b als einschließende Seiten hat. Dann ist (80) $A : M = a : a'$, $M : A' = b : b'$, folglich steht $A : A'$ im zusammengesetzten Verhältnisse von $a : a'$ und $b : b'$.

1. Zusatz. Das aus zwei Linien-Verhältnissen zusammengesetzte Verhältniß ist kein anderes als das Verhältniß des Rechtecks aus den Antecedenten zum Rechteck aus den Consequenten. Da ein Rechteck üblicher Weise durch das Product seiner Seitenlängen bezeichnet wird, weil (IV, 3) dieses Product den Inhalt des Rechtecks ausdrückt, so kann man das aus den Verhältnissen $a : b$ und $e : f$ zusammengesetzte auch als das der Producte ae, bf, also durch $ae : bf$ angeben.

2. Zusatz. Die aus den gleichstelligen Gliedern zweier Linien-Proportionen gebildeten Rechtecke stehen wieder in Proportion.

Ist $a : b = c : d$
und $e : f = g : h$,

so ist auch $ae : bf = cg : dh$, unter ae, bf, ... die aus a und e, b und f, ... gebildeten Rechtecke verstanden. Siehe V, 34 und 35.

3. Zusatz. Sind vier gerade Linien in Proportion, so sind es in derselben Ordnung ihre Quadrate; und umgekehrt, sind vier Quadrate proportionirt; so sind es auch ihre Seiten.

4. Zusatz. Sind drei gerade Linien stetig proportionirt, so verhält sich die erste zur dritten, wie das Quadrat der ersten zu dem der zweiten, oder das der zweiten zu dem der dritten.

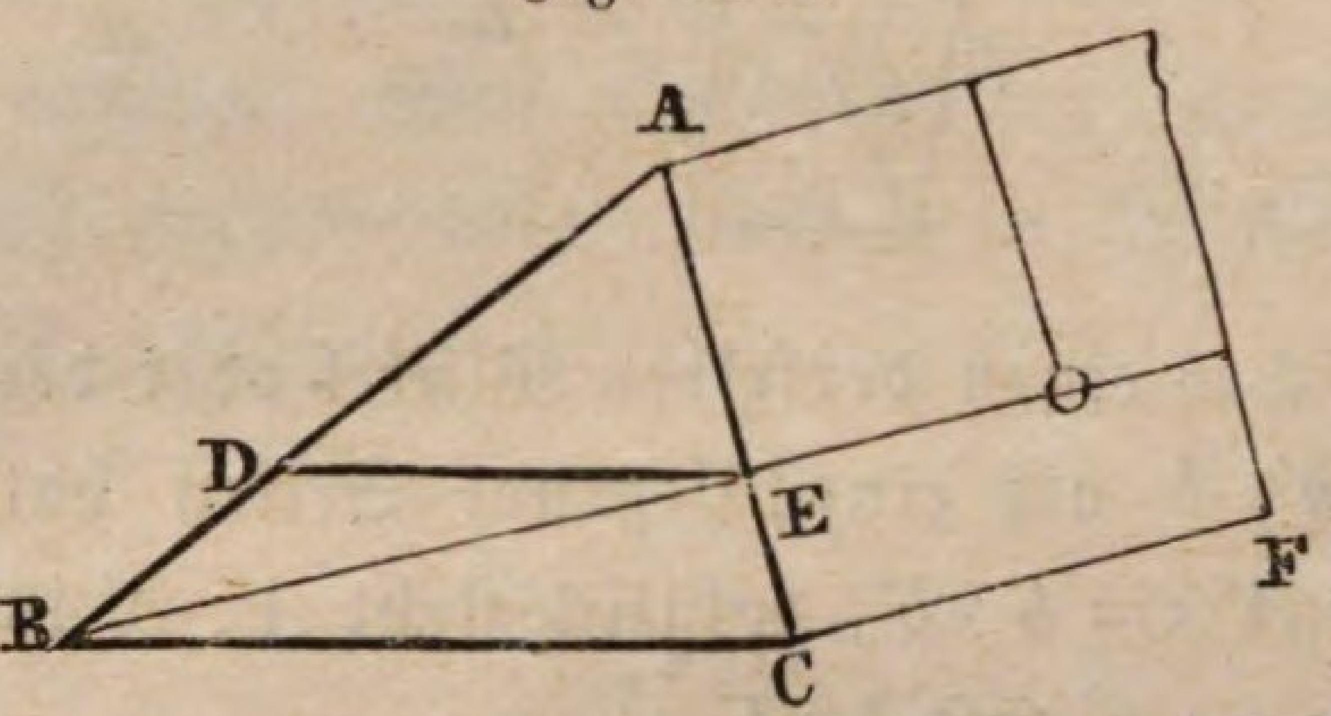
Beweis leicht.

82. Satz. Aehnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Dieser Satz ist eigentlich ein specieller Fall des vorhergehenden und läßt sich kurz aus ihm herleiten. Sind nämlich A, A' zwei ähnliche Dreiecke, a und a', b und b' zwei Paare homologer Seiten derselben, so steht nach (81) $A : A'$ im zusammengesetzten Verhältnisse von $a : a'$ und $b : b'$. Aber $b : b' = a : a'$, daher auch $A : A'$ im zusammengesetzten Verhältnisse von $a : a'$ und $a : a'$, d. i. $A : A' = a^2 : a'^2$.

Der Wichtigkeit des Satzes wegen folgen hier noch zwei ohne Anwendung des Begriffs vom zusammengesetzten Verhältnisse geführte Beweise:

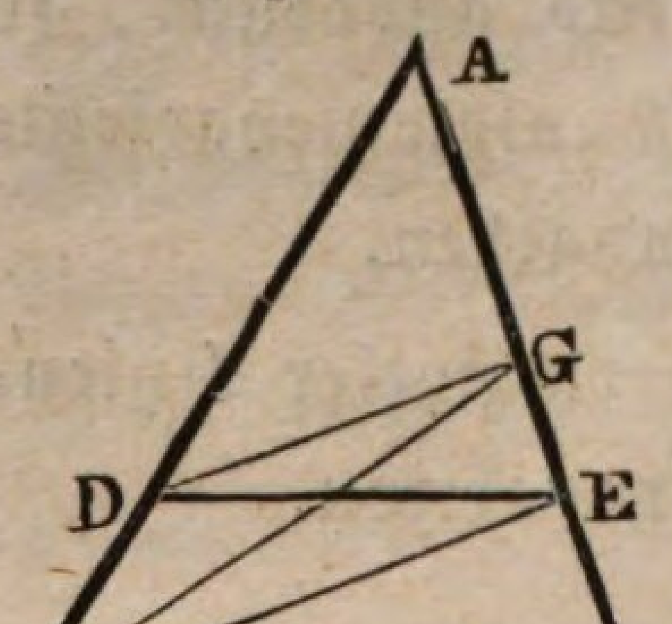
Fig. 182.



1. Beweis. ABC und ADE seien zwei ähnliche Dreiecke, so gelegt, daß $\sphericalangle A$ gemeinschaftlich, $BC \parallel DE$ ist. Verbindet man B mit E, so ist (80)

$\triangle ABC : \triangle ABE = AC : AE = AC \times AC : AE \times AC$,
$\triangle ABE : \triangle ADE = AB : AD = AC : AE = AE \times AC : AE \times AE$,
folglich (31) $\triangle ABC : \triangle ADE = \overline{AC}^2 : \overline{AE}^2$.

Fig. 183.



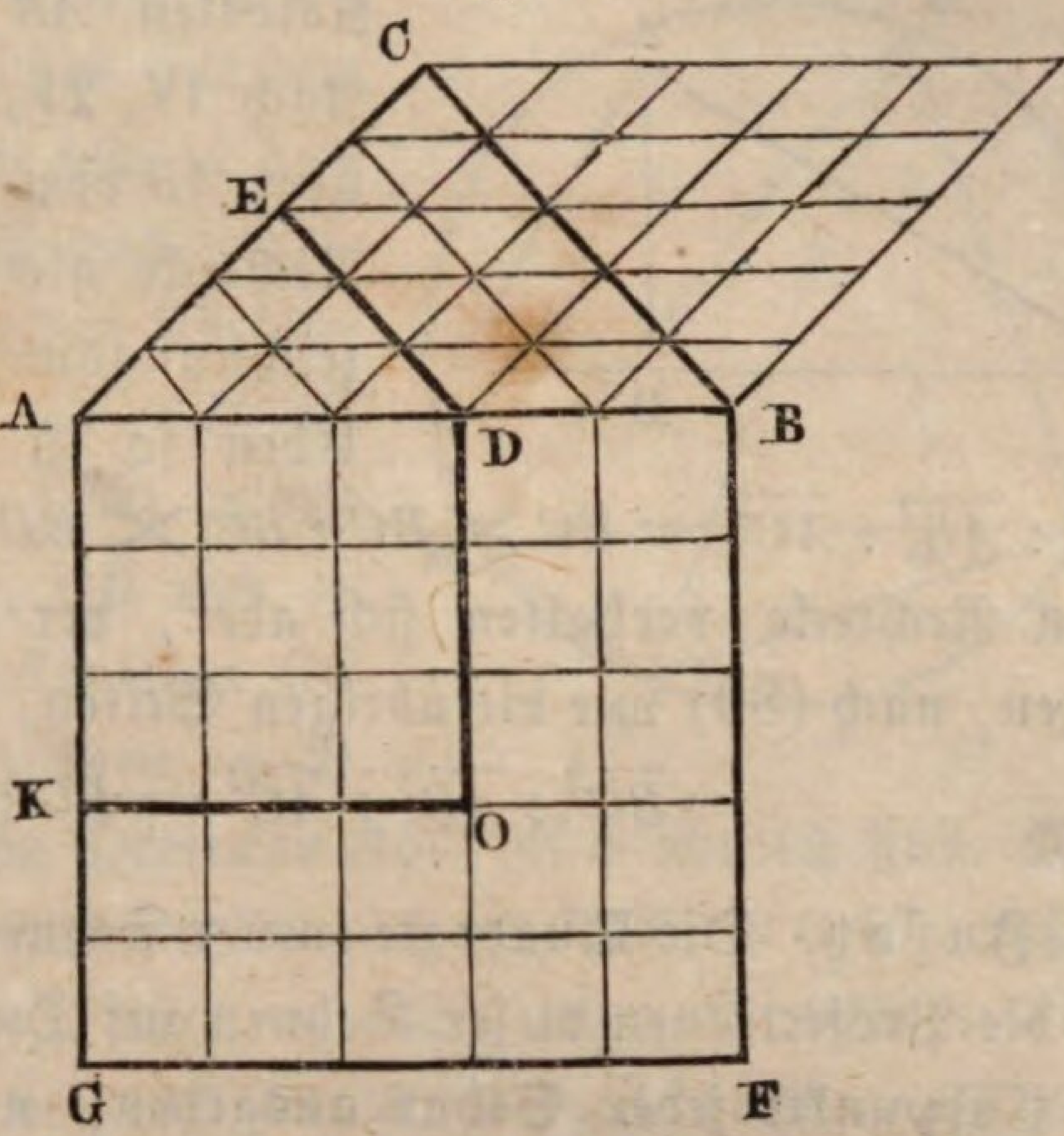
2. Beweis durch Verwandlung eines der beiden Dreiecke. Ziehe $DG \parallel BE$, dann BG, so ist $\triangle ADE = ABG$. Aber $\triangle ABC : ABG = AC : AG = \overline{AC}^2 : AC \times AG$. Aus $AC : AE = AB : AD = AE : AG$ folgt, daß $AC \times AG = \overline{AE}^2$, daher $\triangle ABC : ADE = \overline{AC}^2 : \overline{AE}^2$.

Zusatz. Der Satz gilt auch für ähnliche Parallelogramme, da solche das Doppelte ähnlicher Dreiecke sind, die zwei Seiten mit dem Parallelogramm gemein haben. Uebrigens lassen sich die obigen Beweise auch fast wörtlich auf das Parallelogramm anwenden, was der Uebung überlassen bleibt.

Bemerkung. Sind die Seiten der Dreiecke oder Parallelogramme commensurabel und verhalten sich also wie ganze Zahlen, so verhalten sich die Dreiecke oder Parallelogramme wie die zweiten Potenzen derselben oder wie Quadratzahlen, sind also gleichfalls commensurabel, wie Fig. 184 dieses für das Seiten-Verhältniß 5 : 3 veran-

schaulicht. Die Dreiecke *ABC*, *ADE* oder die doppelt so großen Parallelogramme verhalten sich, was hier durch die Zahl der congruenten Theile unmittelbar nachgewiesen werden kann, wie 25 : 9, und eben so verhalten sich die Quadrate *AF*, *AO* homologer Seiten. Jene Nachweisung ist zuerst für die Parallelogramme zu machen; die Dreiecke enthalten dann eben so viele, aber nur halb so große Theile.

Fig. 184.



83. **Satz. Aehnliche Vielecke verhalten sich wie die Quadrate zweier beliebigen ihrer homologen Seiten, Diagonalen, Linien überhaupt.**

Beweis. Nach Satz 73 lassen sich ähnliche Vielecke immer in eine gleiche Anzahl ähnlicher Dreiecke zerlegen. Da nun (82) je zwei dieser letzteren sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten verhalten und das Verhältniß dieser Quadrate für alle Paare homologer Linien dasselbe ist (81, 3. Zus.), so verhalten sich auch (V. 28) die Summen der Dreiecke, d. i. die Vielecke, wie diese Quadrate.

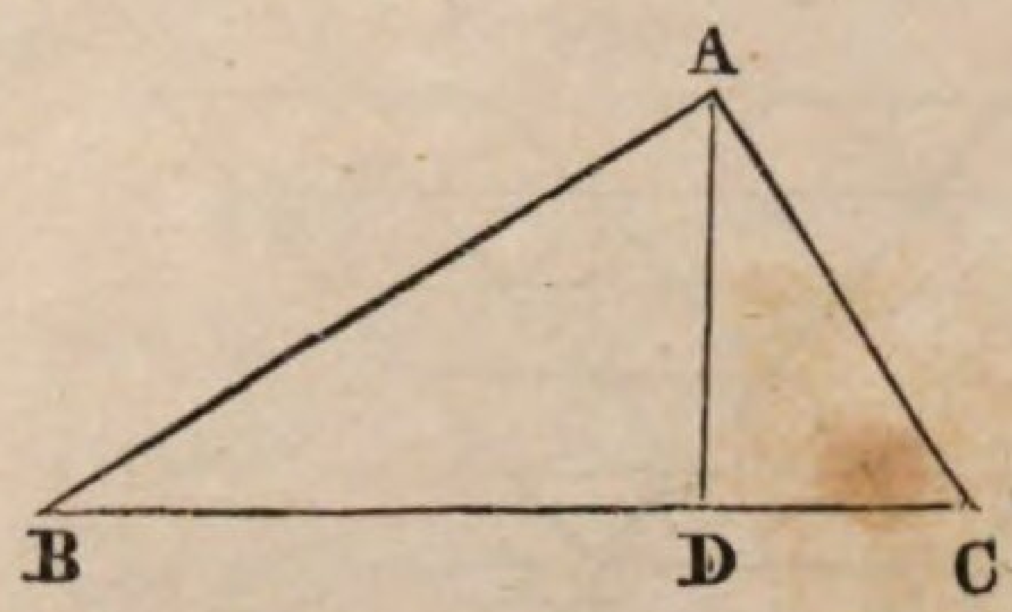
Die Anwendung dieser Schlußreihe auf zwei bestimmte vorgelegte Vielecke wird dem Schüler überlassen.

Bemerkung. Man übersehe nicht, daß, im Falle die Seiten parallel sind, zu den homologen Linien auch namentlich die Abstände des Aehnlichkeitspunktes (75) von den Ecken der Vielecke gehören.

84. **Satz. Im rechtwinkeligen Dreiecke verhält sich:**
a) **das Quadrat der Hypotenuse zum Quadrat einer Kathete wie die Hypotenuse selbst zur Projection der Kathete auf ihr;**
b) **die Quadrate der Katheten verhalten sich zu einander wie ihre Projectionen auf der Hypotenuse.**

Beweis. *ABC* sei ein bei *A* rechtwinkeliges Dreieck und $AD \perp BC$.

Fig. 184.



Dann sind BD, DC die Projectionen der Katheten AB, AC auf der Hypotenuse. Nach IV. 21, Zusatz 2, ist das Quadrat über AB dem aus BC und BD gebildeten Rechtecke gleich, oder, nach üblicher Bezeichnungsweise ist $\overline{AB}^2 = BC \times BD$. Eben so ist $\overline{AC}^2 = BC \times CD$, daher $\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BC \times BC : BC \times BD : BC \times CD$. Die drei letzteren Rechtecke verhalten sich aber, der gemeinschaftlichen Seite BC wegen, nach (80) wie die übrigen Seiten, daher

$$\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BC : BD : DC.$$

Zusatz. Die Quadrate zweier Sehnen eines Kreises verhalten sich wie die Projectionen dieser Sehnen auf Durchmesser, welche von einem der Endpunkte jeder Sehne ausgehen, namentlich verhalten sich die Quadrate aller Sehnen, welche von dem einen und anderen Endpunkte eines Durchmessers ausgehen, wie die auf diesem Durchmesser genommenen Projectionen der Sehnen.

85. Satz. **Errichtet man auf den drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks ähnliche Vielecke, so daß jene Seiten dabei homologe werden, so ist das über der Hypotenuse errichtete Vieleck die Summe der beiden anderen.**

Beweis. a sei die Hypotenuse, b und c seien die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks; die darauf als homologen Seiten errichteten ähnlichen Vielecke seien resp. A, B, C. Nach (83) ist: $A : B : C = a^2 : b^2 : c^2$, daher (V. 26 oder 33) $A : B + C = a^2 : b^2 + c^2$. Es ist aber $a^2 = b^2 + c^2$, folglich $A = B + C$.

Bemerkung. Zur Uebung versuche man es, den Satz für gleichseitige Dreiecke unmittelbar durch Construction, ohne Berufung auf IV. 21, nachzuweisen.

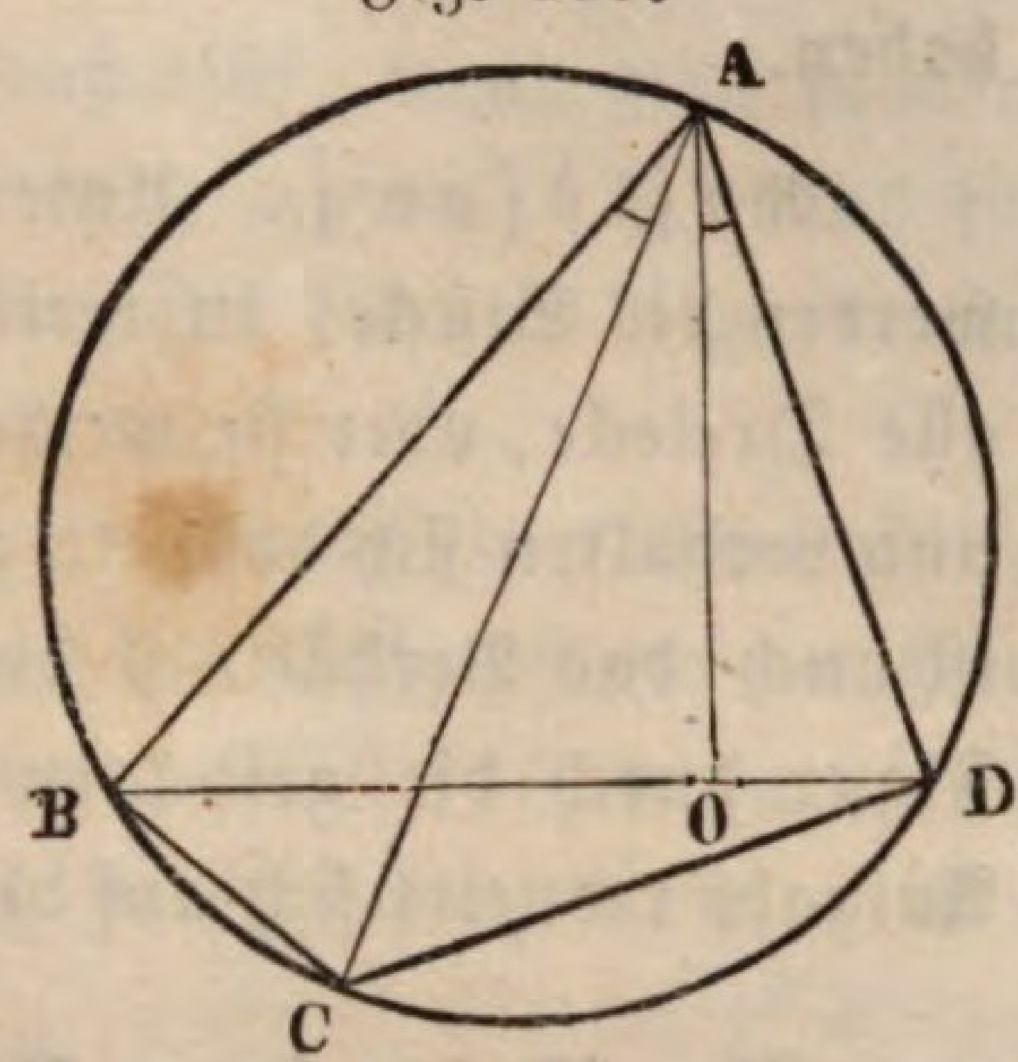
86. Satz. **(Ptolemäischer Lehrsatz.) In jedem Kreisviereck ist die Summe der Rechtecke aus den gegenüber liegenden Seiten dem Rechtecke aus den Diagonalen gleich.**

Beweis. $ABCD$ sei ein Kreisviereck, dessen Diagonalen AC und BD sind. Es ist zu zeigen, daß

$$AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD.$$

Zu dem Ende suche man jedes der Rechtecke $AB \times CD$, $AD \times BC$ in ein anderes zu verwandeln, welches mit dem Rechtecke $AC \times BD$ eine Seite gemein hat. Ist z. B. AC diese Seite, so ist nachzuweisen, daß die Summe der beiden übrigen Seiten der neuen Rechtecke $= BD$ ist. Diese übrigen Seiten sind (78) vierte Proportionalen zu AC, AB, CD und zu AC, AD, BC, zu deren Construction sich am besten ähnliche Dreiecke eignen, z. B. solche, die den an AC stoßenden Dreiecken ABC, ACD ähnlich sind. Man mache also $\sphericalangle DAO = CAB$, dann wird auch $\sphericalangle DAC = OAB$; außerdem ist $\sphericalangle ADO = ACB$ und $\sphericalangle ABO = ACD$; daher $\triangle AOD \sim ABC$, $\triangle ACD \sim ABO$, und damit $AC : AB = CD : BO$, $AC : AD = BC : OD$.

Fig. 185.



Aus der ersten dieser Proportionen folgt, daß $AB \times CD = AC \times BO$; aus der zweiten, daß $AD \times BC = AC \times OD$. Durch Addition dieser gleichen Rechtecke ergiebt sich, daß $AB \times CD + AD \times BC = AC\,(BO + OD) = AC \times BD$, w. z. b. w.

Neunter Abschnitt.

Aufgaben zum vorigen Abschnitte.

Die Grundaufgaben über Verwandlung und Theilung der Figuren sind bereits im vierten Capitel, §. 17 bis 20, 23, 24, 25 vorgekommen. Auch sind in §. 79 des laufenden Capitels diejenigen Aufgaben bezeichnet worden, welche ihrem Wortlaute nach zwar den Inhalt von Figuren betreffen, sich aber unmittelbar auf Proportions-Aufgaben reduciren und als solche in 63, 65, 67, 68 ihre Auflösung gefunden haben. Von diesen letzteren sollen die in 65 und 68 behandelten, der veränderten Analyse wegen, hier nochmals in der Reihe der übrigen aufzuführenden Aufgaben eine Stelle finden.

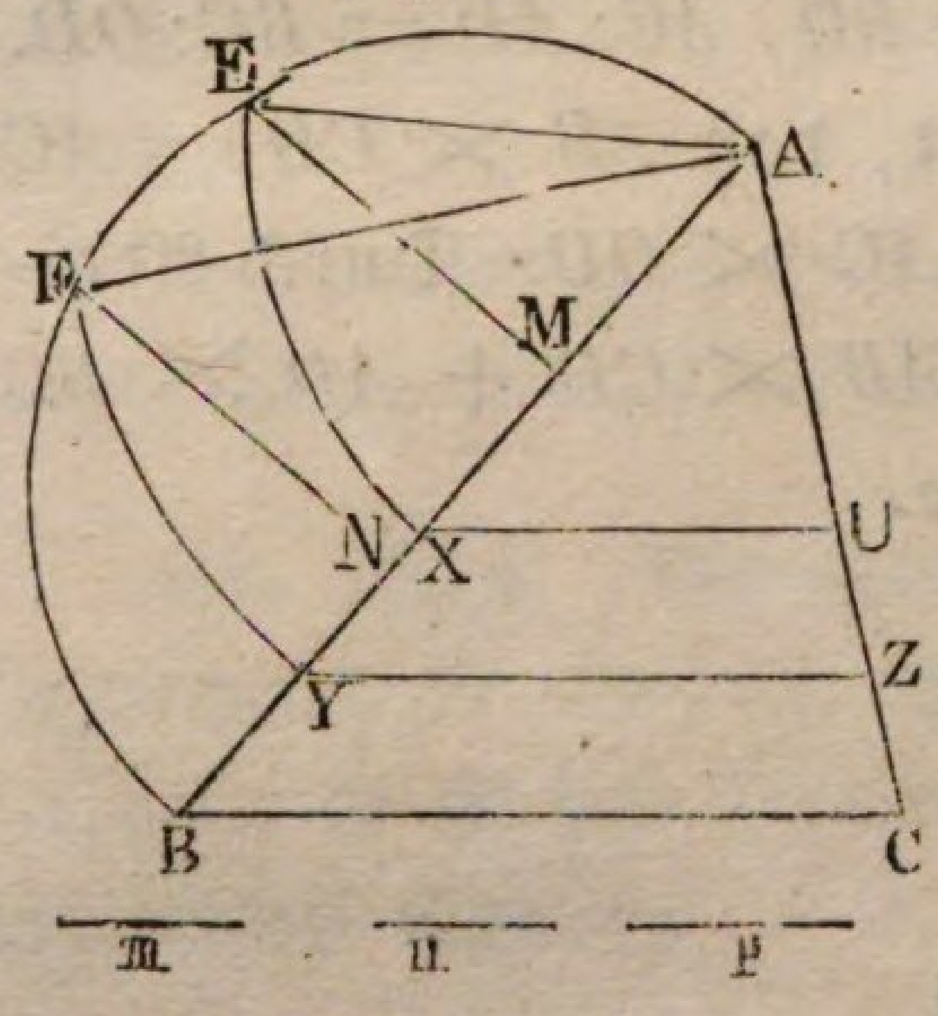
87. Aufgabe. **Ein Dreieck oder ein Parallelogramm durch Linien, die beim Dreieck alle von einer bestimmten Ecke auslaufen, beim Parallelogramm aber alle einer bestimmten Seite parallel sein**

sollen, in Stücke zu theilen, die ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.

Auflösung. Unter den gestellten Bedingungen der Aufgabe werden die Stücke, in welche die Figur getheilt werden soll, entweder alle Dreiecke, oder sie werden alle Parallelogramme von gleicher Höhe, und verhalten sich deßhalb zu einander wie ihre Grundlinien. Hiernach ist auch das Verhältniß der Stücke gegeben, in welche eine Seite der Figur durch die gesuchten Theilungslinien geschnitten wird, und die Aufgabe reducirt sich auf die in 62.

88. **Aufgabe. Ein Dreieck durch gerade Linien, die einer Seite desselben parallel laufen, in Stücke zu theilen, deren Verhältniß gegeben ist.**

Fig. 136.



Auflösung. Angenommen, Dreieck ABC sei wirklich durch die mit Seite BC parallelen Linien XU, YZ in drei Stücke getheilt, die sich wie die gegebenen Linien m, n, p zu einander verhalten, so daß $\triangle AXU : XZ : YC = m : n : p$; dann muß $\triangle AXU : AYZ : ABC = m : m + n : m + n + p$ sein. Diese Dreiecke verhalten sich aber auch als ähnliche, wie die Quadrate ihrer homologen Seiten, daher muß $\overline{AX}^2 : \overline{AY}^2 : \overline{AB}^2 = m : m + n : m + n + p$ sein. Um die quadratischen Verhältnisse in die von Linien zu verwandeln, sei nach 84, Zusatz, über AB ein Halbkreis beschrieben und darin Sehne $AE = AX$, $AF = AY$ gemacht. Projicirt man nun diese Sehnen auf den Durchmesser AB mittelst der Perpendikel EM, FN, so ist nach 84, Zusatz, $\overline{AE}^2 : \overline{AF}^2 : \overline{AB}^2 = AM : AN : AB$, oder $\overline{AX}^2 : \overline{AY}^2 : \overline{AB}^2 = AM : AN : AB$. Hieraus und dem Obigen folgt aber: $AM : AN : AB = m : m + n : m + n + p$, und daraus: $AM : MN : NB = m : n : p$. Die Bestimmung der Punkte M, N ist hierdurch auf Aufgabe 62 zurückgeführt. Aus ihr folgt die synthetische Construction von selbst.

89. **Aufgabe. Ein Quadrat zu machen, das sich zu einem gegebenen Quadrate wie eine Linie m zur Linie n verhält.**

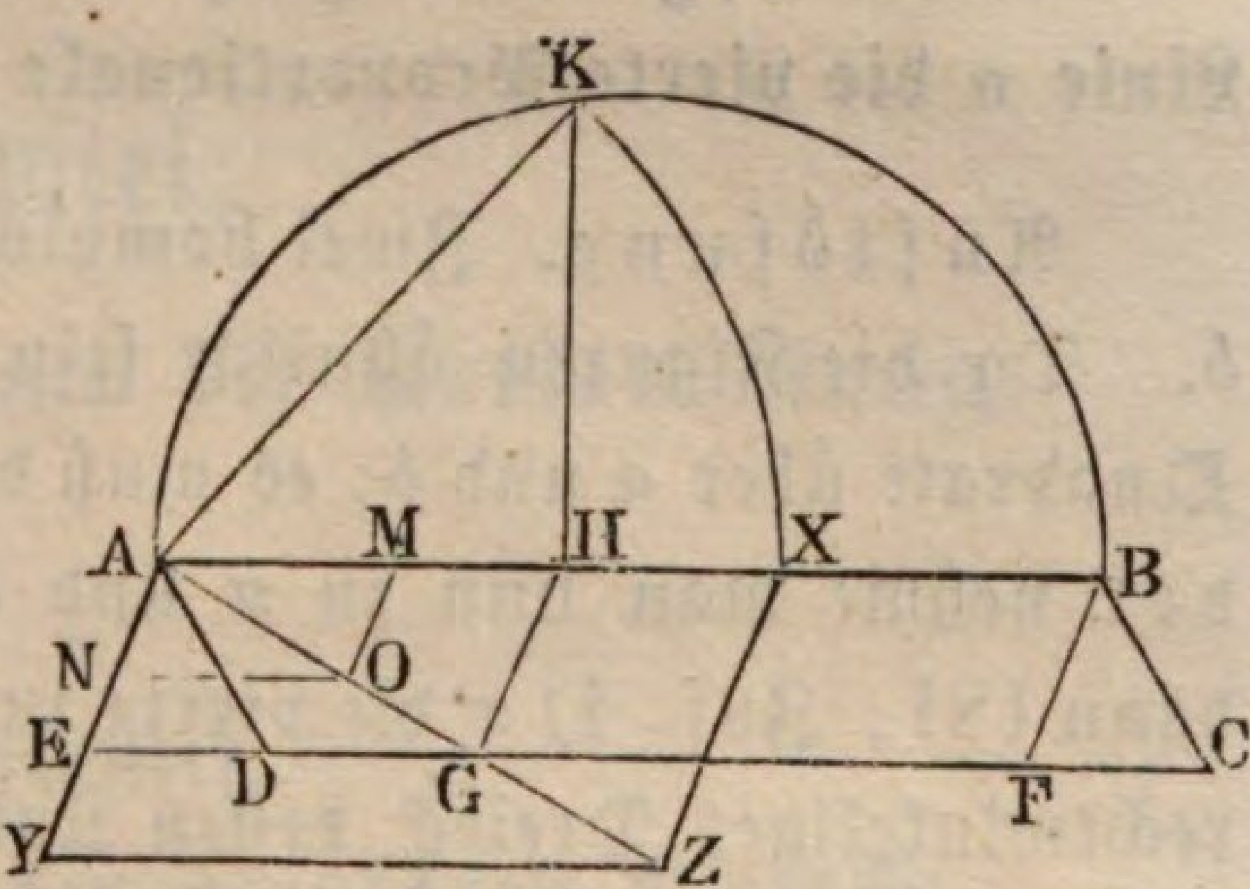
Auflösung. Die Seite des gegebenen Quadrats sei a, die des gesuchten x; es soll sich also $x^2 : a^2 = m : n$ oder $n : m = a^2 : x^2$ ver-

halten. Um das Verhältniß $n : m$ in ein quadratisches zu verwandeln, erwäge man, daß $n : m = nm : m^2$ und daß also, wenn man zu m und n die mittlere Proportionale p sucht, $n : m = p^2 : m^2$. Hieraus folgt nun $p^2 : m^2 = a^2 : x^2$ und $p : m = a : x$. Die hieraus folgende Construction wird als leicht dem Leser überlassen.

Eine andere Auflösung besteht darin, daß man ein rechtwinkeliges Dreieck construirt, worin die Projectionen der Katheten auf der Hypotenuse $= m$ und n sind. Sind diese Katheten selbst k, l, so verhält sich (84) $l^2 : k^2 = n : m = a^2 : x^2$, daher $l : k = a : x$, d. h. x ist die vierte Proportionale zu l, k, a.

90. Aufgabe. Ein Parallelogramm zu construiren, welches einem gegebenen gleich und einem anderen gegebenen ähnlich ist.

Fig. 187.



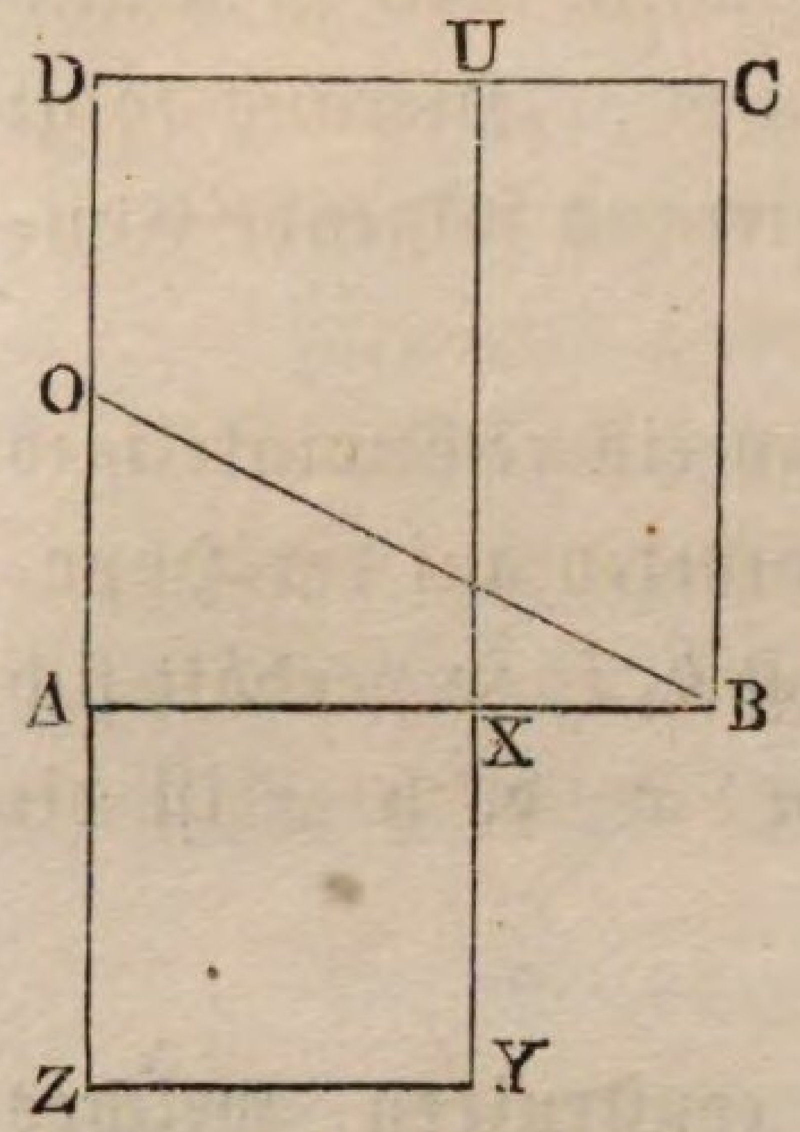
Auflösung. Angenommen, $AXZY$ sei ein Parallelogramm gleich dem gegebenen Parallelogramme $ABCD$ und ähnlich dem Parallelogramme $AMON$. Dieser Aehnlichkeit wegen müssen die Diagonalen AO, AZ in einander liegen. AZ begegne der CD in G, CD der AY in E; zieht man noch $GH \parallel AY$, so ist $AE : AH = AY : AX$, daher auch $AE \times AB : AH \times AB = AY \times AX : \overline{AX}^2$. Nun soll aber $AXZY = ABCD = ABFE$ sein, also ist (78) $AY : AE = AB : AX$ und $AE \times AB = AY \times AX$; folglich muß $AX^2 = AH \times AB$ oder $AH : AX = AX : AB$, d. h. AX muß die mittlere Proportionale zu AB und AH sein. Hieraus ergiebt sich die in der Figur durchgeführte Construction. Vgl. Aufg. 65.

91. Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie so zu theilen, daß das Quadrat über einem der Abschnitte dem Rechtecke aus der ganzen Linie und dem anderen Abschnitte gleich werde.

Vgl. 68, wo diese Aufgabe unter der Benennung des goldenen Schnittes mittelst Proportionen gelöst ist.

Auflösung. AB sei die zu theilende Linie, AX ihr größerer, XB ihr kleinerer Abschnitt. Errichtet man über AX und AB nach verschiedener Seite hin die Quadrate $AXYZ$, $ABCD$, und verlängert XY über X

Fig. 188.



hinaus bis an CD, so muß, der Aufgabe gemäß, das Quadrat AY dem Rechtecke XC, daher auch das Rechteck DY dem Quadrate AC gleich sein. Halbirt man AD in O, so ist $ZD = ZO + OA$, $ZY = ZA = ZO - OA$, daher (IV. 7) Rechteck $DY = \overline{ZO}^2 - \overline{OA}^2$; also muß auch $\overline{AB}^2 = \overline{ZO}^2 - \overline{OA}^2$ sein.

Hieraus folgt aber $\overline{AB}^2 + \overline{OA}^2 = \overline{OZ}^2$ und, zieht man OB, $\overline{OB}^2 = \overline{OZ}^2$, $OZ = OB$. Da OB gegeben ist, so ist es auch OZ, damit AZ und $AX = AZ$. Die hieraus sich ergebende Construction stimmt im Wesentlichen ganz mit der in 68 schon gefundenen überein.

92. Aufgabe. Zu zwei ähnlichen Figuren und einer gegebenen Linie n die vierte Proportionale x zu finden.

Auflösung. Zwei homologe Seiten beider Figuren seien a und b. Da die Figuren ähnlich sein sollen, so verhalten sie sich wie die Quadrate über a und b; es muß daher $a^2 : b^2 = n : x$ sein. Entweder nehme man nun zu a und b die dritte Proportionale c, es wird dann (81, Zus. 4) x die vierte zu a, c, n, oder, man construire ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten a und b sind. Die Projectionen derselben auf die Hypotenuse seien d, e; dann ist $a^2 : b^2 = d : e = n : x$ d. h. x ist die vierte Proportionale zu d, e, n.

93. Aufgabe. Zwei ähnliche Figuren seien gegeben. Eine dritte ihnen gleichfalls ähnliche zu construiren, welche Summe oder Differenz der ersteren ist.

Auflösung. Zwei homologe Seiten der gegebenen Figuren seien a, b, die damit homologe der gesuchten Figur x. Es kommt nun darauf an, diese x zu finden, weil dann nach (76) die Figur auf x construirt werden kann. Nach Satz 85 muß für den Fall der Summe $x^2 = a_2 + b^2$, und für den Fall der Differenz $x^2 = a^2 - b^2$ sein, wodurch die Aufgabe auf IV. 23 und 24 zurückgeführt wird.

94. Aufgabe. Eine Figur zu construiren, welche einer gegebenen Figur A an Inhalt gleich, und einer anderen gegebenen Figur B ähnlich ist.

Auflösung. Eine Seite der Figur A sei a, die ihr homologe der gesuchten Figur x. Nach Satz 83 und den Bedingungen der Aufgabe muß nun $A : B = a^2 : x^2$ sein. Es kommt also nur darauf an, das Verhältniß $A : B$ auf das zweier Linien oder Quadrate zu bringen. Zu diesem Zwecke verwandle man entweder 1) A in ein Rechteck (IV. 18 und 19), wovon eine Seite $= a$ ist, die andere sei k; hierauf B in ein Rechteck, wovon eine Seite $= k$, die andere sei l; dann folgt aus $A = ak$, $B = kl$ und $A : B = a^2 : x^2$, daß $x^2 = al$, also x mittlere Proportionale zu a und l ist; oder 2) man verwandle beide Figuren A und B in Quadrate. Sind m und n die Seiten dieser Quadrate, so ist x die vierte Proportionale zu m, n und a.

VI. Capitel.

Die regulären Vielecke und die Kreismessung.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Eigenschaften der regulären Vielecke.

1. Erklärungen. I. Ein Vieleck oder Polygon heißt regulär, regelmäßig, wenn alle Seiten desselben unter einander und auch alle seine Winkel einander gleich sind.

Zusatz. Unter den Dreiecken ist das gleichseitige und unter den Vierecken das Quadrat das reguläre.

II. Ein Vieleck überhaupt heißt einem Kreise umschrieben, wenn alle seine Seiten den Umfang berühren, dagegen eingeschrieben, wenn seine Ecken sämmtlich im Umfange liegen.

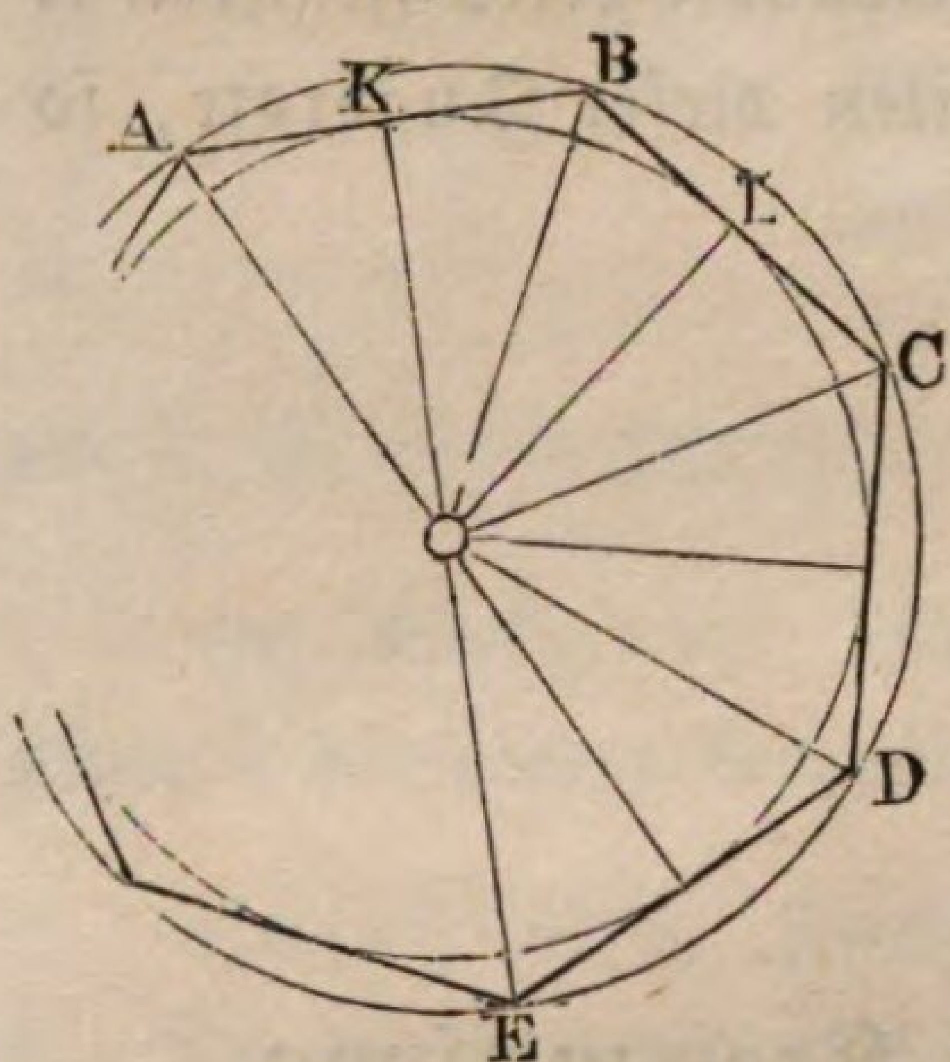
2. Satz. **In einem regulären Polygon von n Seiten ist jeder Winkel am Umfange (der Polygonwinkel) $= \frac{2n-4}{n}$ oder $= 2 - \frac{4}{n}$ Rechte, der Neben- oder Außenwinkel $= \frac{4}{n}$ Rechte.**

Der Beweis ist leicht und beruht auf I. 28. 29.

Zusatz. Der Polygonwinkel beträgt also im regulären Dreieck $\frac{2}{3} R$, im Viereck $1 R$, im Fünfeck $\frac{6}{5} R$, im Sechseck $\frac{4}{3} R$, im Achteck $1\frac{1}{2} R$ u. s. w.

3. Satz. **Jedes reguläre Polygon hat einen Mittelpunkt, der von allen Ecken gleich weit absteht. Auch hat dieser Mittelpunkt von den Seiten gleichen Abstand.**

Fig. 189.



Beweis. $ABCDE\ldots$ sei der Umfang irgend eines regulären Polygons. Halbirt man die beiden Winkel B und C, so wird der Punkt O, in welchem die Halbirungslinien zusammentreffen, der Mittelpunkt des Vielecks sein. Denn verbindet man diesen Punkt noch mit den übrigen Ecken, so ist erstlich gleich zu erkennen, daß $\triangle\ ABO \cong CBO$, mithin $AO = OC$; ferner, da $\sphericalangle\ OBC = OCB$ (beide sind nämlich die Hälfte des Polygonwinkels), daß $OB = OC$, weiter, daß $\triangle\ BCO \cong DCO$, daher $BO = DO$. Was die folgenden Dreiecke ODC, ODE betrifft, so sind auch sie congruent, denn da $\sphericalangle\ ODC = OBC = \frac{1}{2}\ ABC = \frac{1}{2} CDE$, so ist $\sphericalangle\ ODC = ODE$, außerdem $CD = DE$, woraus folgt, daß $OE = OC = OD$ u. s. w. Der Punkt O ist also von allen Ecken des Polygons gleich weit entfernt. Er ist es aber auch von den Seiten, denn fällt man aus O auf zwei derselben, z. B. auf AB, BC die Lothe OK, OL, so erweisen sich die Dreiecke OBK, OBL sofort als congruente, daher $OK = OL$.

1. Zusatz. Der Mittelpunkt O ist, der eben bewiesenen Eigenschaft zufolge, zugleich der Mitttelpunkt zweier Kreise, von welchen der eine durch alle Ecken des Vielecks geht (umschriebener Kreis), der andere alle Seiten desselben, und zwar jede in der Mitte, berührt (eingeschriebener Kreis). Der Radius des letzteren oder der Abstand des Centrums von den Seiten des Polygons wird auch wohl die Apotheme dieses Polygons genannt.

2. Zusatz. Die vom Centrum des Polygons nach den Ecken gehenden Linien OA, OB, ... bilden nicht allein n gleiche Centriwinkel, deren jeder $\frac{1}{n}$ beträgt, sondern theilen auch das Polygon in n congruente

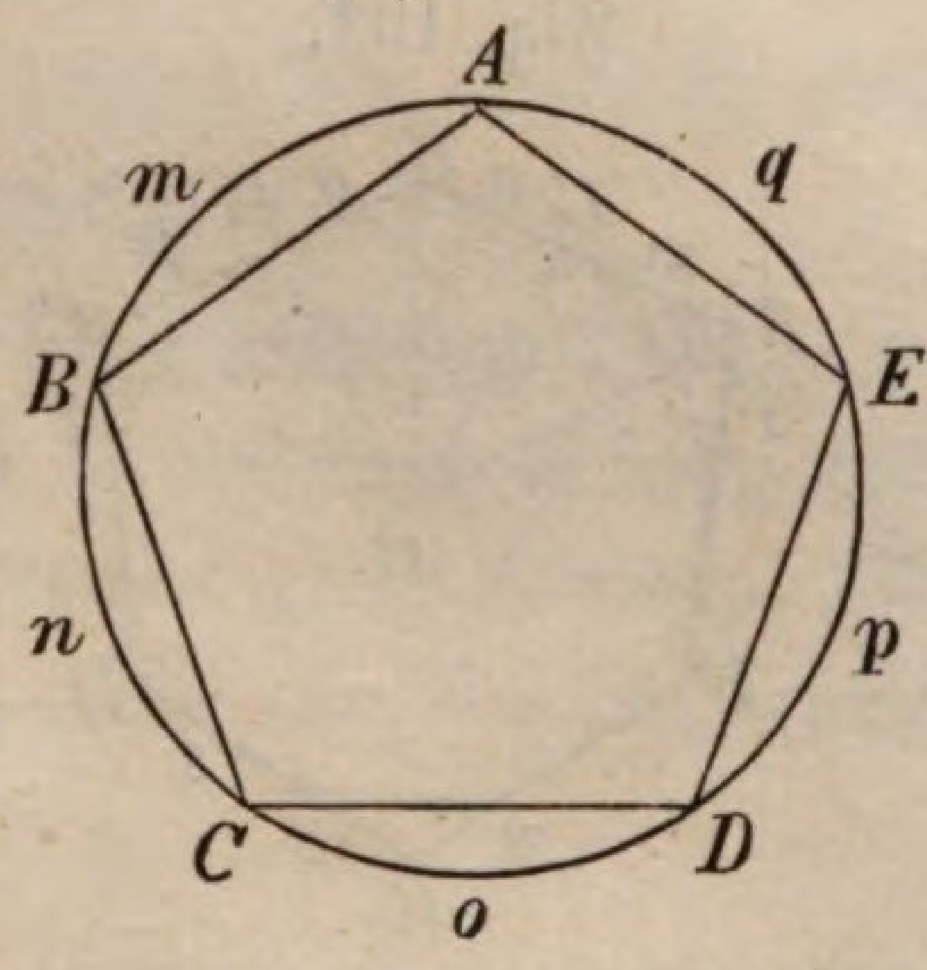
gleichschenkelige Dreiecke. Fällt man auch die Perpendikel aus dem Mittelpunkte auf die Seiten, so wird das ganze Polygon in $2n$ congruente rechtwinkelige Dreiecke getheilt.

4. Satz. **Jedes einem Kreise ein- oder umgeschriebene Vieleck, dessen Seiten oder dessen Winkel gleich sind, ist ein reguläres, wofern das umschriebene gleichseitige und das eingeschriebene gleichwinkelige eine ungerade Zahl von Ecken hat.**

a) Hat das eingeschriebene Vieleck gleiche Seiten, so gehören diesen als Sehnen gleiche Bogen an, woraus nach III. 20 die Gleichheit der Winkel folgt. Derselbe Schluß gilt auch umgekehrt.

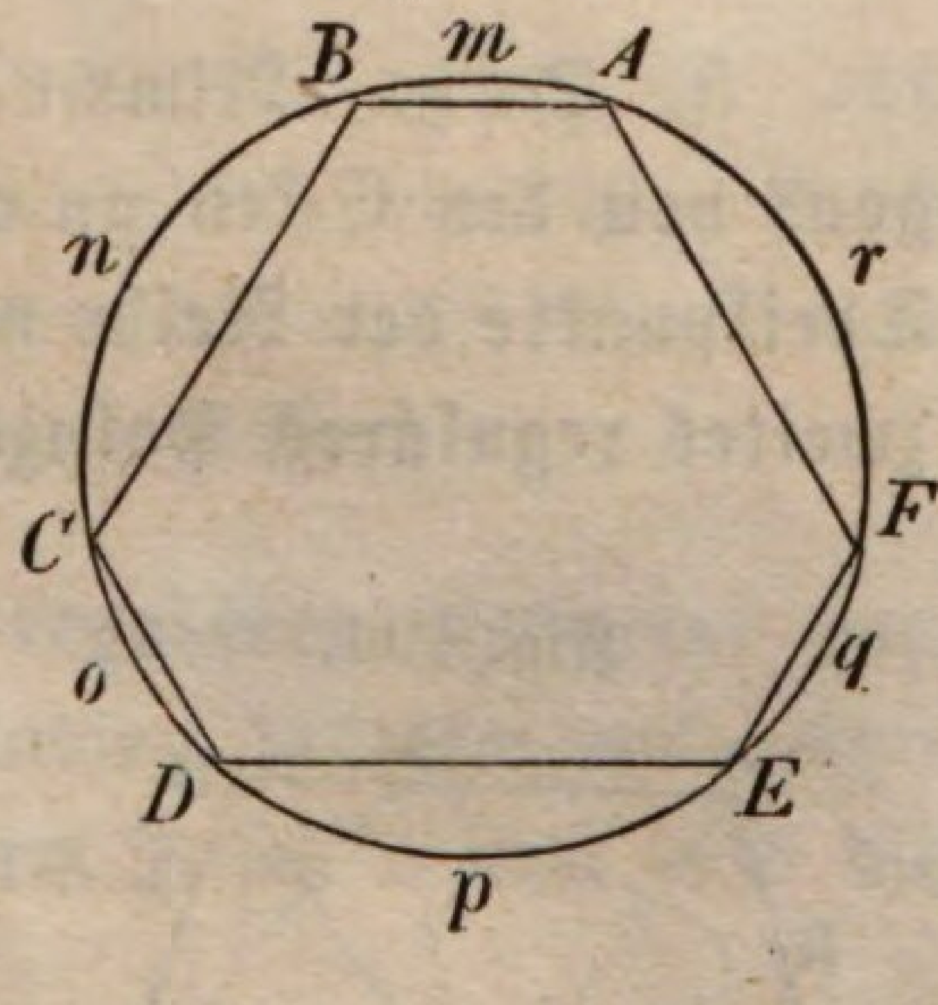
b) Hat das eingeschriebene Vieleck gleiche Winkel und dabei eine ungerade Anzahl von Ecken, z. B. das Fünfeck $ABCDE$, so folgt aus der Gleichheit der Winkel und III. 20, wenn man die den Seiten entsprechenden Bogen durch m, n, o, p, q bezeichnet, daß $m + q = q + p = p + o = o + n = n + m$, woraus folgt: $m = n = o = p = q$, daher auch $AB = BC = CD = DE = EA$.

Fig. 190.



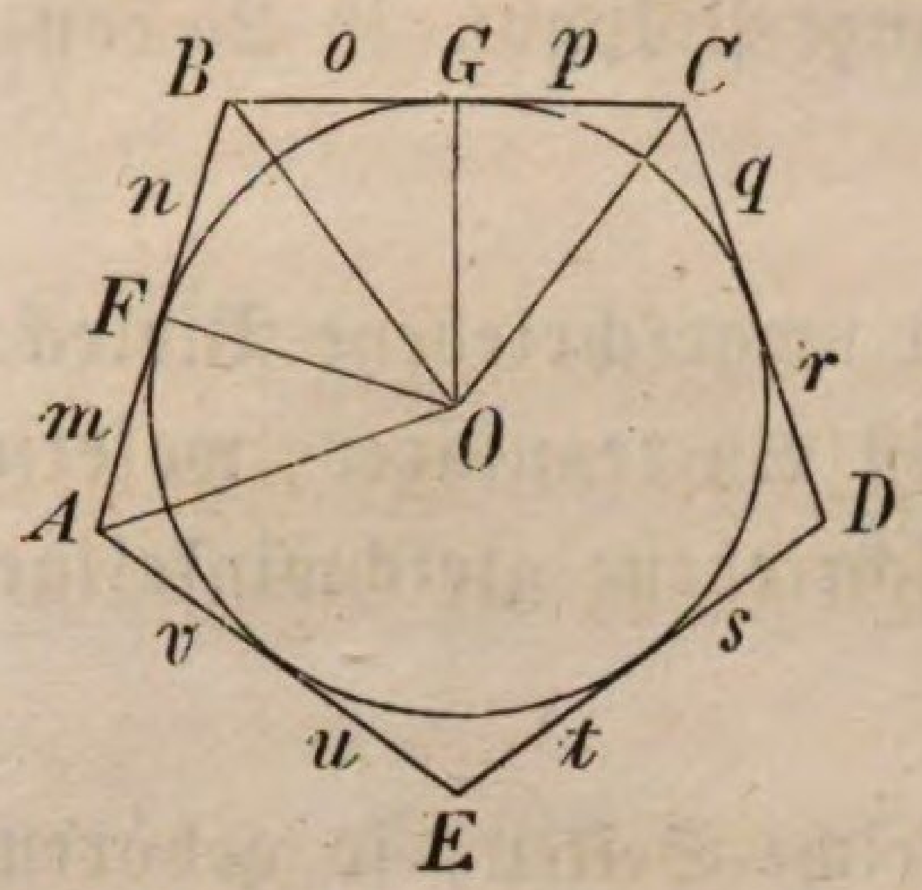
Hat aber das Vieleck bei gleichen Winkeln eine gerade Anzahl von Ecken, wie das Sechseck $ABCDEF$, so hat es nur abwechselnd gleiche Seiten und ist nicht nothwendig regulär. Ist nämlich $\measuredangle A = B = C = D = E = F$ und bezeichnen wieder m, n, o, p, q, r die Bogen, so ist $m + n = n + o = o + p = p + q = q + r = r + m$. Daraus folgt aber nur $m = o = q$ und $n = p = r$.

Fig. 191.



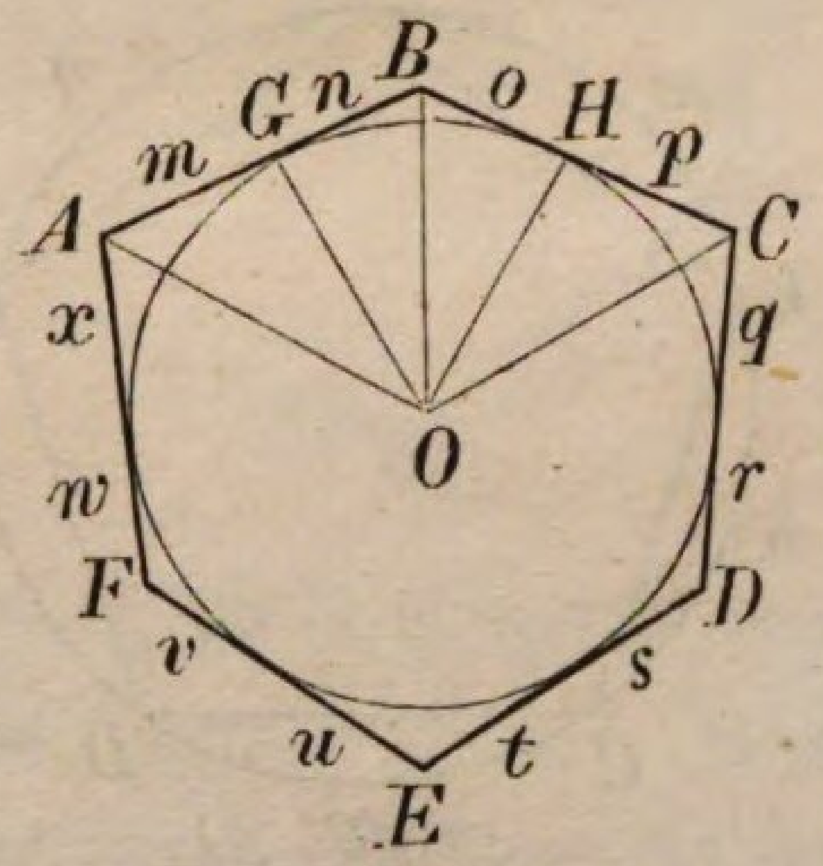
c) Hat das umgeschriebene Vieleck gleiche Winkel, so sind auch die Hälften derselben, in welche sie nach II. 11, Zus. 4, von den aus dem Centrum des Kreises nach den Ecken gezogenen Linien getheilt werden, alle gleich, woraus sofort die Congruenz der gleichschenkeligen Dreiecke sich ergiebt, welche diese Linien mit den Seiten des Polygons bilden.

Fig. 192.



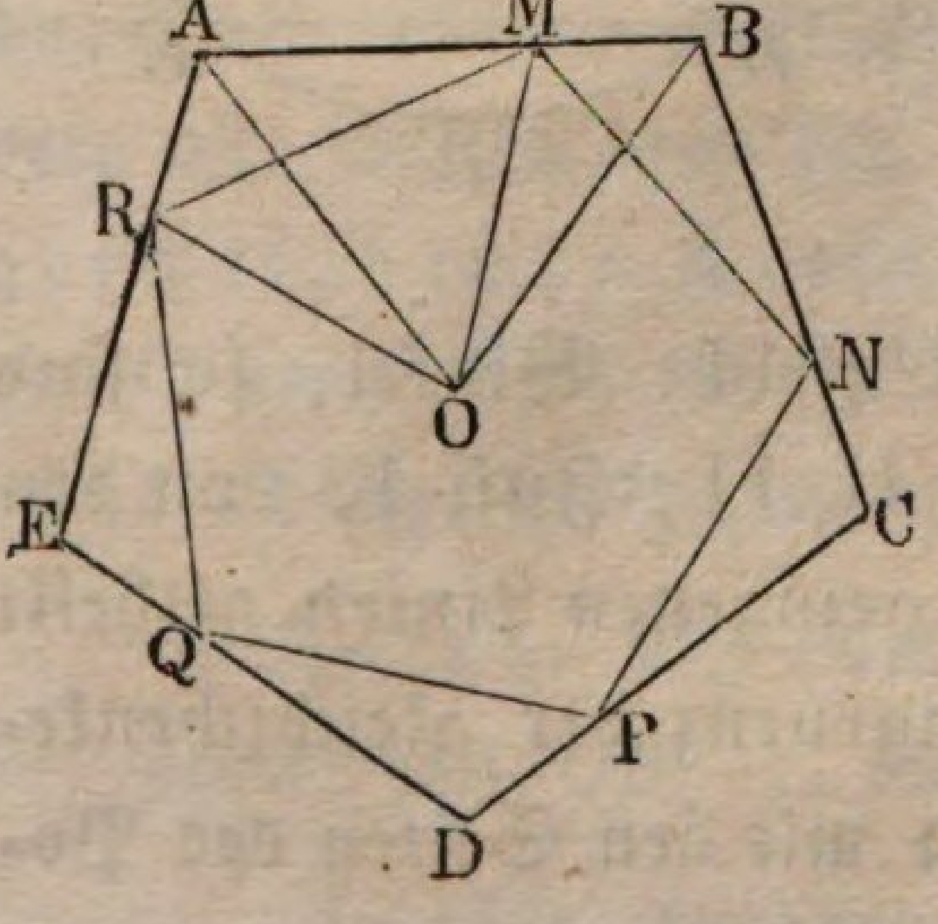
d) Hat das umschriebene Vieleck gleiche Seiten und dabei eine ungerade Zahl von Ecken, wie das Fünfeck $ABCDE$, so folgt aus der Gleichheit der Seiten, wenn man die Stücke, in welche dieselben durch die Berührungspunkte getheilt werden, m, n, o .. v nennt, daß $m + n = o + p = q + r = s + t = u + v$. Nach III. 17 ist aber $n = o, p = q, r = s, t = u, v = m$. Daraus folgt $m = n = o = p = q = r = s = t = u = v$; hieraus die Congruenz der rechtwinkeligen Dreiecke AOF, FOB, BOG u. s. w., hiermit die Gleichheit der Winkel des Polygons. Hat dagegen das Vieleck eine gerade Zahl von Seiten, wie nebenstehendes Sechseck, so ist zwar wieder $m + n = o + p = q + r = s + t = u + v = w + x$ und $n = o, p = q, r = s, t = u, v = w, x = m$. Daraus folgt aber nur $m = p = q = t = u = x, n = o = r = s = v = w$, hieraus die Congruenz der Dreiecke AOG, HOC u. s. w., sowie der Dreiecke OGB, OBH u. s. w. folglich die Gleichheit der Winkel $A = C = E$ und der abwechselnd damit liegenden $B = D = F$.

Fig. 193.



5. **Satz. Nimmt man auf den Seiten eines regulären Polygons von den Ecken an abwechselnd gleiche Stücke und verbindet die Theilpunkte der Reihe nach durch gerade Linien, so bilden diese ein zweites reguläres Polygon, concentrisch mit dem ersten.**

Fig. 194.



Beweis. $AB...E$ sei ein reguläres Polygon und auf dessen Umfang $AM = BN = CP = DQ = ER$ genommen, wodurch auch $MB = NC = PD = QE = RA$ wird. Da $\sphericalangle A = B = C = D = E$, so sind die Dreiecke ARM, BMN, CNP, DPQ, EQR sämmtlich congruent, mithin nicht allein $RM = MN = NP = PQ = QR$, sondern auch $\sphericalangle BMN = CNP = DPQ$ .... und $\sphericalangle AMR = BNM = CPN = ...$ Aus der Gleichheit dieser Winkel folgt aber die der Winkel RMN, MNP, NPQ .... Das Poly-

gon *MNPQR* ist daher ein reguläres. Daß es mit dem gegebenen concentrisch ist, ergiebt sich alsbald aus der Congruenz der Dreiecke *ORA*, *OBM*, *OCN*, *ODP*, ..., die entstehen, wenn man den Mittelpunkt *O* des gegebenen Polygons mit den Ecken *R*, *M*, *N*, *P*, ... des zweiten verbindet.

6. **Satz. Jedes reguläre Polygon ist so groß wie ein Rechteck, wovon eine Seite dem halben Umfange des Polygons, die andere der Apotheme gleich kommt.**

Beweis. Das Polygon habe *n* Ecken. Verbindet man diese mit dem Centrum desselben, so entstehen *n* congruente gleichschenkelige Dreiecke, deren Summe das Polygon ist. Jedes dieser Dreiecke hat eine Seite des Polygons zur Grundlinie, die Apotheme zur Höhe, ist also dem Rechtecke aus der halben Seite und der Apotheme gleich. Das Polygon ist das *n*fache dieses Rechtecks, und als solches dem Rechtecke aus dem halben Polygon-Umfange und der Apotheme gleich.

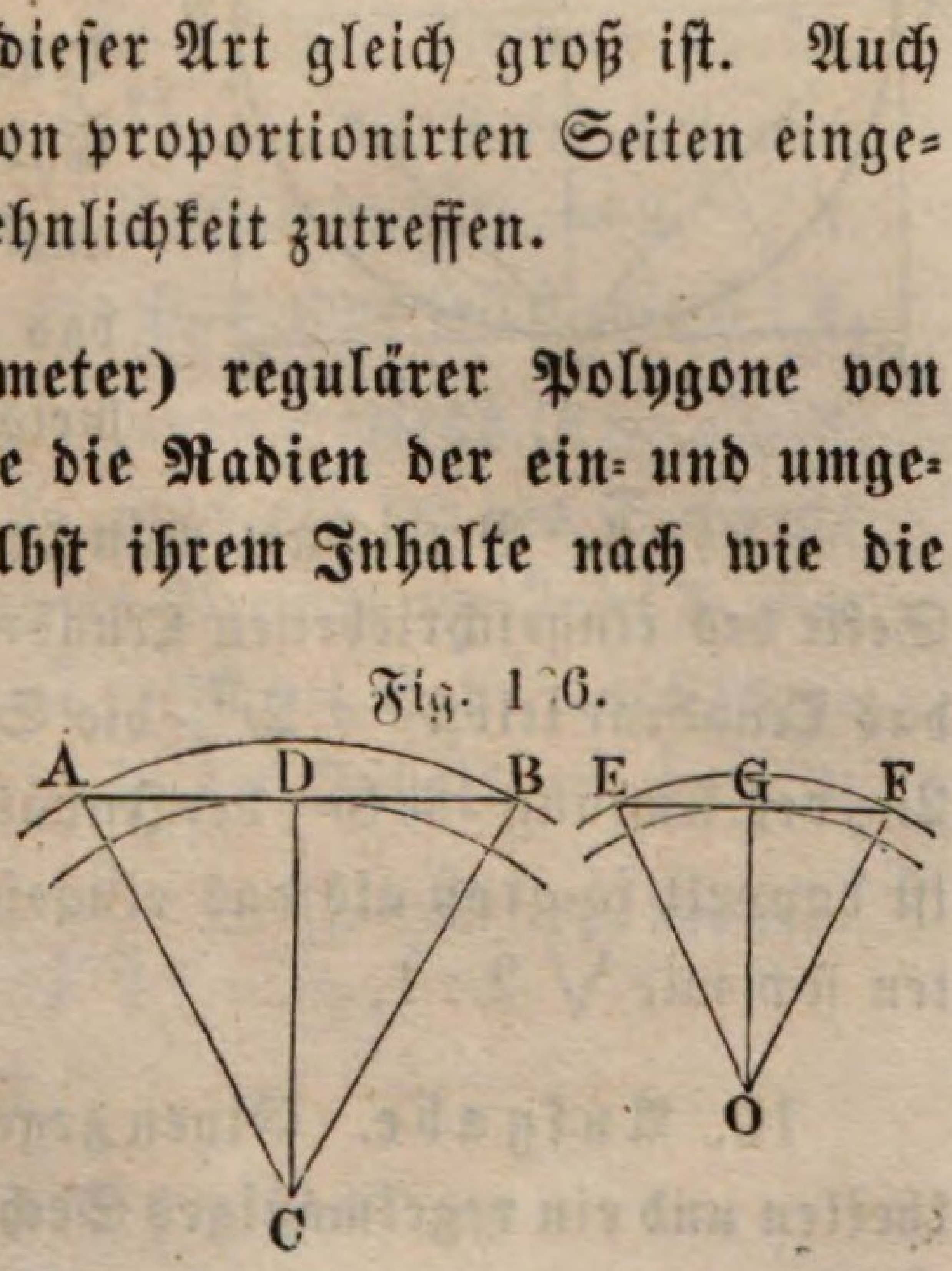
Zusatz. Statt des genannten Rechtecks hätte man sagen können: Das Polygon ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie so lang wie der ganze Umfang ist und dessen Höhe der Apotheme gleich kommt. Ist *a* die Apotheme, *b* die Seite eines regulären *n*-Ecks, so ist sein Inhalt $= \frac{1}{2}nba$.

7. **Satz. Reguläre Polygone von derselben Seitenzahl sind ähnliche Figuren.**

Denn daraus, daß die Seitenzahl dieselbe ist, folgt (nach 2), daß der Polygonwinkel in zwei Vielecken dieser Art gleich groß ist. Auch sind in ihnen je zwei gleiche Winkel von proportionirten Seiten eingeschlossen, so daß alle Merkmale der Aehnlichkeit zutreffen.

8. **Satz. Die Umfänge (Perimeter) regulärer Polygone von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Radien der ein- und umgeschriebenen Kreise; die Polygone selbst ihrem Inhalte nach wie die Quadrate dieser Radien.**

Fig. 176.



Beweis. *AB*, *EF* seien Seiten zweier regulären Polygone beide von *n* Seiten, *D* und *G* die Mitten dieser Seiten, *C* und *O* die Mittelpunkte der Polygone selbst. Zieht man *CA*, *CD*, *OE* rc., so sind *AC*, *EO* die Ra-

dien der umschriebenen, *CD*, *OG* die der eingeschriebenen Kreise. Aus der Gleichheit der Winkel der Dreiecke *ACB*, *EOF*, so wie der Dreiecke *ACD*, *EOG* ergiebt sich deren Aehnlichkeit, daher $AB : EF = AC : EO = CD : OG$. Die Umfänge der Polygone sind aber das *n*fache einer ihrer Seiten, daher auch die Umfänge sich wie $AC : EO$ und wie $CD : OG$ verhalten.

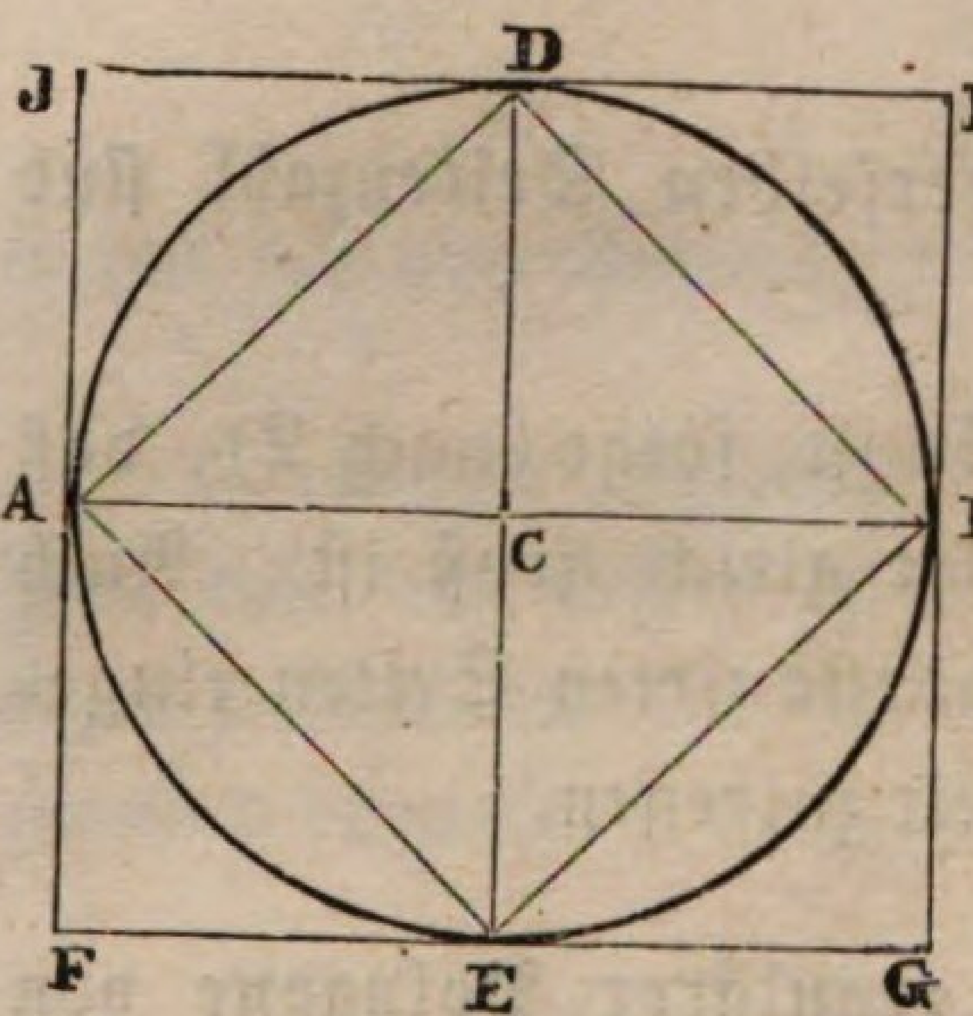
Ferner ist nach V. 82 $\triangle ABC : \triangle EFO = \overline{AC}^2 : \overline{EO}^2 = \overline{CD}^2 : \overline{OG}^2$, mithin verhalten sich auch die Polygone selbst, da sie die *n*fachen der genannten Dreiecke sind, wie diese Quadrate.

Zweiter Abschnitt.

Theilung des Kreisumfanges und Construction der regulären Vielecke.

9. Aufgabe. Einen gegebenen Kreis in vier gleiche Theile zu theilen; hierauf demselben ein Quadrat sowohl ein- als umzuschreiben.

Fig. 197.

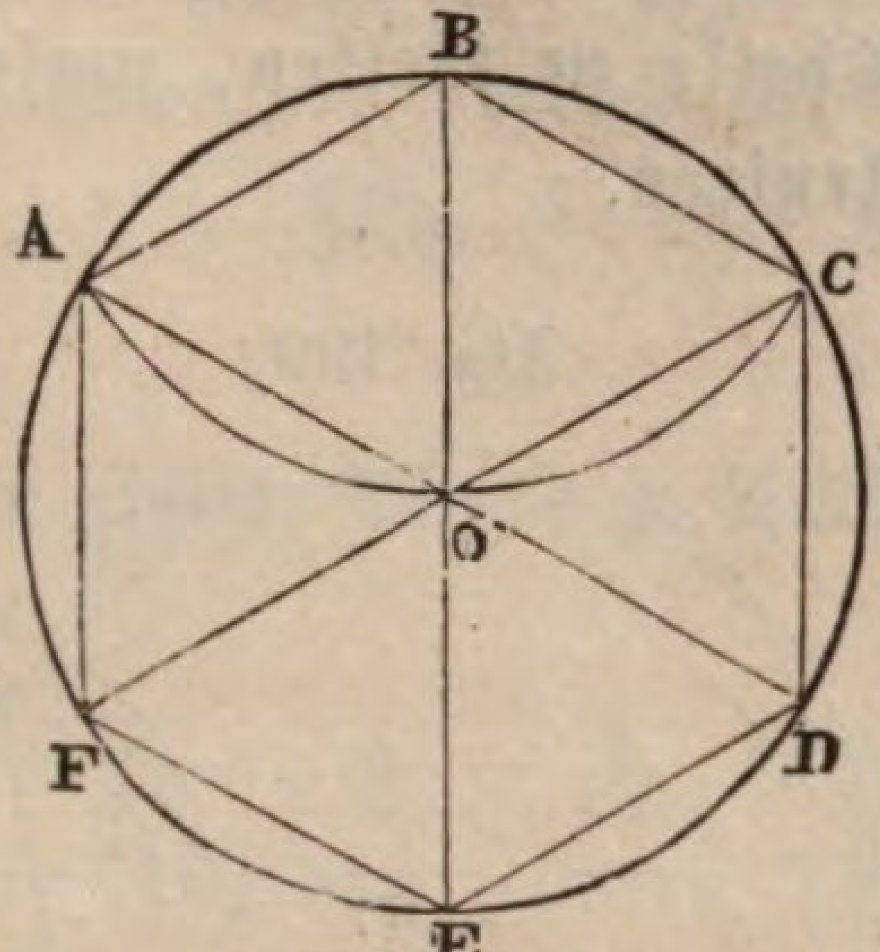


Auflösung. Man ziehe zwei auf einander senkrechte Durchmesser *AB*, *DE*. Sie theilen, wie sogleich einzusehen ist, den Kreis sowohl als seinen Umfang in vier gleiche Theile. Verbindet man ihre Endpunkte, so entsteht das eingeschriebene Quadrat *ADBE*, und zieht man durch die Endpunkte eines jeden Durchmessers Parallellinien mit dem anderen, so entsteht das umschriebene Quadrat *FGHJ*. — Beweis leicht.

Zusatz. Bezeichnet man den Radius des Kreises mit *r*, so ist die Seite des eingeschriebenen Quadrats $= r\sqrt{2}$, der Umfang $= 4r\sqrt{2}$, das Quadrat selbst $= 2r^2$, die Seite des umschriebenen Quadrates $= 2r$, der Umfang $= 8r$, der Inhalt $= 4r^2$. Das umschriebene Quadrat ist doppelt so groß als das eingeschriebene, die Umfänge beider verhalten sich wie $\sqrt{2} : 1$.

10. Aufgabe. Einen gegebenen Kreis in sechs gleiche Theile zu theilen und ein regelmäßiges Sechseck demselben ein- oder umzuschreiben.

Fig. 198.



Auflösung. Bogen AB sei der sechste Theil des Kreisumfanges, O der Mittelpunkt des Kreises. Zieht man nun AB, AO und BO, so ist $\sphericalangle AOB = \frac{2}{3}R$. Leicht läßt sich hieraus nachweisen, daß das $\triangle AOB$ gleichseitig ist. Hieraus ergiebt sich gleich folgende Construction der Aufgabe. Um einen beliebigen Punkt B im Umfange des gegebenen Kreises beschreibe man mit dem Radius des letzteren einen Bogen, der den gegebenen Umfang in A und C schneide. Zieht man nun die Durchmesser AD, BE, CF, so theilen diese den Kreis und seine Peripherie in sechs gleiche Theile. Der Beweis enthält die umgekehrte Schlußfolge der Auflösung oder Analyse.

Verbindet man die gewonnenen Theilpunkte A, B, C 2c. der Reihe nach durch Sehnen, so entsteht ein reguläres, eingeschriebenes Sechseck (Hexagon), und zieht man Tangenten an jenen Punkten, so bilden diese ein umschriebenes reguläres Sechseck. Das erstere entsteht auch durch wiederholtes Eintragen des Radius als Sehne, was für die praktische Construction des Sechsecks noch bequemer ist.

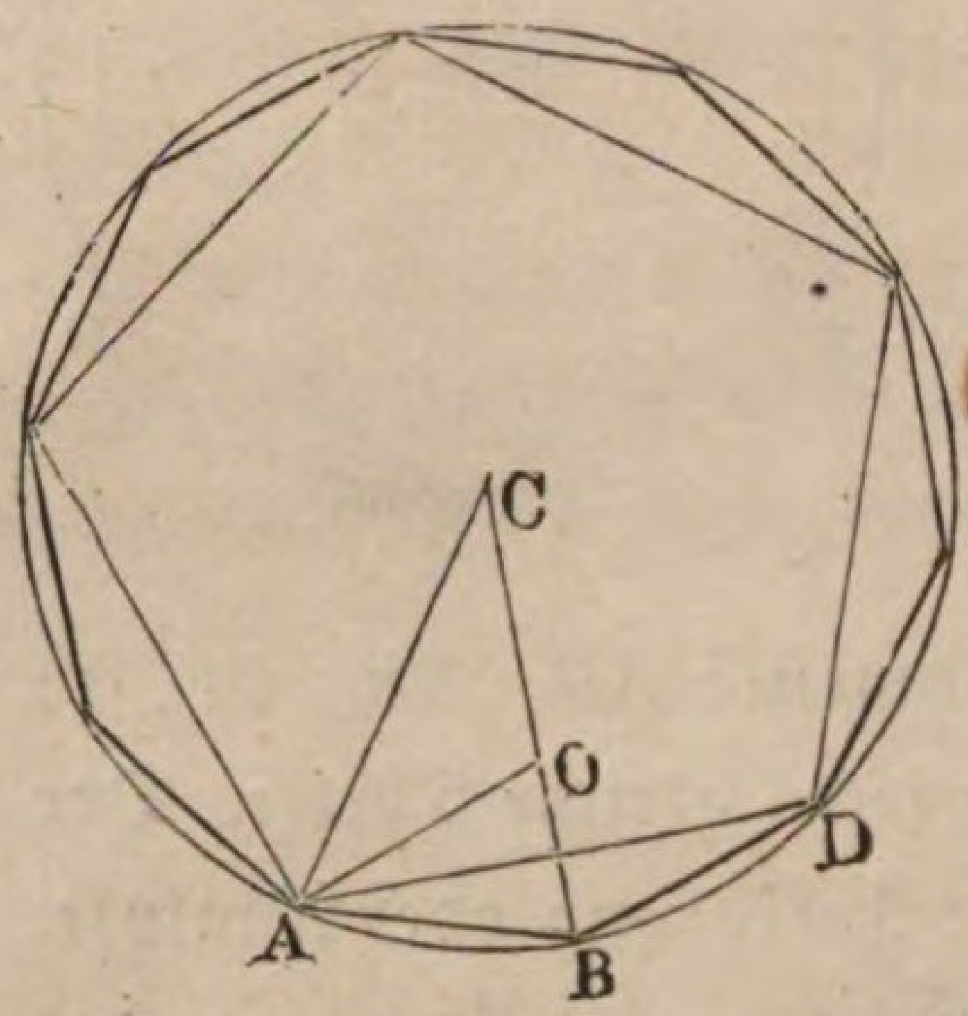
1. Zusatz. Durch die Theilung des Kreises in sechs gleiche Theile ist zugleich die in drei solche Theile geschehen und damit die Construction des ein- und umgeschriebenen regulären Dreiecks abgemacht.

2. Zusatz. Ist der Radius des Kreises $= r$, so ist die Seite des eingeschriebenen regulären Sechsecks auch $= r$, der Umfang $= 6r$, die Apotheme $= \frac{1}{2}r\sqrt{3}$, der Inhalt $= \frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$; die Seite des umschriebenen $= \frac{2}{3}r\sqrt{3}$, der Umfang $= 4r\sqrt{3}$, sein Inhalt $= 2r^2\sqrt{3}$. Die Umfänge verhalten sich wie $\sqrt{3} : 2$, die Polygone selbst wie $3 : 4$.

3. Zusatz. Die Seite eines eingeschriebenen Dreiecks ist $= r\sqrt{3}$, der Umfang $= 3r\sqrt{3}$, der Inhalt halb so groß als der des Sechsecks und $= \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$; die Seite des umschriebenen Dreiecks $= 2r\sqrt{3}$, der Umfang $= 6r\sqrt{3}$, der Inhalt $= 3r^2\sqrt{3}$. Ist die Seite eines regulären, also gleichseitigen Dreiecks $= a$, so ist der Inhalt $= \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, der Radius des umschriebenen Kreises $= \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$; der des eingeschriebenen Kreises $= \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$.

11. Aufgabe. Einen gegebenen Kreis in zehn oder fünf gleiche Theile zu theilen, zugleich das reguläre Fünf- oder Zehneck zu construiren.

Fig. 199.



Auflösung. Bogen AB sei der zehnte Theil des Kreisumfanges; oder Sehne AB Seite eines regulären Zehnecks. Zieht man die Radien CA, CB, so müssen diese einen Winkel $ACB = \frac{4}{10}R = \frac{2}{5}R$ mit einander bilden, und deßhalb muß jeder der beiden Winkel CAB, $CBA = \frac{4}{5}R$, d. i. doppelt so groß als C sein. Halbirt man nun $\sphericalangle CAB$ durch AO, so ist jeder der Winkel CAO, $BAO = \frac{2}{5}R$, weßhalb $AO = CO$. Auch sind die Dreiecke AOB, CAB ähnlich und beide gleichschenkelig, also $CB : AB = AB : BO$, oder, da $AB = AO = CO$, auch $CB : CO = CO : OB$. Der Radius CB findet sich daher im Punkte O stetig oder nach dem goldenen Schnitt getheilt (V, 68), und die Seite AB des Zehnecks ist dem größeren Abschnitte CO gleich. Hiernach ist sowohl die Zehntheilung des Kreises als die Construction der regulären Zehnecke auf den so genannten goldenen Schnitt des Radius zurückgeführt. — Was das Fünfeck anbelangt, so ergiebt sich die Construction desselben sogleich aus der Bemerkung, daß mit der Theilung des Kreisumfanges in zehn gleiche Bogen zugleich die in fünf gleiche geschehen ist.

1. Zusatz. Ist r der Radius des Kreises, so ist (s. V, 69) die Seite des eingeschriebenen Zehnecks $= \frac{1}{2}r\,(\sqrt{5}-1) = 0{,}618034r$, der Umfang $= 5r\,(\sqrt{5}-1)$, die Apotheme $= \frac{1}{4}r\,\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, der Inhalt $= \frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2{,}938926r^2$, die Seite des eingeschriebenen Fünfecks $= \frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 1{,}17557r$ sein Umfang $= \frac{5}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Die Apotheme $= \frac{1}{4}r\,(\sqrt{5}+1)$, der Inhalt $= \frac{5}{8}r^2 \sqrt{10+2\sqrt{5}} = 2{,}37764r^2$. Der Inhalt des einem Kreise eingeschriebenen Zehnecks verhält sich demnach zum Inhalte des demselben Kreise eingeschriebenen Fünfecks wie $(\sqrt{5}-1) : 1$, oder wie $4 : (\sqrt{5}+1.)$

2. Zusatz. Die Seite des dem Kreise mit dem Radius r umschriebenen Zehnecks ist $= \frac{2}{5}r\sqrt{5\,(5-2\sqrt{5})}$, der Inhalt dieses Zehnecks $= 2r^2\sqrt{5\,(5-2\sqrt{5})}$, die Seite des umschriebenen Fünfecks $= 2r\sqrt{5-2\sqrt{5}}$, der Inhalt desselben $= 5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$. Das einem Kreise umschriebene Zehneck verhält sich also zu dem demselben Kreise umschriebenen Fünfecks wie $2 : \sqrt{5}$.

3. Zusatz. Sind einem und demselben Kreise ein reguläres Zehneck und ein reguläres Fünfeck eingeschrieben, so verhält sich die Seite des Zehnecks zu der des Fünfecks wie $\frac{1}{2}\sqrt{2-\frac{2}{5}\sqrt{5}} : 1$ oder wie $1 : \frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

12. Aufgabe. Den Kreis in fünfzehn gleiche Theile zu theilen und ein reguläres Fünfzehneck einzuschreiben.

Auflösung. Da $\frac{1}{15} = \frac{2}{30} = \frac{5}{30} - \frac{3}{30} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$, so hat man nur vom sechsten Theile der Peripherie (10) den zehnten Theil (11) abzuziehen. Der Rest ist der fünfzehnte Theil und seine Sehne die Seite des Fünfzehnecks. Eine zweite und dritte Construction ergiebt sich daraus, daß $\frac{1}{15} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{3}$.

13. Aufgabe. Ein um- oder eingeschriebenes reguläres Vieleck sei gegeben; ein anderes zu construiren von doppelter Seitenzahl.

Auflösung. Ist ein eingeschriebenes gegeben, so hat man nur die Bogen zwischen den Ecken desselben zu halbiren und die Halbirungspunkte mit den Ecken des gegebenen Vielecks durch Sehnen zu verbinden.

Ist ein umschriebenes gegeben, so verbinde man die Ecken desselben mit dem Centrum, wodurch die Bogen zwischen den Berührungspunkten der Seiten halbirt werden, und ziehe an den Halbirungspunkten Tangenten bis zum Umfange des gegebenen Polygons.

Zusatz. Durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl erhält man aus dem ein- und umschriebenen Quadrate (9) die Construction des ein- und umschriebenen 8ecks, 16ecks, 32ecks u. s. w., überhaupt die aller regulären Vielecke, deren Seitenzahl eine Potenz von 2 oder $= 2^n$ ist, eben so aus dem Drei- und Sechseck (10) die Construction des 12ecks, 24ecks u. s. w., überhaupt die aller Polygone von der Seitenzahl $3 \cdot 2^n$; ferner aus dem Fünf- und Zehneck (11) die des 20ecks, 40ecks rc. die der Polygone von $5 \cdot 2^n$ Seiten; endlich aus dem Fünfzehneck (12) die des 30ecks, 60ecks rc. die aller Polygone von $15 \cdot 2^n$ Seiten.

Anm. Lange waren diese regulären Vielecke die einzigen, welche man durch die Elementar-Geometrie, d. h. durch Kreis und gerade Linie, zu construiren wußte, bis im Jahre 1801 Gauß in seinen „Disquisitiones arithmeticae" (VII. 353) zeigte, daß auch ein reguläres Vieleck von siebenzehn Seiten, oder überhaupt von $2^n + 1$ Seiten, sich durch die genannten Mittel construiren lasse, wofern $2^n + 1$ eine Primzahl ist, also auch ein Vieleck von 257 Seiten.

14. Aufgabe. Zu einem eingeschriebenen regulären Vielecke das ihm ähnliche umschriebene zu construiren und umgekehrt.

Ist das eingeschriebene Vieleck gegeben, so ziehe man entweder an den Ecken desselben oder an den Bogenmitten zwischen den Ecken Tangenten an den Kreis bis zu deren Zusammentreffen.

Ist ein umschriebenes gegeben, so verbinde man der Ordnung nach entweder die Berührungspunkte der Seiten oder diejenigen Punkte, worin der Kreisumfang von den aus dem Mittelpunkte nach den Ecken gezogenen geraden Linien getroffen wird.

Der Beweis der Richtigkeit ist leicht und wird der Uebung wegen eigener Auffindung überlassen.

15. Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie als Seite ein reguläres a) Sechseck, b) Achteck, c) Zehneck, d) Fünfeck zu construiren, auch den Abstand R des Centrums von den Ecken, die Apotheme r, und den Inhalt P dieser Polygone durch die Spitze a zu bestimmen.

Anleitung zur Auflösung.

Fig. 200.

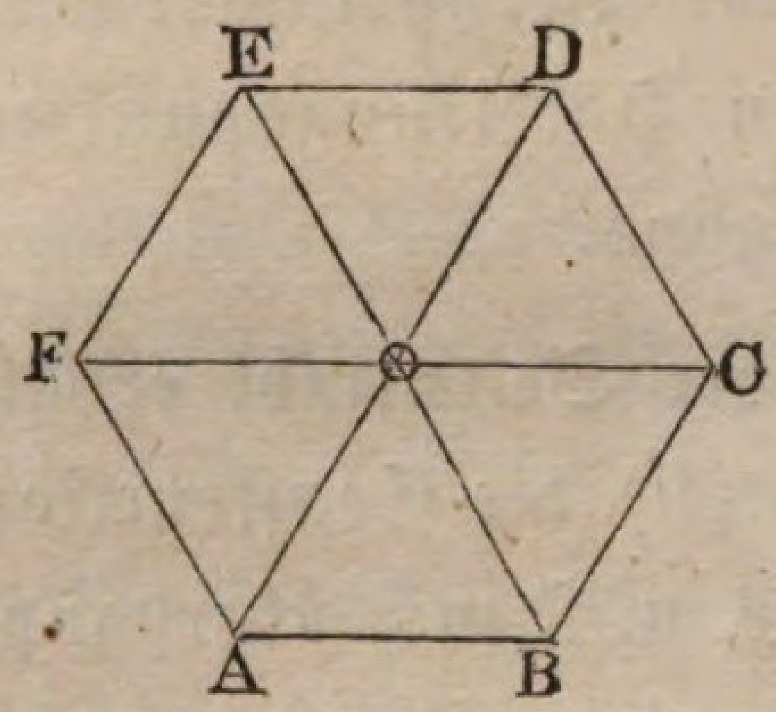
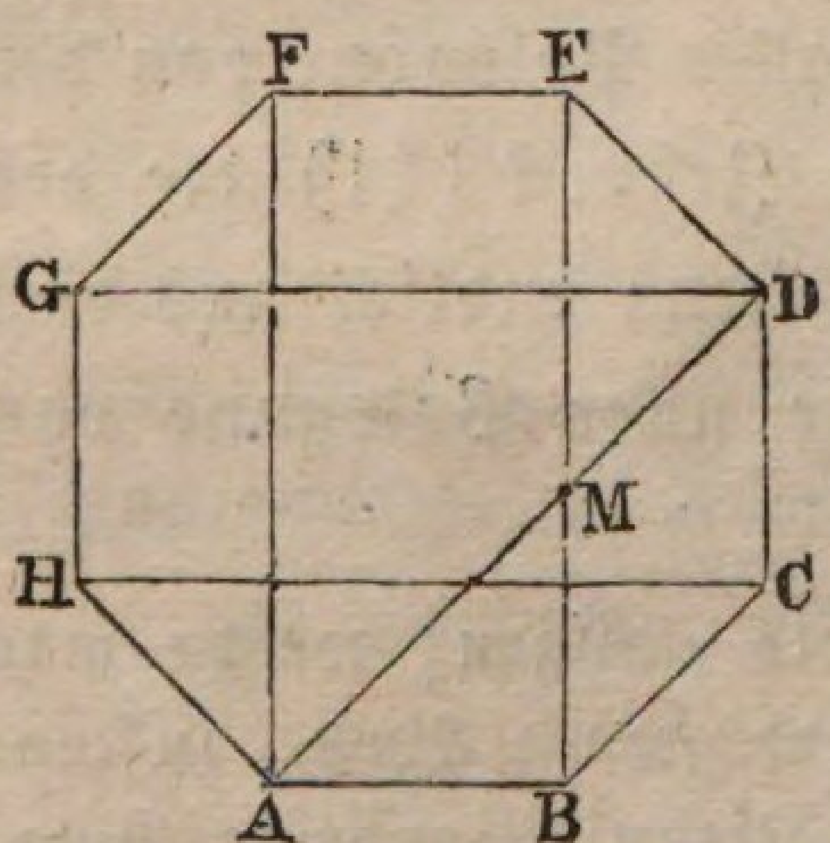


Fig. 201.



a) Durch die Seite AB des Sechsecks $ABCDEF$ ist das gleichseitige Dreieck ABO gegeben, welches diese Seite mit den Radien OA, OB des Vielecks macht, hierdurch zugleich die Lage und Entfernung der übrigen Ecken. Die Construction läßt übrigens mannichfaltige Abänderungen zu.

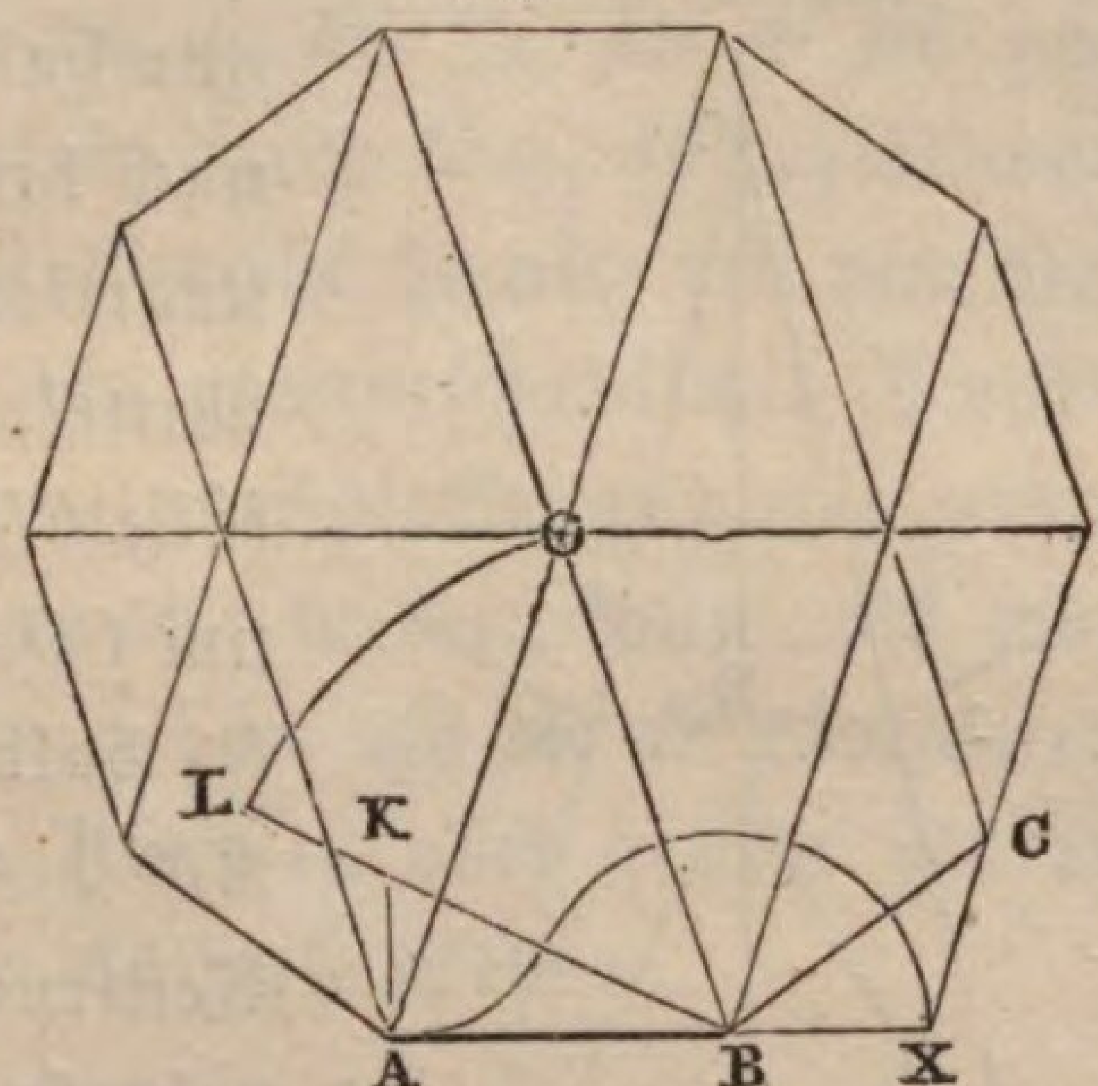
Ist die gegebene Seite des Sechsecks $= a$, so ist auch $R = a$, $r = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, $P = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$.

b) Da die Seiten des regulären Achtecks Winkel von $1\frac{1}{2}$ Rechten mit einander bilden, so ist die Lage der an AB stoßenden Seiten gegen AB oder deren Verlängerung gegeben. Das übrige in mehrfacher Weise ausführbare Detail der Construction ist ohne Schwierigkeit aus der Figur zu erkennen. Darin ist $AD \parallel BC$, $AB = BM = MD$, $ME = AM$.

Ist die Seite des Achtecks $= a$, so ist der Abstand seines Centrums von den Ecken d. i. $R = a\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}$, die Apotheme $r = \frac{1}{2}a\,(1+\sqrt{2})$, der Inhalt $P = 2a^2\,(1+\sqrt{2})$.

c) Da die Seite des regulären Zehnecks dem größeren Abschnitte des nach dem goldenen Schnitt getheilten Radius des umschriebenen Kreises gleich ist, so kommt, um diesen Radius aus der Seite zu finden, die in V. 68, Zus. 1, erwähnte Aufgabe zur Anwendung. Hiernach hat man auf der gegebenen Seite AB eine Senkrechte $AK = \frac{1}{2}AB$ zu errichten, K mit B zu verbinden und entweder BK über K hinaus um $KL = KA$, oder AB über B hinaus um $BX = BK - KA$ zu verlängern. Dann ist sowohl BL als AX dem Radius AO oder BO des dem Zehneck umschriebenen Kreises gleich. Das übrige Detail der Construction erhellt leicht aus der Figur, wo $AODX$ ein Rhombus ist.

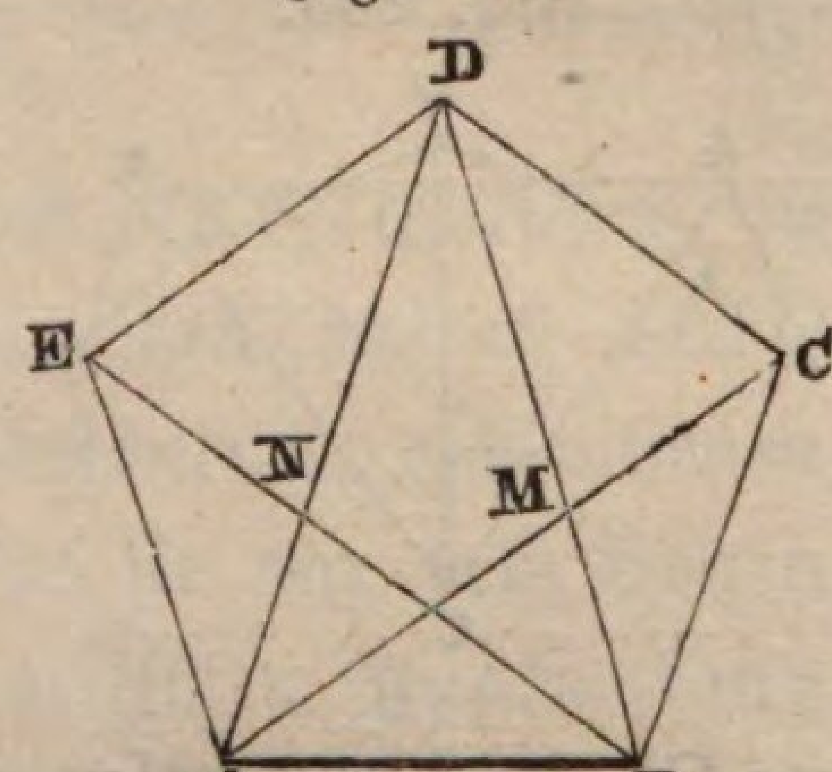
Fig. 202.



Ist die Seite des Zehnecks $= a$, so ist der Radius des umschriebenen Kreises $R = \frac{1}{2}a\,(\sqrt{5} + 1)$, die Apotheme $r = \frac{1}{2}a\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$, der Inhalt $P = \frac{5}{2}a^2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

d) Dieselbe Constructionsweise kann zur Errichtung eines regulären Fünfecks über AB dienen. Nachdem das Dreieck ABD wie vorhin $\triangle ABO$ vollendet, nehme man auf den Seiten desselben $DM = DN = AB$, ziehe AM, BN und nehme auf deren Verlängerungen MC und NE, beide $= BM$ oder AN, verbinde noch E und C mit A, B, D, so ist $ABCDE$ ein reguläres Fünfeck über AB.

Fig. 203.

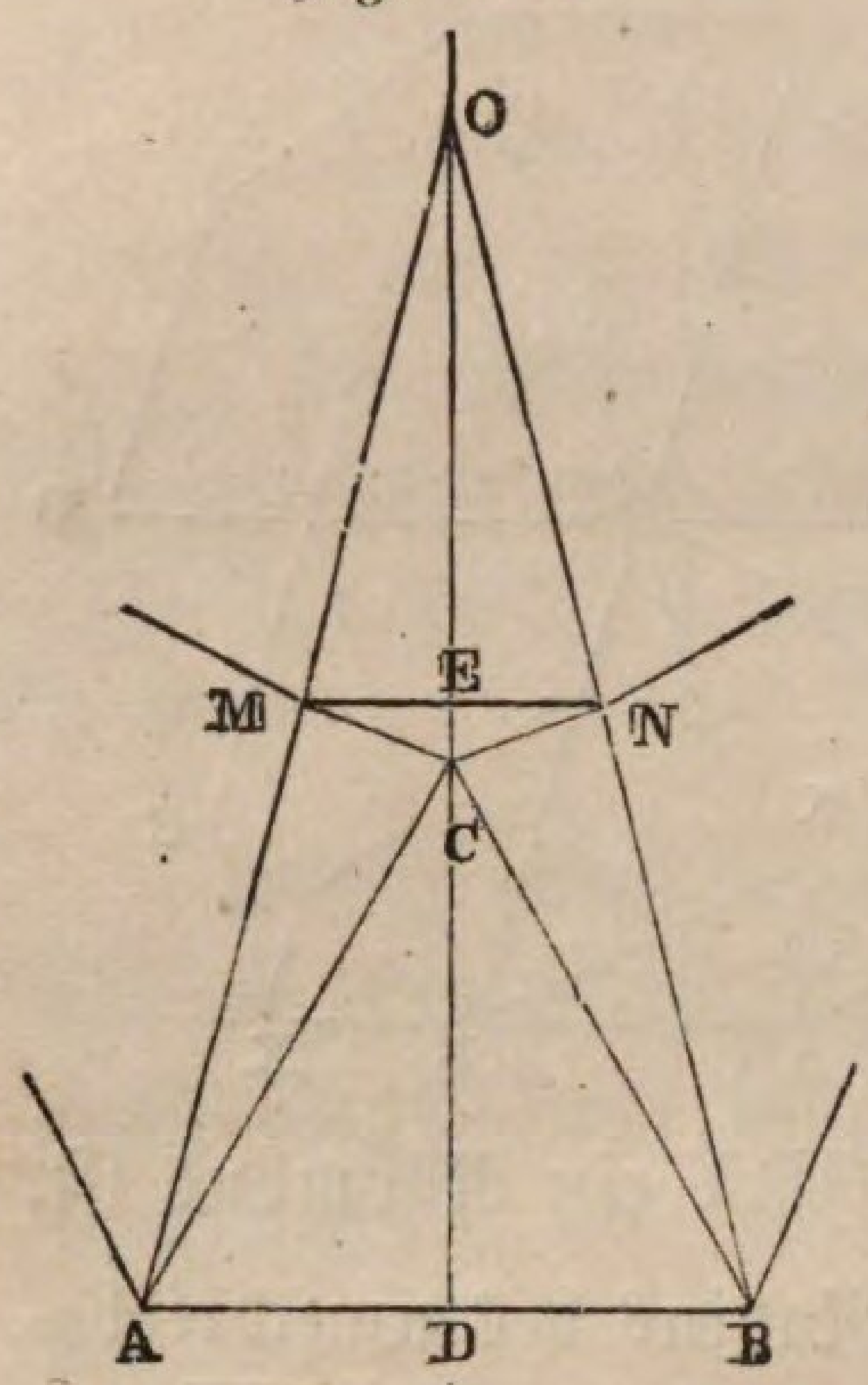


Ist die Seite des regulären Fünfecks $= b$, so ist $R = \frac{1}{2}b\sqrt{2 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$, Apotheme $r = \frac{1}{2}b\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$, der Inhalt $P = \frac{1}{4}b^2\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$. Der jeder Construction zuzufügende Beweis wird dem Leser überlassen. Beim regulären Fünfecke insbesondere ist es als eine Eigenschaft desselben hervorzuheben und zu beweisen, daß je zwei sich durchschneidende Diagonalen desselben sich nach stetiger Proportion oder nach dem goldenen Schnitte theilen. Dabei ist der größere Abschnitt der Seite des Fünfecks gleich. Ist also die Seite des Fünfecks $= b$, so ist die Diagonale $d = \frac{1}{2}b\,(\sqrt{5} + 1)$, umgekehrt ist $b = \frac{1}{2}d\,(\sqrt{5} - 1)$ (V. 69).

16. Aufgabe. Ein reguläres Vieleck sei gegeben; ein anderes zu construiren von doppelter Seitenzahl, aber gleichem Umfange.

Auflösung. Den Bedingungen der Aufgabe gemäß müssen Seiten und Centriwinkel des zweiten Polygons nur halb so groß als beim gegebenen sein. Demnach kann man unter anderen folgende Construction machen. *AB* sei eine Seite, *C* der Mittelpunkt des gegebenen Polygons. Man fälle *CD* ⊥ *AB*, verlängere *DC* über *C* hinaus um $CO = CA = CB$, verbinde *O* mit *A* und *B*, halbire *OD* in *E* und ziehe noch durch *E* die $MN \parallel AB$. Dann ist *MN* eine Seite, *O* das Centrum eines regulären Polygons von doppelt so viel Seiten wie das erste, aber von gleichem Umfange. Denn es ist Centriwinkel $MON = \frac{1}{2}ACB$, Seite $MN = \frac{1}{2}AB$.

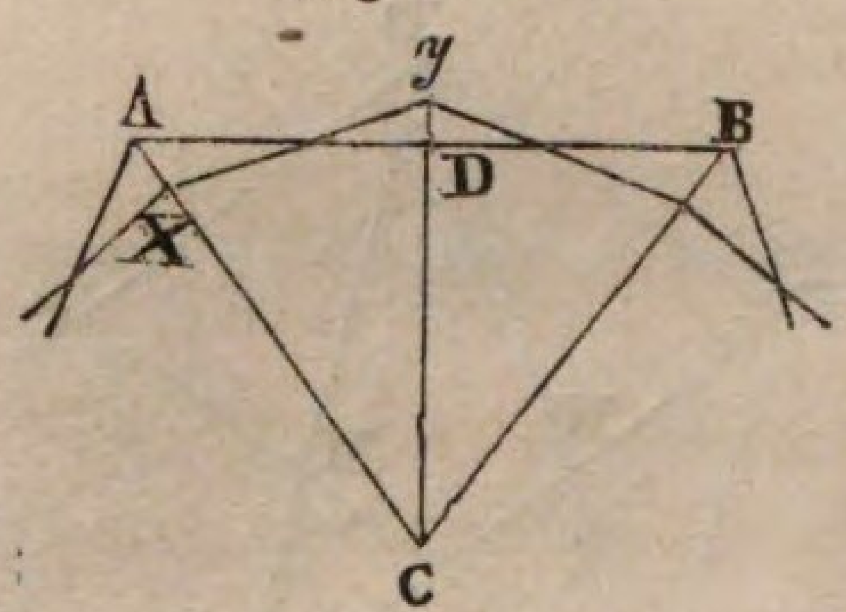
Fig. 204.



17. Aufgabe. Ein reguläres Polygon sei gegeben; ein zweites zu construiren von doppelter Seitenzahl, aber gleichem Inhalte.

Auflösung. *AB* sei eine Seite. *C* der Mittelpunkt des gegebenen regulären Vielecks. Fällt man $CD \perp AB$, so ist △ *DCA* die Hälfte von *ACB*, und es kommt nur noch darauf an, das erstere Dreieck *DCA* mit Beibehaltung des Winkels *DCA* in ein gleichschenkeliges zu verwandeln. Zu dem Ende nehme man $CX = CY =$ der mittleren Proportionale von *CA* und *CD*, und verbinde *X* mit *Y*. *XY* wird eine Seite des gesuchten Vielecks sein, das übrigens mit dem gegebenen das gemeinschaftliche Centrum *C* hat.

Fig. 205.



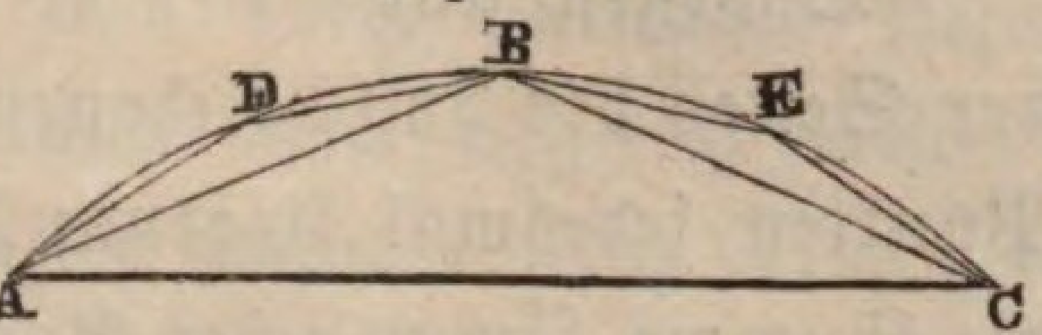
Dritter Abschnitt.

Verhältniß der Kreise und der Kreisumfänge.

18. Lehrsatz. Jeder Kreisbogen ist größer als seine Sehne, kleiner jedoch als die Summe der zwei an seinen Endpunkten bis zu ihrem Zusammentreffen gezogenen Tangenten.

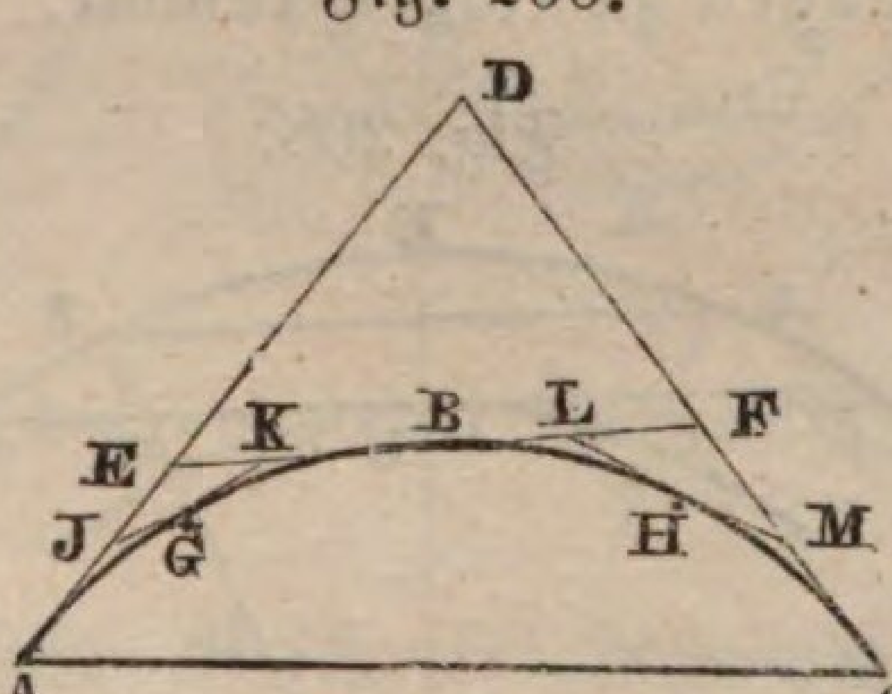
Beweis I. *ABC* sei ein Bogen, dessen Sehne *AC* ist. Zieht man

Fig. 206.



AB, *BC*, so ist $AB + BC > AC$. Nimmt man auf den Bogen zwischen *A* und *B*, *B* und *C* neue Punkte *D*, *E*, zieht *AD*, *DB*, *BE*, *EC*, so ist $AD + DB > AB$, $BE + EC > BC$, daher $AD + DB + BE + EC > AB + BC$ und um so mehr $> AC$. Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man immer größere gebrochene Linien, die stets mehr Punkte mit dem Bogen gemein haben, so daß die Anzahl der gemeinschaftlichen Punkte unbegränzt ist. Es ist deßhalb anzunehmen, daß die Länge dieser gebrochenen Linien der Bogenlänge so nahe gebracht werden kann, als man will, woraus denn folgt, daß der Bogen größer als die an Länge stets wachsende gebrochene Linie sein muß. Diese ist aber größer als die Sehne *AC*, daher auch der Bogen größer als diese Sehne.

Fig. 206.



II. Die zweite Behauptung des Satzes ist, daß der Bogen *ABC* kleiner als die Summe der Tangenten *AD* und *CD* an seinen Endpunkten sei. Zieht man nämlich an dem beliebigen Punkte *B* eine dritte Tangente *EF* bis an die ersten, so ist $EF < ED + DF$, daher auch $AE + EF + FC < AD + DC$. Zieht man weiter durch beliebige Punkte *G*, *H* der Bogen *AB*, *BC* neue Tangenten *JK*, *LM* bis an die vorigen, so ist, wie sich leicht zeigen läßt, die gebrochene Linie $AJKLMC < AEFC < AD + DC$ u. s. w. Die auf solche Weise construirten gebrochenen Linien werden also immer kleiner, je mehr Punkte sie mit dem Bogen gemein haben, und die Anzahl dieser gemeinschaftlichen Punkte kann ohne Ende zunehmen. Es ist deßhalb anzunehmen, daß die Länge der gebrochenen Linien der Bogenlänge so nahe gebracht werden kann als man will, woraus dann gleichzeitig folgt, daß, so wie die umschriebenen gebrochenen Linien, auch der Bogen kleiner sei als die Summe der Tangenten $AD + DC$.

19. Satz. Der Kreisumfang ist größer als der Umfang jedes eingeschriebenen Vielecks, und kleiner als der Umfang jedes umschriebenen.

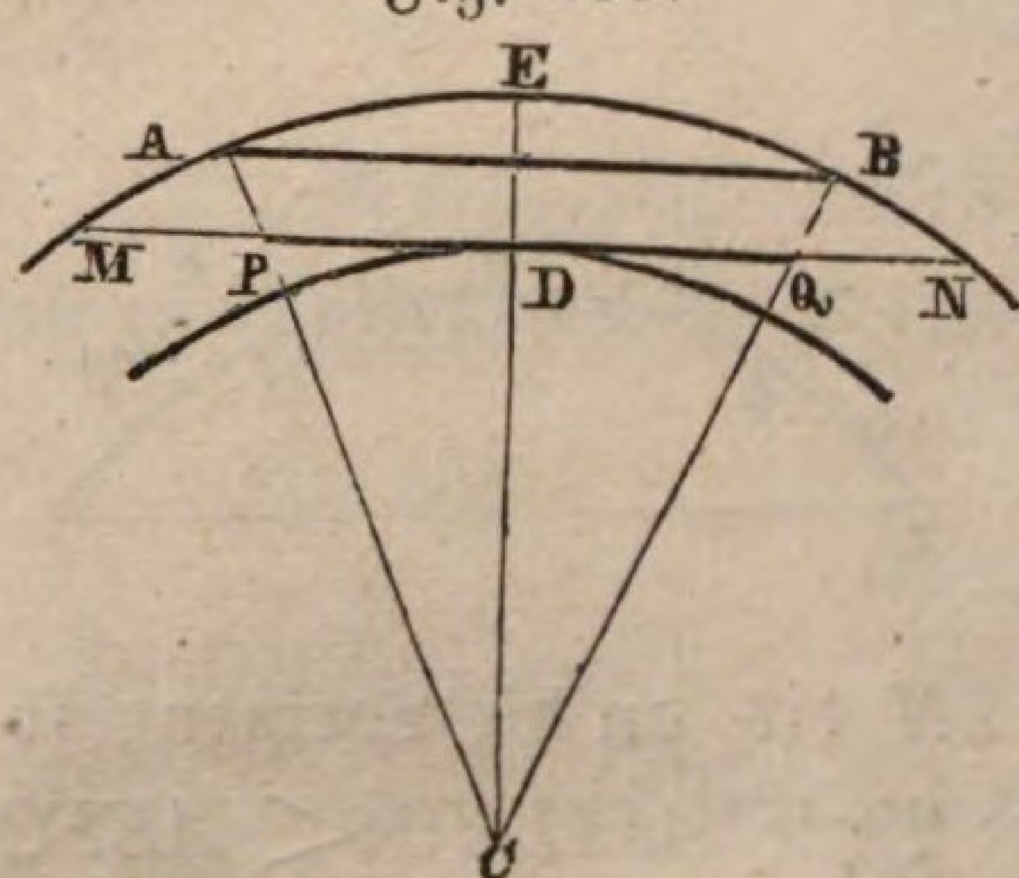
Denn die einzelnen Bogen zwischen den Ecken des eingeschriebenen Vielecks (18) sind größer als ihre Sehnen, d. i. größer als die Seiten des Vielecks, daher auch die Summe aller, oder der Kreisumfang größer als der Polygonumfang.

Dagegen sind (18) die Bogen zwischen den Berührungspunkten der Seiten des umschriebenen Vielecks kleiner als der zwischen denselben Punkten jedesmal liegende Theil des Polygonumfanges, mithin auch die Summe sämmtlicher Bogen, d. i. der Kreisumfang kleiner als der ganze umschriebene Polygonumfang.

Zusatz. Da der Kreisumfang größer als der eines eingeschriebenen Vielecks ist, so ist er um so mehr größer als der eines ähnlichen kleineren Vielecks. Dagegen ist er kleiner als der Umfang jedes einem umschriebenen ähnlichen und größeren Vielecks.

20. Lehrsatz. **Sind zwei concentrische Kreise gegeben, so kann man immer dem größeren ein reguläres Vieleck einschreiben und dem kleineren ein reguläres Vieleck umschreiben, so daß der Umfang des einen wie des anderen ganz in den Ring zwischen den Kreisumfängen zu liegen kommt.**

Fig. 208.



Beweis. Der Mittelpunkt der Kreise sei *C*, *CE* ein Radius des größeren, *CD* ein Radius des kleineren. An *D* ziehe man die Tangente *MN* ⊥ *CE* bis zum Umfange des größeren Kreises. So groß auch dieser Umfang und so klein der Bogen *MEN* sein möge, es wird immer möglich sein, jenen Umfang durch fortgesetzte Halbirung in gleiche Theile zu schneiden, die noch kleiner als der Bogen *MEN* sind. Dieses sei geschehen und *AEB* ein solcher Theil, so genommen, daß *E* seine Mitte ist. Die Sehne *AB* ist nun ∥ *MN* und Seite eines dem größeren Kreise eingeschriebenen Vielecks, dessen Umfang, da *AB* weiter als *MN* vom Mittelpunkte absteht (III, 16) ganz zwischen den Umfängen beider Kreise liegt.

Man verbinde ferner *A* und *B* mit *C*. Treffen *CA* und *CB* die *MN* in *P* und *Q*, so ist offenbar *PQ* Seite eines regulären, dem kleineren Kreise umschriebenen Vielecks, dessen Umfang, da *PQ* außerhalb des kleineren und innerhalb des größeren Kreises liegt, ganz zwischen die Kreisumfänge fällt, wodurch die Behauptungen des Satzes erwiesen sind.

21. Satz. **Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich zu einander, wie die Halb- oder Durchmesser derselben.**

Die Richtigkeit dieser Behauptung wird man schnell aus Satz 8 dieses Capitels folgern, wenn man sich erlaubt, den Kreis als ein re-

guläres Polygon von unendlich vielen und dabei unendlich kleinen Seiten anzusehen. Da aber diese Vorstellungsweise, obgleich sie hier zu einem richtigen Resultate führt, doch an einer Inconsequenz der Begriffe leidet und, in so fern sie als Beweismittel dienen soll, eine schärfere logische Kritik nicht aushält, so wird der folgende, nach Euklidischer Musterstrenge geführte, Beweis des vorliegenden Satzes nicht überflüssig sein.

Fig. 209.

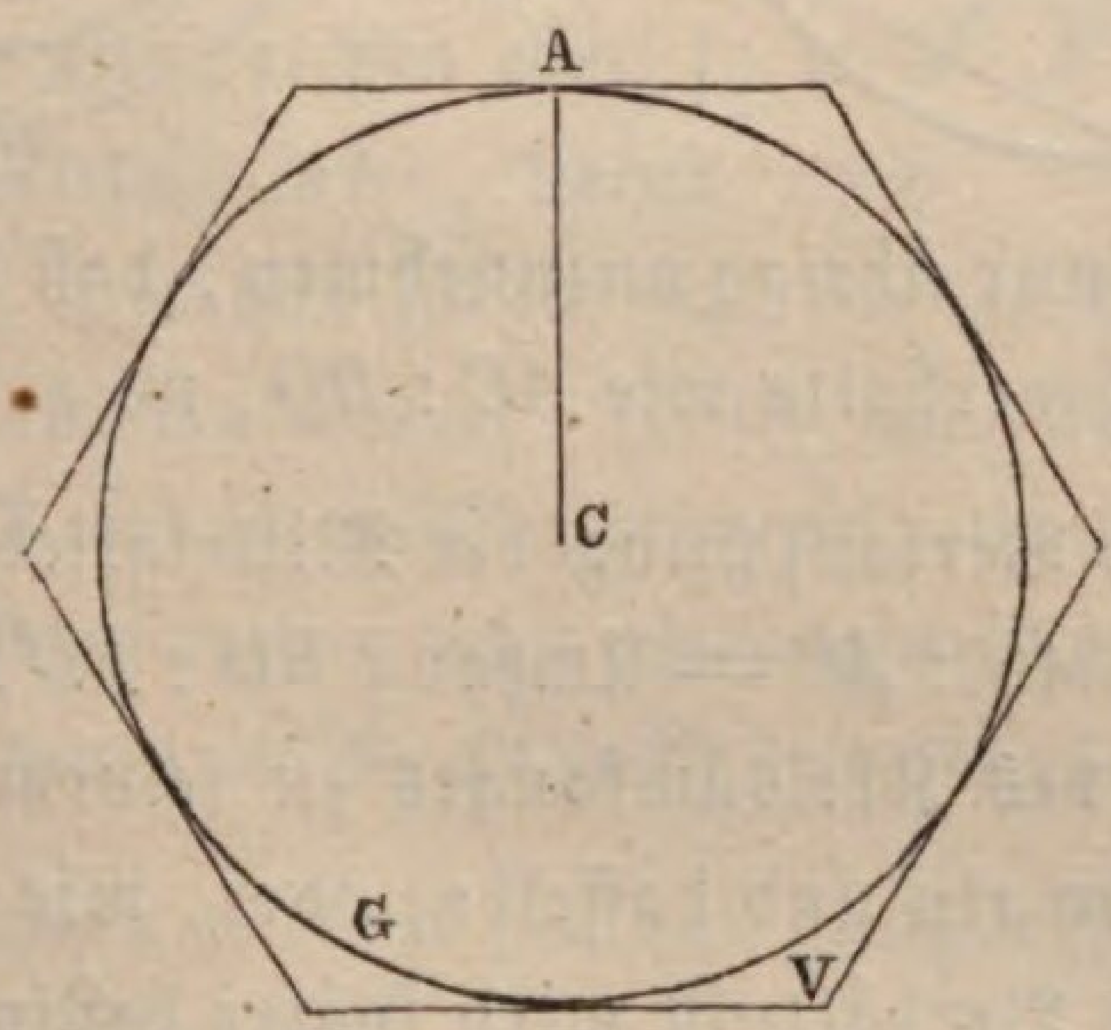
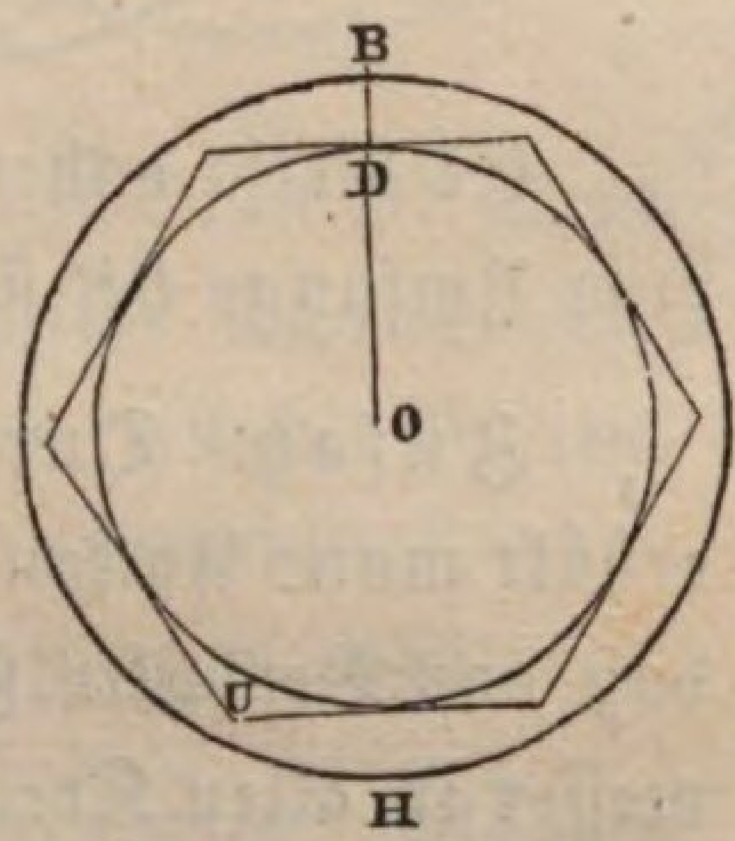


Fig. 210.



CA und *OB* seien die Halbmesser zweier Kreisumfänge *AG* und *BH*. Verhielten sich nun diese Umfänge nicht wie *CA* zu *OB*, so müßte sich der erste Umfang *AG* zum zweiten *BH* wie *CA* zu irgend einer anderen Geraden verhalten, die entweder kleiner oder größer als *OB* wäre. Es sei:

1) $AG : BH = CA : OD$ und $OD < OB$. Beschreibt man um *O* mit *OD* einen Kreis, so läßt sich jedenfalls (20) diesem Kreise ein regelmäßiges Vieleck umschreiben, dessen Umfang ganz innerhalb des Kreises *BH* liegt. Dies sei geschehen; der Umfang sei *DU*. Ein dem Kreise *AG* umschriebenes ähnliches Vieleck habe den Umfang *AV*. Nach Satz 8 verhält sich $AV : DU = CA : DO$. Aus dieser und der vorausgesetzten Proportion folgt aber $AG : BH = AV : DU$. Da (19) $AG < AV$, so müßte (V. 18) $BH < DU$ sein. Es ist aber (19, Zus.) $BH > DU$. Dieser Widerspruch beweist, daß die vierte Proportionale zu *AG*, *BH* und *CA* nicht kleiner als *OB* sein könne. Es sei also:

2) $AG : BH = CA : OE$ und $OE > OB$. Beschreibt man wieder um *O* mit *OE* einen Kreis und in denselben ein reguläres Polygon, dessen Umfang *EU* den Kreis *BH* ganz umschließt, in *AG* aber ein ähnliches Polygon, dessen Umfang *AV* sei, so verhält sich (8) $AV : EU = CA : OE$. Daraus aber und der Annahme folgt $AG : BH = AV : EU$, Es ist $AG > AV$, darum müßte, wäre die jetzige Voraussetzung richtig. $BH > EU$ sein. Es ist aber im Gegentheil (19, Zus.) $BH < EU$, daher kann die vierte Proportionale zu *AG*, *BH*, *CA* auch nicht größer als *OB* sein.

Fig. 211.

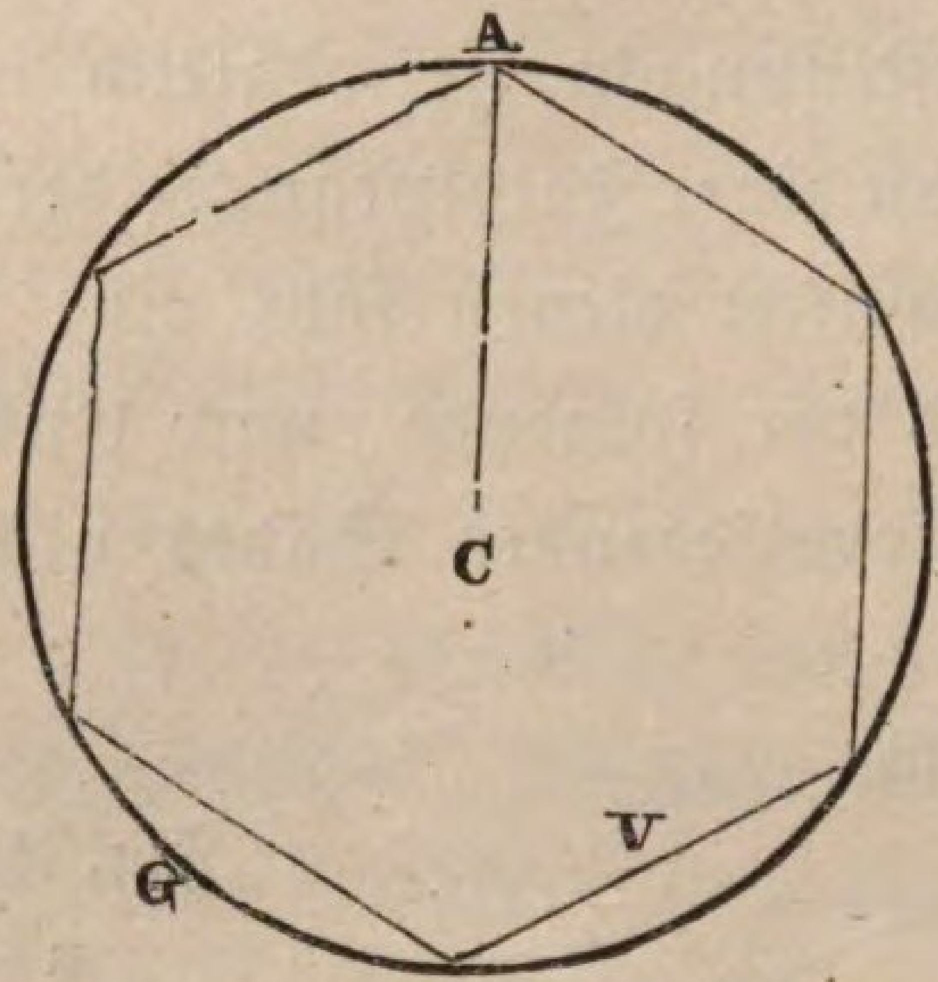
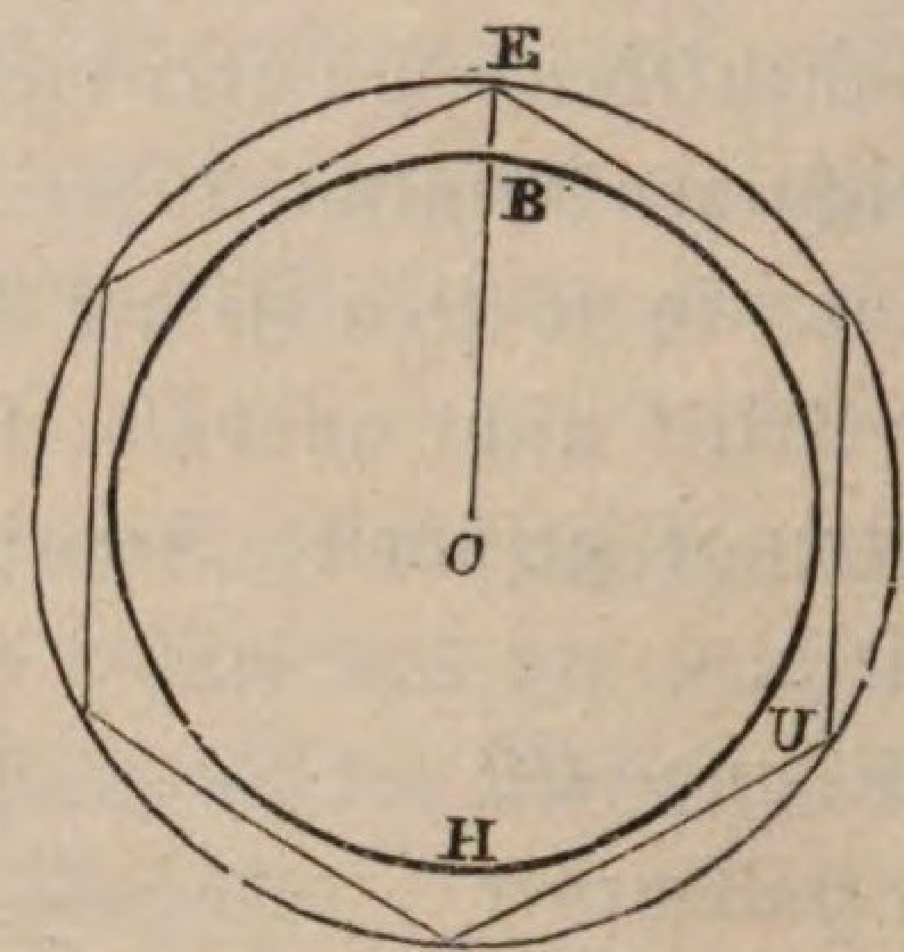


Fig. 212.



Es bleibt daher nur übrig, anzunehmen, daß der Kreisumfang *AG* zum Umfange *BH* sich verhalte wie *AC* : *BO*, w. z. b. w.

Zusatz. Durch Vertauschung der Mittelglieder dieser Proportion erhält man: Umfang *AG* : *AC* = Umfang *BH* : *BO*, woraus hervorgeht, daß das Verhältniß des Kreisumfanges zu seinem Halb- oder Durchmesser in allen Kreisen ein und dasselbe, oder, wie man sagt, ein constantes sei. Dieses Verhältniß wird später bestimmt werden.

22. Satz. **Kreise verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser.**

Auch dieser Satz ist an die Vorstellung der Kreise als ähnlicher regulärer Vielecke von unendlich kleinen Seiten enge geknüpft und folgt daraus nach S. 8 fast unmittelbar. Es ist aber für die geometrische Strenge befriedigender, hier wie beim vorigen Satze zu verfahren und einen Beweis auf Grund des in (20) ausgesprochenen Lehrsatzes zu führen. Dieser Beweis ist wörtlich der vorhergehende, wenn man nur an die Stelle von

Kreisumfang . . . . Kreisinhalt,
Polygonumfang . . . Polygoninhalt,
Halbmesser . . . . Quadrat des Halbmessers

setzt. Die Wiederholung kann daher unterbleiben.

Zusatz. Hieraus folgt in gleicher Weise wie beim vorigen Satze, daß das Verhältniß eines jeden Kreises zum Quadrate seines Radius ein constantes ist.

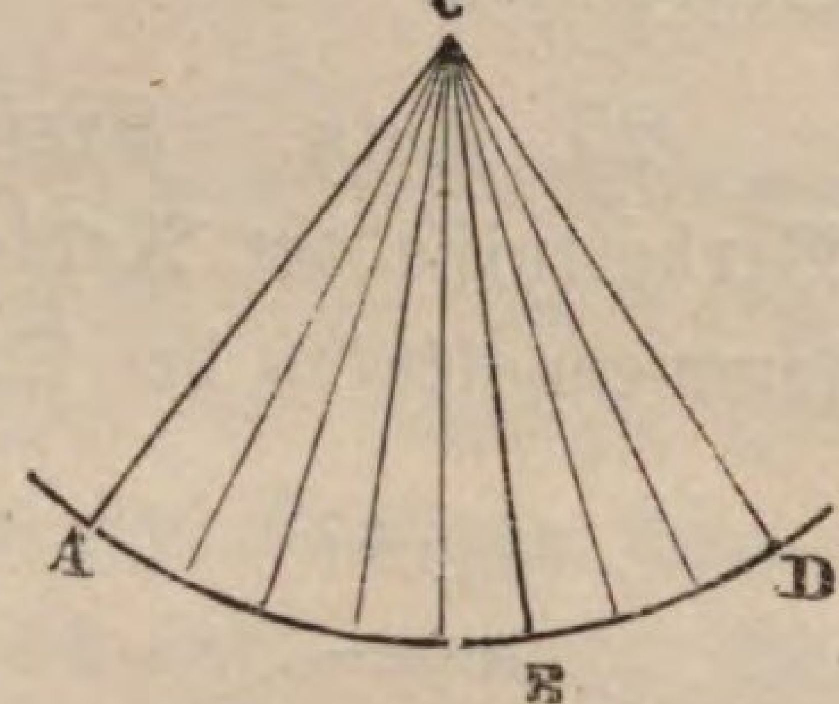
23. Satz. **Bogen oder Ausschnitte desselben Kreises oder gleicher Kreise verhalten sich zu einander, wie die zugehörigen Winkel am Mittelpunkte.**

Beweis. AB, BD seien seien zwei Bogen eines Kreises, dessen Mittelpunkt C ist.

Es wird nun:

$AB : BD = \sphericalangle ACB : BCD$ sein.

Fig. 213.



Sind nämlich:

1) die Bogen commensurabel und verhalten sie sich etwa wie 5 : 3, so läßt sich AB in 5 und BD in 3 Theile zerlegen, die alle gleich groß sind. Diesen Theilen entsprechen eben so viele gleiche Winkel am Mittelpunkte, daher auch $\sphericalangle ACB : BCD = 5 : 3$. Hieraus folgt: $AB : BD = \sphericalangle ACB : BCD$. Sind

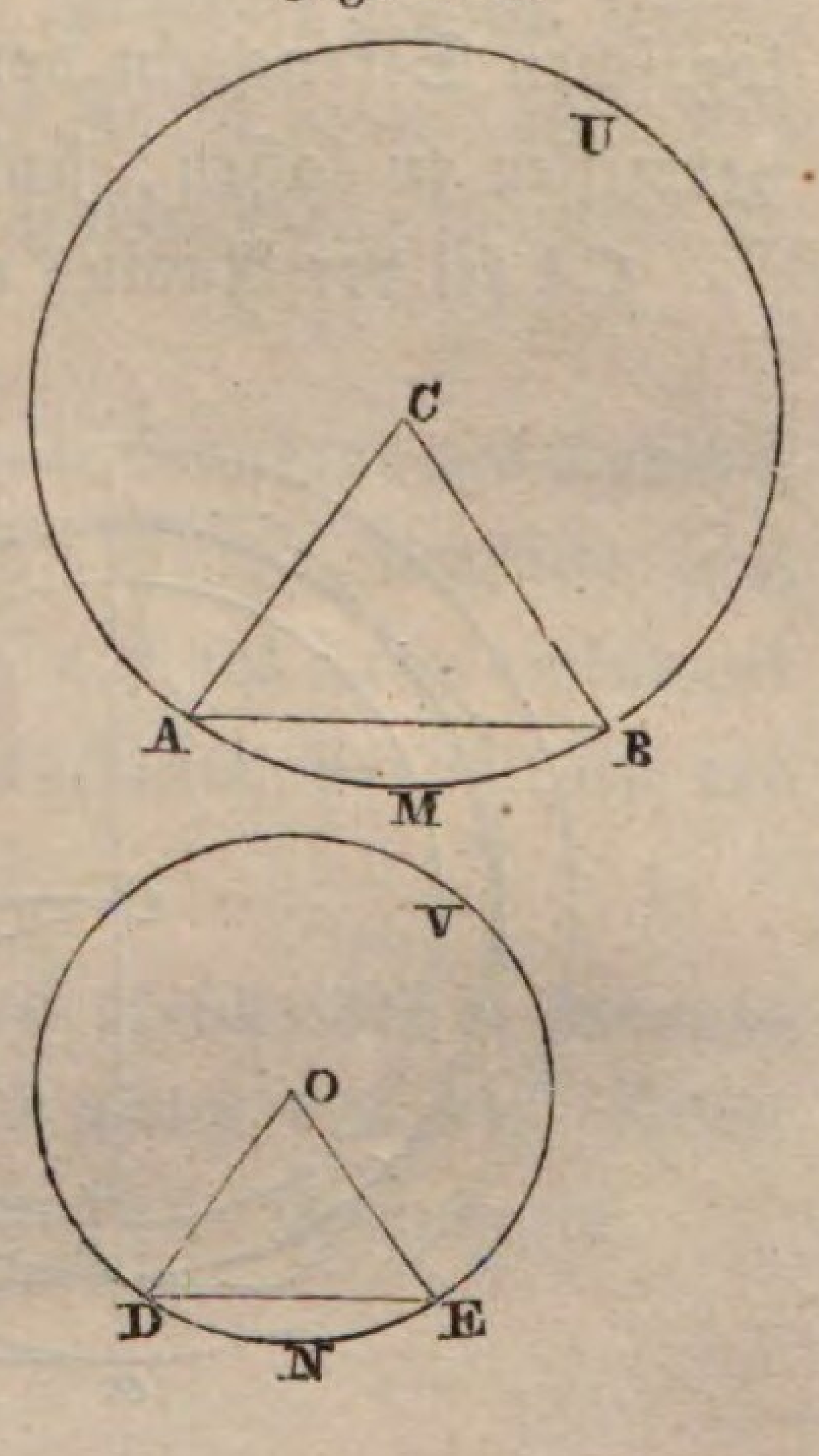
2) die Bogen incommensurabel, so ist eine ähnliche Schlußweise, wie die schon in V. 37 und 80 gebrauchte, anzuwenden, um die Gültigkeit der aufgestellten Proportion auch für diesen Fall darzuthun.

Für die Kreissectoren ACB, BCD ist der Beweis ganz derselbe.

Zusatz. Ein Bogen verhält sich zur ganzen Peripherie, wie sein zugehöriger Centriwinkel zu $4R$.

24. Satz. **Bogen verschiedener Kreise, denen gleiche Winkel am Mittelpunkte entsprechen, sind ähnlich (*V.* 41); sie verhalten sich nämlich wie die Radien. Kreisausschnitte und Kreisabschnitte sind in gleichem Falle ähnlich und verhalten sich ihrem Flächeninhalte nach wie die Quadrate der Radien.**

Fig. 214.



Beweis. AB, DE seien zwei Bogen, welchen die gleichen Winkel am Mittelpunkte ACB, DOE entsprechen. Denkt man sich die Kreise vollendet, so verhält sich der Bogen AB zu seiner Peripherie AU wie der Winkel C zu $4R$; eben so Bogen DE zu seinem Umfange DV wie $\sphericalangle O$ zu $4R$, also da $\sphericalangle C = O$, auch $AB : AU = DE : DV$ und durch Vertauschung der Mittelglieder $AB : DE = AU : DV$. Nach Satz 21 ist aber $AU : DV = AC : DO$, mithin auch

Bogen AB : Bogen $DE = AC : DO$.

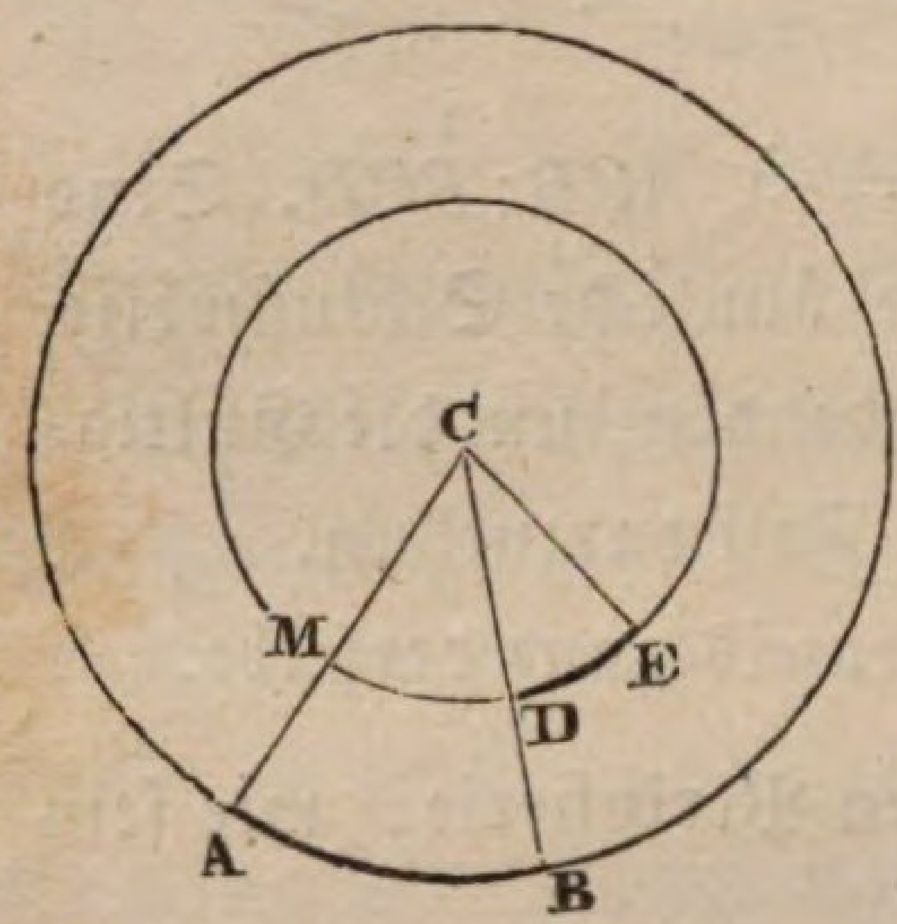
Auf ähnliche Weise ist der Beweis für die Sectoren zu führen.

Was die Segmente AMB, DNE anbelangt,

so sind sie die Unterschiede zwischen den Sectoren und den ähnlichen Dreiecken *ACB*, *DOE*. Da diese Dreiecke sowohl als die Sectoren sich wie die Quadrate der Radien verhalten, so gilt ein Gleiches von den Segmenten.

25. Satz. **Kreisbogen stehen überhaupt im zusammengesetzten Verhältnisse der Radien und Centriwinkel; Kreisausschnitte im zusammengesetzten der Quadrate der Radien und der Centriwinkel.**

Fig. 215.



Beweis. Man mache die Kreise concentrisch, *AB* sei ein Bogen des einen, *DE* ein Bogen des anderen, *DM* ein dem *AB* ähnlicher Bogen des zweiten Kreises. Es ist dann (24) $AB : MD = AC : MC$ und (23) $MD : DE = \measuredangle ACB : DCE$; daher ist das Verhältniß der Bogen *AB*, *DE* aus dem der Radien *AC*, *MC* und dem der Centriwinkel zusammengesetzt.

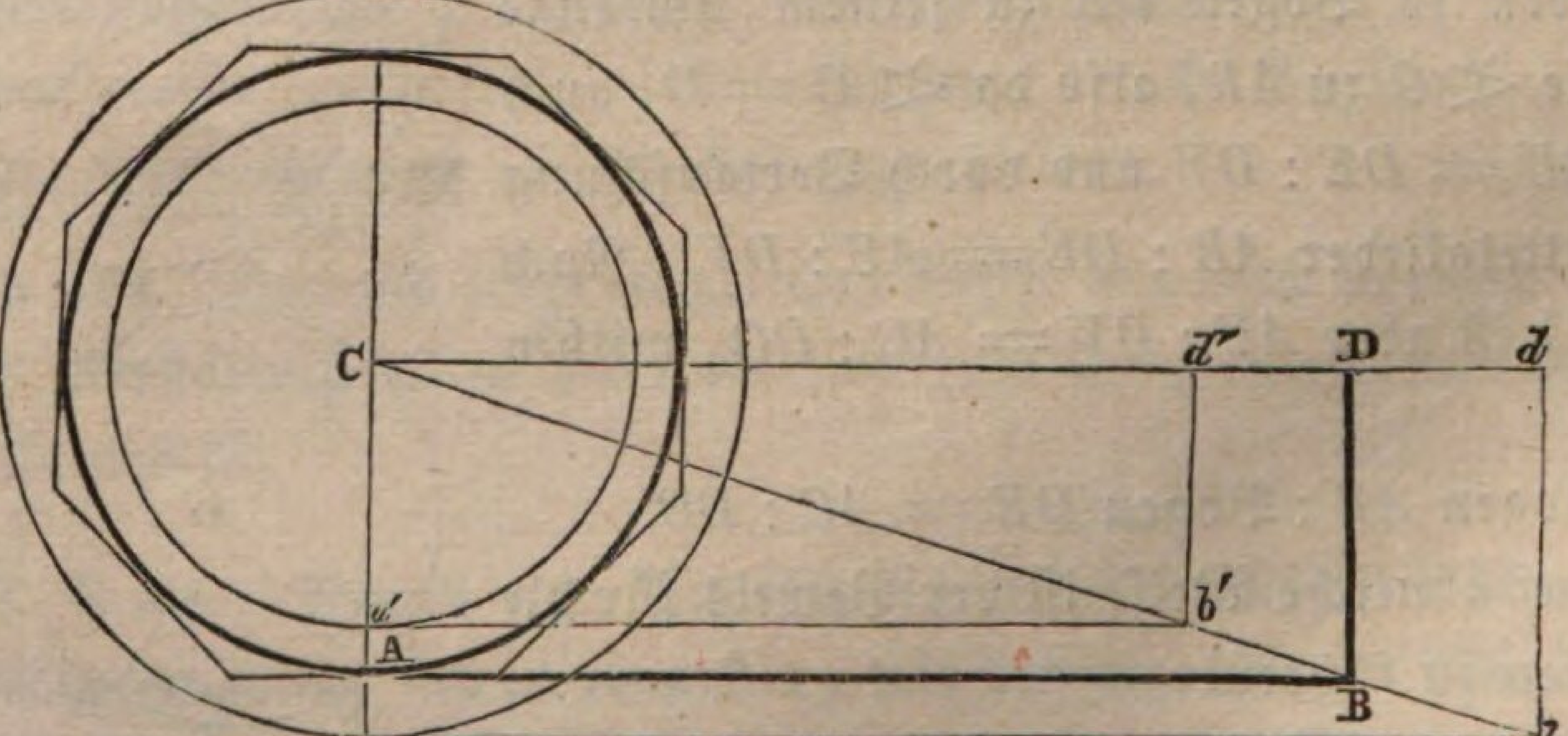
Was die Ausschnitte betrifft, so ist der Beweis ganz ähnlich.

26. Satz. **Jeder Kreis ist an Inhalt einem Rechtecke gleich, dessen eine Seite dem Radius, die andere dem halben Kreisumfange an Länge gleich kommt.**

Dieser Satz folgt wieder unmittelbar aus dem in (6) vom regulären Polygon bewiesenen Satze, sobald man den Kreis als ein solches Polygon von unendlich vielen Seiten behandelt. Um jedoch an der logischen Strenge in der Begründung eines so wichtigen Satzes nichts vermissen zu lassen, finde folgender Beweis desselben hier seine Stelle:

CA sei der Radius eines Kreises, *C* der Mittelpunkt, *AB* senkrecht

Fig. 216.



auf CA und dem halben Kreisumfange an Länge gleich. Vollendet man nun das Rechteck $CABD$, so wird dasselbe an Inhalt dem Kreise gleich sein. Denn gesetzt, dieses sei nicht, so müßte der Kreis doch irgend einem anderen größeren oder kleineren Rechtecke gleich sein, indem es Rechtecke von jeder möglichen Größe giebt. Der Kreis sei:

1) einem größeren Rechtecke gleich. Ist dasselbe dem Rechtecke $CABD$ nicht ähnlich, so kann es doch (V. 90) in ein dem Rechtecke $CABD$ ähnliches verwandelt werden. Dieses sei erforderlichen Falls geschehen und $Cabd$ ein dem Kreise gleiches und dem $CABD$ ähnliches Rechteck. Wegen dieser Aehnlichkeit liegen die Diagonalen CB, Cb auf einander. Beschreibt man nun um C mit Ca einen dem gegebenen Kreise concentrischen Kreis, so wird dessen halber Umfang $= ab$ sei. Denn die ganzen, mithin auch die halben Umfänge beider Kreise verhalten sich (21) wie die Radien CA, Ca, diese wie $AB : ab$. Da nun der halbe Umfang des gegegebenen Kreises $= AB$, so ist der des zweiten $= ab$. Zwischen beide Kreise läßt sich nun immer (19) ein reguläres Polygon beschreiben. Dasselbe ist (6) dem Rechtecke aus seinem halben Umfange und der Apotheme gleich. Dieser halbe Umfang ist aber (19, Zus.) jedenfalls kleiner als der halbe Umfang des zuletzt beschriebenen Kreises oder als ab; die Apotheme ist $< Ca$, daher aus doppeltem Grunde das Polygon kleiner als das Rechteck $Cabd$. Letzteres sollte aber der Annahme gemäß dem gegebenen Kreise gleich sein; also wäre bei dieser Annahme das Polygon kleiner als der gegebene Kreis, was doch unmöglich ist, da im Gegentheil der Kreis als Theil des Polygons kleiner als dieses ist.

Ganz auf gleiche Weise wird erwiesen, daß der Kreis keinem kleineren Rechtecke als $CABD$ gleich sein kann. Der Kreis kann daher nur diesem Rechtecke selbst, welches aus Radius und Halbumfang gebildet ist, gleich sein.

Zusatz 1. Jeder Kris verhält sich daher zum Quadrat des Radius, wie sein halber Umfang zum Radius oder sein ganzer Umfang zum Durchmesser. Drückt $\pi : 1$ das constante Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser aus, so ist $\pi : 1$ auch das constante Verhältniß des Kreises selbst zum Quadrat des Radius.

Zusatz 2. Ein Kreissector ist einem Dreieck gleich, dessen Grundlinie dem Bogen, und dessen Höhe dem Radius gleich kommt. Denn der Sector verhält sich zum Kreise, wie sein Bogen zur Peripherie.

Vierter Abschnitt.

Aufgaben.

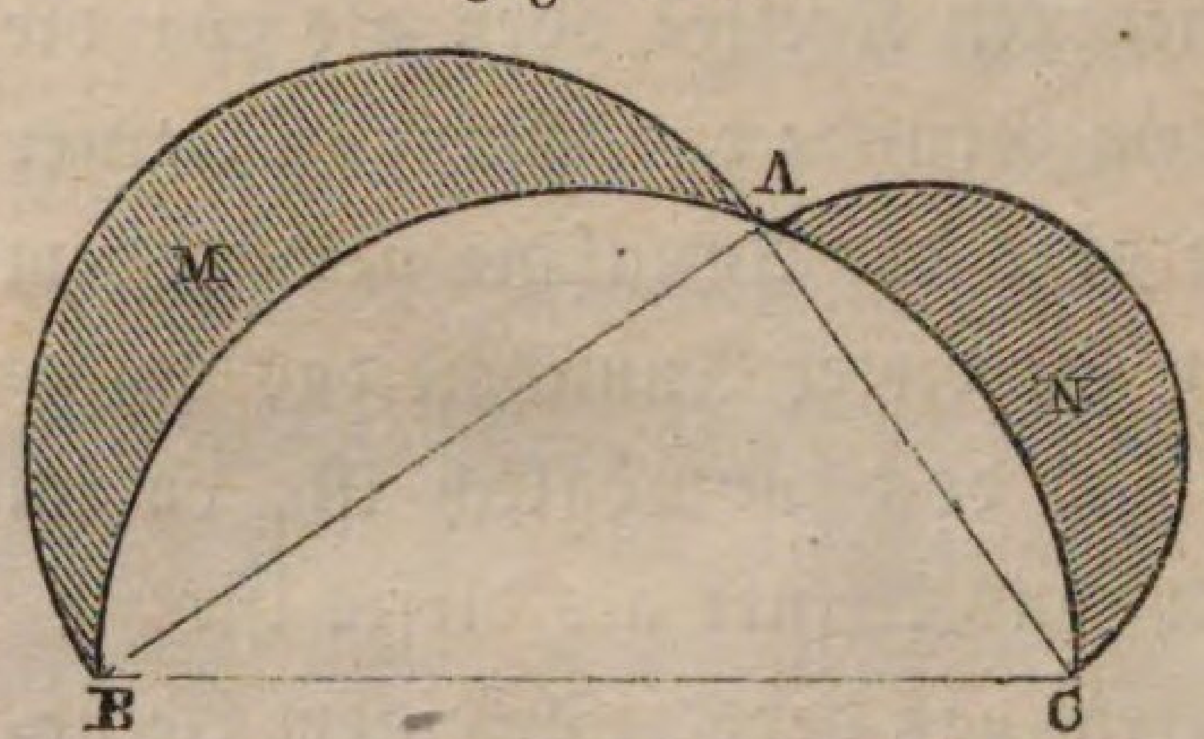
27. **Aufgabe.** **Einen Kreis zu beschreiben, dessen Umfang der Summe oder Differenz der Umfänge zweier gegebenen Kreise gleich ist.**

Da Kreisumfänge sich wie die Radien verhalten, so muß, um der Aufgabe zu genügen, der Radius des verlangten Kreises die Summe oder Differenz der Radien der gegebenen Kreise sein.

28. **Aufgabe.** **Einen Kreis zu beschreiben, dessen Inhalt der Summe oder Differenz zweier gegebenen Kreise gleich ist.**

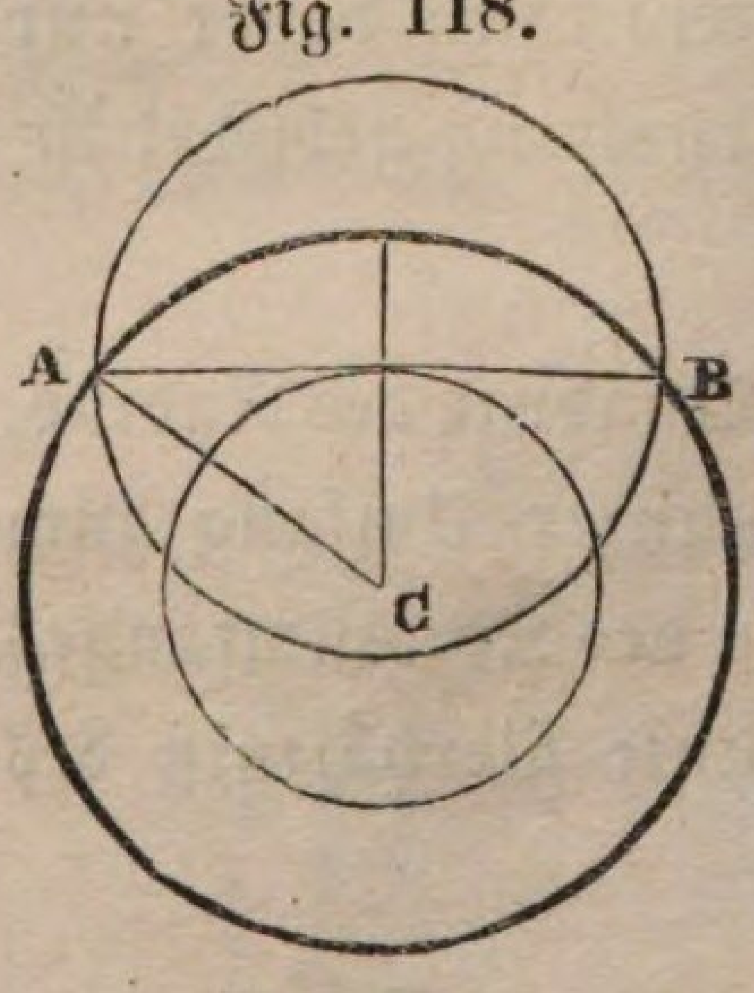
Auflösung. Da Kreise sich wie die Quadrate der Radien verhalten, so kommt es nur darauf an, einen Kreis zu beschreiben, so daß das Quadrat seines Radius die Summe oder Differenz der Quadrate der gegebenen ist. Die Aufgabe reducirt sich somit auf die in Cap. IV. 23 und 24 vorgekommenen. Zu bemerken bleibt:

Fig. 117.



1) Beschreibt man über den drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks *ABC* Halbkreise in der Lage, wie beistehende Figur es zeigt, so ist die Summe der beiden mondförmigen Figuren *M* und *N* dem rechtwinkeligen Dreiecke an Inhalt gleich. (Die Möndchen des Hippocrates (Lunulae Hippocratis*). Sind also *AB* und *AC* einander gleich, so ist man im Stande, den Inhalt eines der Möndchen durch eine geradlinig begrenzte Figur anzugeben.

Fig. 118.



2) Sind zwei Kreise concentrisch, so braucht man nur an den kleineren eine Tangente *AB* bis zum größeren zu ziehen, um den Durchmesser eines Kreises zu haben, der dem Unterschiede der

---

*) Hippocrates von Chios lebte um das Jahr 450 v. Chr. Clausen hat außer den von Hippocrates entdeckten Möndchen noch vier neue mondförmige Flächen angegeben, deren Inhalt quadrirbar ist. S. Crelle, Journal XXI. 375.

concentrischen, d. i. dem zwischen ihren Umfängen begriffenen Ringe gleich ist.

Der Beweis leicht.

29. **Aufgabe. Einen Kreis zu finden, dessen Umfang zum Umfange eines anderen in einem gegebenen Verhältnisse** $m : n$ **steht.**

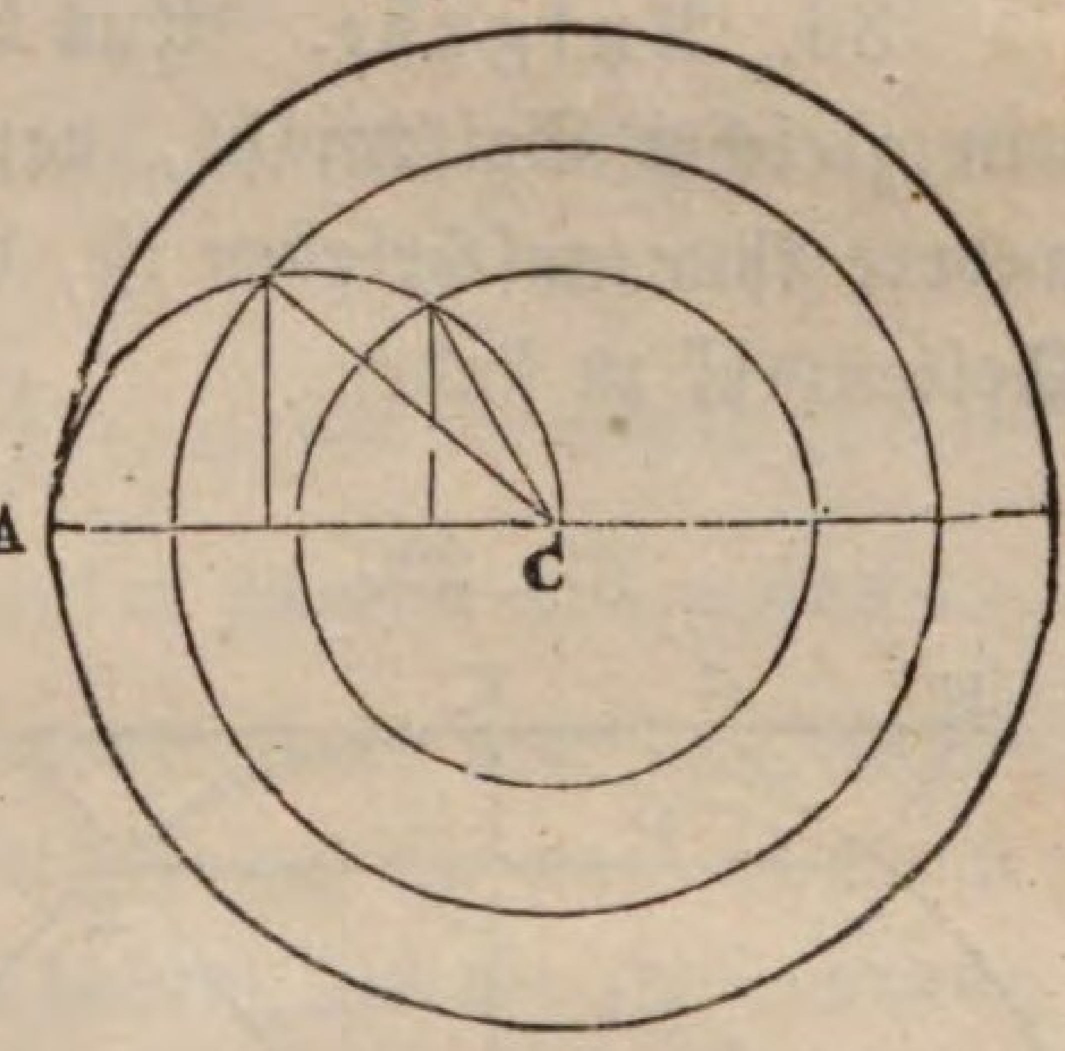
Durch Satz 21 reducirt sich diese Aufgabe auf die Bestimmung einer vierten Proportionale zu n, m und dem Radius des gegebenen Kreises (V. 60).

30. **Aufgabe. Einen Kreis zu finden, dessen Inhalt zu dem eines gegebenen Kreises im Verhältnisse** $m : n$ **steht.**

Durch Satz 22 reducirt sich diese Aufgabe auf V. 89.

31. **Aufgabe. Einen gegebenen Kreis durch andere concentrische in Stücke zu theilen, die ein gegebenes Verhältniß haben.**

Fig. 219.



Diese Aufgabe ist ganz ähnlich der in V. 88 gegebenen und findet durch dieselben Mittel ihre Auflösung. Was dort die Seite AB war, ist hier der Radius des gegebenen Kreises. Die Figur wird zur Erklärung der Auflösung hinreichen.

Fünfter Abschnitt.

Kreismessung.

32. Alle Berechnungen am Kreise setzen die Kenntniß der oben (26, Zus. 1) genannten Zahl π, welche das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie und zugleich das des Kreises zum Quadrat des Halbmessers ausdrückt, voraus.

Um diese Zahl zu finden, kann man einen vierfachen Weg einschlagen, entweder:

a) sieht man den Durchmesser eines Kreises als gegeben an und bestimmt nach ihm den Umfang, oder

b) man sieht das Quadrat des Radius als gegeben an und bestimmt nach ihm den Flächeninhalt des Kreises, oder

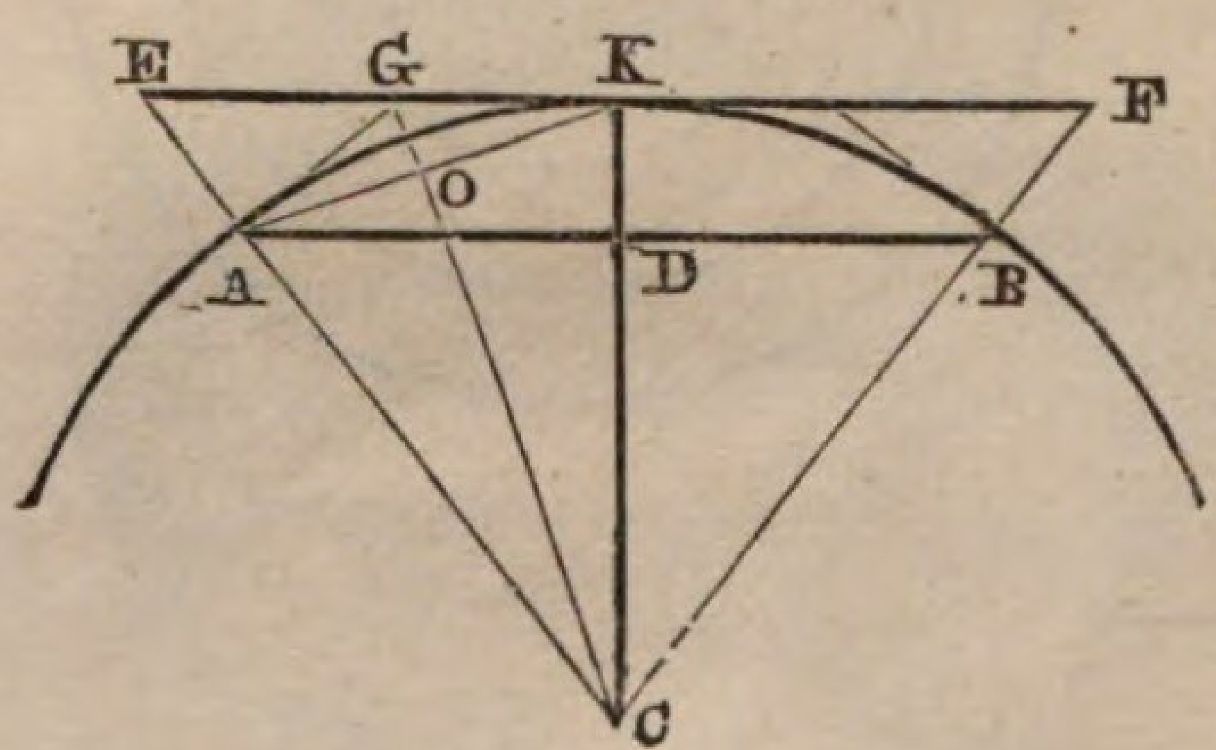
c) man legt die angenommene Länge einer Kreisperipherie zu Grunde und berechnet den zugehörigen Radius, oder

d) man geht vom Flächeninhalt des Kreises aus und bestimmt zu einer angenommenen Größe desselben das Quadrat des Radius.

Durch *a* und *b* erhält man die Zahl π, durch *c* und *d* die umgekehrte $\frac{1}{\pi}$. Der Vollständigkeit wegen sind im Nachfolgenden sämmtliche vier Wege berücksichtigt. Jeder derselben erfordert die Auflösung einer besonderen Aufgabe, durch welche die der Rechnung zu Grunde zu legenden Formeln gewonnen werden. Dieser Aufgaben sind also gleichfalls vier; sie sind Gegenstand der folgenden vier Nummern.

33. Aufgabe. **Aus den Umfängen zweier regulären Polygone von gleicher Seitenzahl, deren eines dem Kreise eingeschrieben, das andere ihm umschrieben ist, die Umfänge zweier anderen von doppelter Seitenzahl zu finden.**

Fig. 220.



Aufl. *C* sei der Mittelpunkt eines Kreises, *AB* die Seite eines ihm eingeschriebenen *n*ecks. Halbirt man den Winkel *ACB* durch *CK*, so wird dadurch auch *AB* (in *D*) halbirt und eine an *K* zu legende Tangente wird parallel mit *AB*. Zieht man diese Tangente *EF* bis zu den Verlängerungen der Radien *CA*, *CB*, so wird sie die Seite eines regulären umschriebenen *n*ecks sein. Zieht man weiter *AK* und an *A* noch die Tangente *AG* bis zur ersten *EF*, so ist *AK* die Seite eines eingeschriebenen, und *GK* die halbe Seite eines umgeschriebenen regulären Vielecks von doppelter Seitenzahl oder eines 2*n*ecks. Bezeichnet man nun den Umfang des eingeschriebenen regulären 2*n*ecks mit *e*, den des umschriebenen mit *u*, den Umfang des eingeschriebenen regulären 2*n*ecks mit *e'*, den des umschriebenen mit *u'*, so ist:

$$e = n \cdot AB = 2n \cdot AD, \qquad u = n \cdot EF = 2n \cdot EK,$$
$$e' = 2n \cdot AK, \qquad u' = 2n \cdot 2GK, \text{ daher auch:}$$
$$e : e' : u : u' = AD : AK : EK : 2GK.$$

e und u sind die gegebenen Größen der Aufgabe, e' und u' die gesuchten.

1) Da $\sphericalangle ECG = GCK$, so ist (V, 49) $EG : GK = EC : CK$ (oder CA) $= EK : AD = u : e$; daraus folgt $EG + GK : 2GK = u + e : 2e$. Es ist aber $EG + GK = EK$, und $EK : 2GK = u : u'$, daher $u : u' = u + e : 2e$, mithin:

$$u' = \frac{2ue}{u + e}.$$

2) AK treffe CG in O. Wegen Aehnlichkeit der Dreiecke GOK, KDA ist $GK : KO = KA : AD$; AK wird aber von CG in O halbirt oder $KA = 2KO$, daher ist:

$$2GK : KA = KA : AD,$$

also auch:

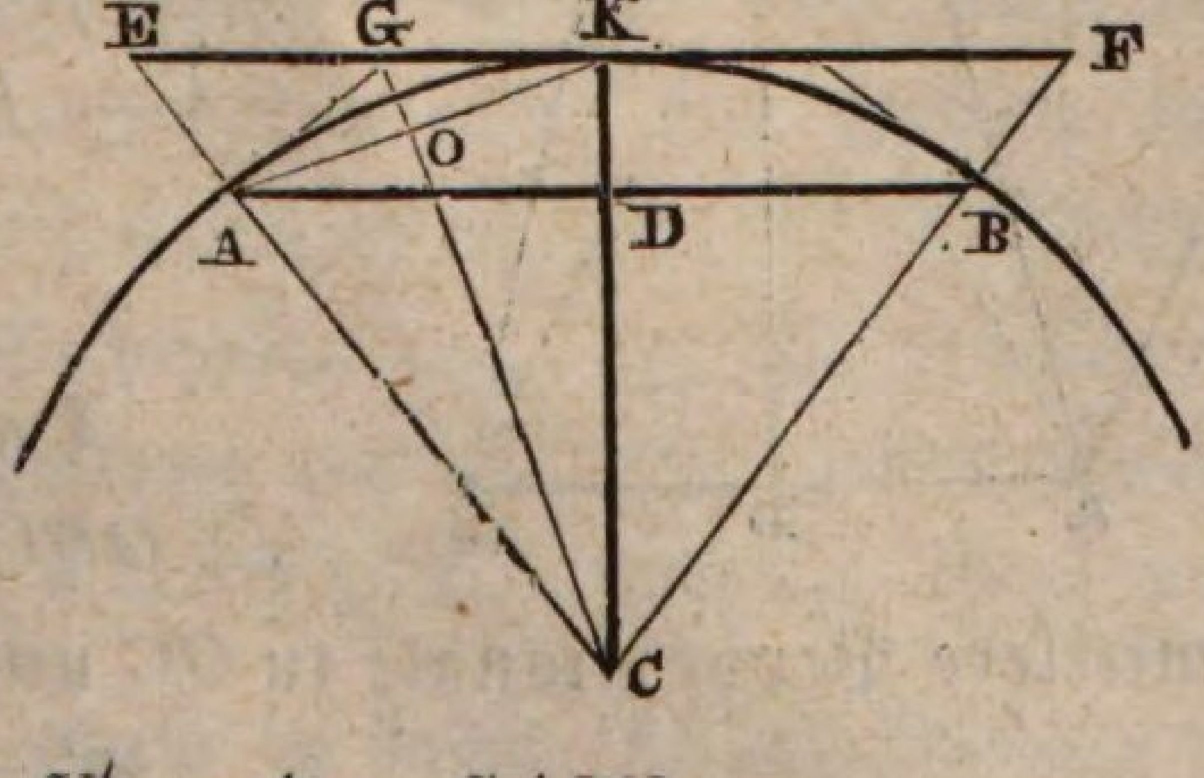
$$u' : e' = e' : e, \quad e' = \sqrt{u'e}.$$

Zusatz 1. u' ist das harmonische Mittel (s. V. 64) zwischen u und e, e' das geometrische Mittel zwischen u' und e. Nimmt man die reciproken Werthe, so ist $\frac{1}{u'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{e}\right)$, d. i., der reciproke Werth von u' ist das arithmetische Mittel der reciproken Werthe von u und e.

Zusatz 2. Denkt man sich eine Reihe abwechselnd um- und eingeschriebener Polygone, deren erstes ein umschriebenes ist und worin je zwei folgende immer doppelt so viele Seiten haben, als die zwei vorangehenden, so ist in solcher Reihe jedes Glied vom dritten an anwechselnd harmonisches und geometrisches Mittel aus den zwei vorhergehenden.

34. Aufgabe. Aus dem Flächeninhalt zweier regulären Polygone von gleicher Seitenzahl, deren eines dem Kreise umschrieben, das andere ihm eingeschrieben ist, den Inhalt zweier anderen von doppelter Seitenzahl zu finden.

Fig. 221.



Aufl. Bezeichnet man, dem vorigen analog, die Flächeninhalte der vier in Rede stehenden Polygone durch E, U, E' U', so ist leicht einzusehen, daß jetzt

$$E = n \cdot \triangle ACB = 2n \cdot \triangle ACD,$$
$$U = n \cdot \triangle ECF = 2n \cdot \triangle ECK,$$
$$E' = 2n \cdot \triangle ACK, \qquad U' = 2n \cdot GACK,$$

und also:

$$E : U : E' : U' = \triangle ACD : ECK : ACK : 2GCK.$$

1) Da $CD : CK = CA : CE$, so ist auch $\triangle ACD : ACK = ACK : ECK$, und also $E : E' = E' : U$, folglich $E' = \sqrt{EU}$.

2) Aus $EG : GK = EC : CK$ (oder CA) $= \triangle ECK : ACK = U : E'$ folgt: $EG + GK$ (oder EK) $: 2GK = U + E' : 2E'$, mithin auch $\triangle ECK : 2GCK$, oder $U : U' = U + E' : 2E'$, folglich:

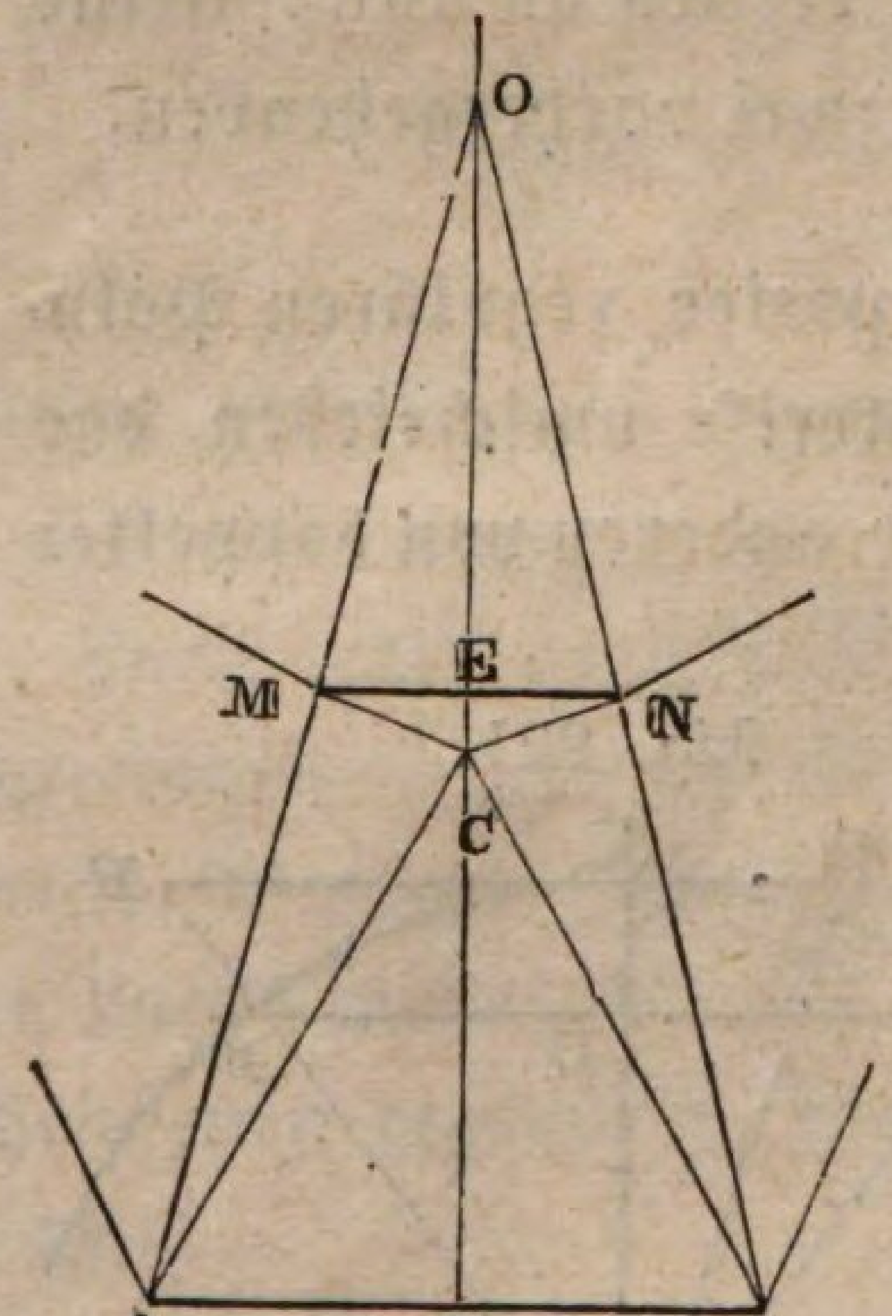
$$U' = \frac{2UE'}{U+E'}.$$

Zusatz 1. E' ist das geometrische Mittel zwischen E und U, U' das harmonische zwischen U und E'.

Zusatz 2. Denkt man sich wieder eine Reihe abwechselnd ein- und umschriebener regulärer Polygone, die nun mit einem eingeschriebenen anfängt und worin jedes Paar folgender doppelt so viele Seiten hat als das Paar vorhergehender, so ist in solcher Reihe jedes Glied, vom dritten an, abwechselnd geometrisches und harmonisches Mittel aus den zwei vorhergehenden.

35. Aufgabe. **Aus den Radien des einem regelmäßigen Vieleck eingeschriebenen und des ihm umschriebenen Kreises die Radien eines anderen regulären Vielecks von gleich großem Umfange aber doppelter Seitenzahl zu finden.**

Fig. 222.



Aufl. Der Radius des umschriebenen Kreises am ersten Polygon sei R, der des eingeschriebenen Kreises oder die Apotheme des Polygons r, die Radien des Polygons von doppelter Seitenzahl R' und r'. Geht man nun auf die Construction der Aufgabe §. 16 zurück, so hat man für die dortige, hier wieder beigesetzte, Figur $CA = R$, $CD = r$, $OM = R'$, $OE = r'$, $OD = CD + CO = CD + CA = R + r$, also:

$$OE = r' = \frac{R+r}{2}.$$

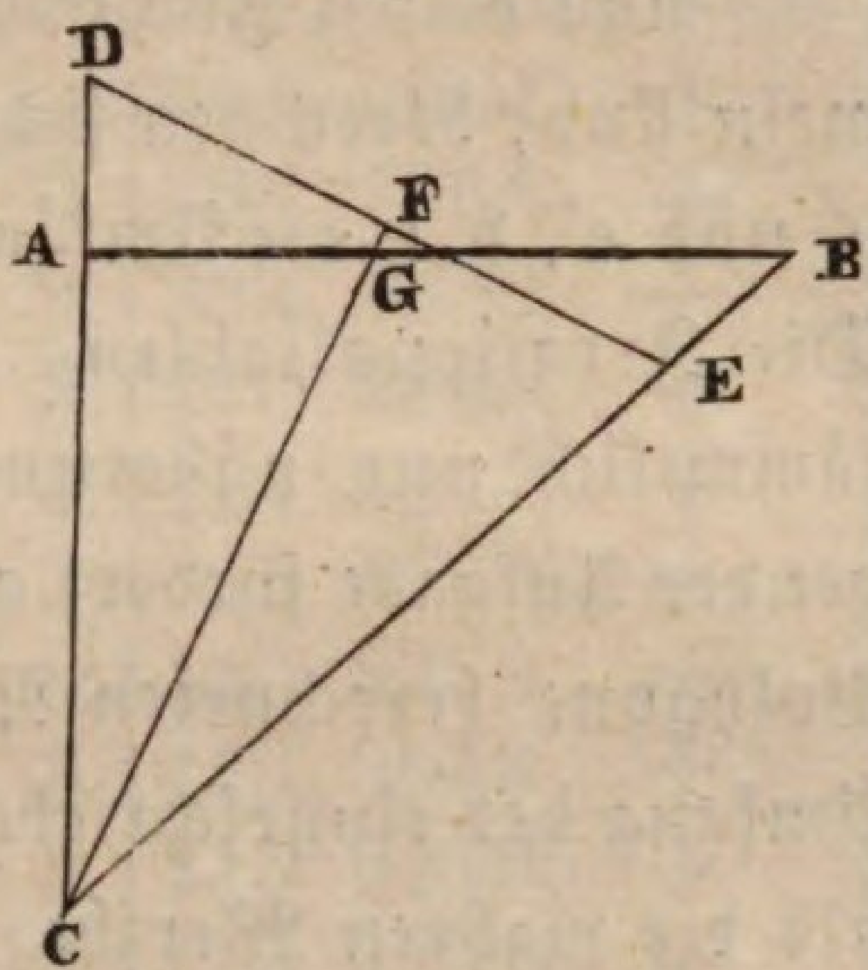
Da ferner $OM = MA$, $OC = CA$, so ist $\triangle OMC \cong AMC$, $\sphericalangle OMC = 90^0$, daher OM mittlere Proportionale zu OC und OE, also:

$$R' = \sqrt{Rr'}.$$

36. Aufgabe. Die Radien des zweiten regulären Vielecks aus denen des ersten zu finden, wenn die beiden Vielecke statt gleichen Umfang, gleichen Flächeninhalt haben.

Aufl. AB sei die halbe Seite eines regulären Polygons, CA, CB die Radien des ein- und umgeschriebenen Kreises. Verwandelt man dasselbe nach 17 in ein anderes Polygon von doppelt so viel Seiten aber gleichem Inhalte, so muß der Radius des dem letztern umschriebenen Kreises CD oder CE eine mittlere Proportionale zu CA und CB sein. Ist also wie vorher $CB = R$, $CA = r$, so ist nun:

Fig. 223.



$$R' = \sqrt{Rr}.$$

Um r' zu finden, sei $\sphericalangle ACB$ halbirt; die Halbirungslinie treffe DE in F, AB in G, dann ist $AG : GB = AC : CB$.

Daraus folgt $AG : AB = AC : AC + CB$, daher auch $\triangle ACG : ACB = AC : AC + CB$. Aber $\triangle ACB = DCE = 2DCF$, und $\triangle ACG : DCF = \overline{AC}^2 : \overline{CF}^2$, folglich $\overline{AC}^2 : \overline{2CF}^2 = AC : AC + CB$, und hieraus $\overline{2CF}^2 = AC\,(AC + CB)$. Da nun $CF = r'$, so ist $2r'r' = r\,(R + r)$, $r' = \sqrt{\tfrac{1}{2}r(R + r)}$.

37. Aufgabe. Das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser, oder (welches davon nicht verschieden ist) das des Kreises selbst zum Quadrat seines Halbmessers, sowie auch das umgekehrte Verhältniß zu bestimmen.

Jede der vier vorhergehenden Aufgaben gibt für sich allein genommen ein Mittel an die Hand, dieses Verhältniß annähernd und mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit zu berechnen.

I. Nach Aufgabe 33 ist man im Stande, die Perimeter der einem Kreise ein- und umgeschriebenen regulären Polygone von stets verdoppelter Seitenzahl zu berechnen, wenn man dabei von zweien ausgeht, die gleiche Seitenzahl haben und sich nach 9, 10, 11 construiren lassen. Geht man z. B. von zwei Sechsecken aus, so ist, der Durchmesser des Kreises $= 1$ gesetzt, der Umfang des eingeschriebenen Sechsecks $e = 3$, der des umgeschriebenen $u = 2\sqrt{3}$. Hieraus folgt nach den Formeln $u' = \dfrac{2ue}{u+e}$ und $e' = \sqrt{u'e}$ in Aufg. 33 der Umfang des

umgeschriebenen Zwölfecks $u' = \frac{12\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} = 12\ (2 - \sqrt{3})$*), der des eingeschriebenen Zwölfecks $e' = \sqrt{36\,(2-\sqrt{3})} = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})$*).

Aus diesen Zwölfecksumfängen, die nun das u und e obiger Formeln sind, berechnen sich durch wiederholte Anwendung dieser letzteren u' und e', d. i. die Umfänge des um- und eingeschriebenen 24ecks u. s. w. Die Irrationalzahlen, auf welche diese Berechnung führt, können sämmtlich nur näherungsweise angegeben werden. Das Ziel vorliegender Aufgabe fordert aber, daß die für den Umfang der umschriebenen Polygone berechneten Näherungswerthe überall größer, die für den Umfang der eingeschriebenen Polygone überall kleiner gehalten werden als die wahren Werthe, damit die Sicherheit bleibe, daß der Kreisumfang stets zwischen solchen Werthen enthalten sei. Um diesen Zweck zu erreichen, wären eigentlich zwei rationale Näherungswerthe für jeden Polygonumfang zu berechnen, einer, der größer, und einer, der kleiner ist wie dieser. Hiedurch würde aber andererseits ein doppelter Aufwand von Rechnung veranlaßt, der am füglichsten vermieden wird, wenn man die Näherungswerthe der Polygonumfänge sämmtlich mit ein paar Bruchziffern mehr berechnet, als das Endresultat deren haben soll. Will man z. B. jene Werthe bis auf sieben Bruchziffern genau erhalten, so berechne man deren neun und streiche die letzten derselben. Das Resultat einer solchen Rechnung ist in der folgenden Tabelle enthalten. Die Näherungswerthe sind darin absichtlich bei den umschriebenen Polygonen durchgehends (bis auf einen) größer, bei den eingeschriebenen kleiner als die wahren Werthe gehalten worden (weshalb auch hinter jenen ein —, hinter diesen ein + gesetzt ist), damit der Kreisumfang stets zwischen den angegebenen Näherungswerthen zweier Polygonumfänge von gleicher Seitenzahl enthalten sei. Der Unterschied zwischen einem von diesen Werthen und dem wahren Werthe ist überall kleiner als eine Einheit der letzten Bruchziffer, d. i. $< 0{,}00000001$.

---

*) Anmerkung. Wegen dieser beiden Umformungen s. Heis Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, §. 43, Nr. 26, und §. 55.

Anzahl der Seiten.	Umfang der umgeschriebenen Polygone. $u =$	Umfang der eingeschriebenen Polygone. $e =$
12	3.2153 9031 —	3.1058 2854 +
24	3.1596 5995 —	3.1326 2861 +
48	3.1460 8622 —	3.1393 5020 +
96	3.1427 1460 —	3.1410 3195 +
192	3.1418 7305 —	3.1414 5247 +
384	3.1416 6275 —	3.1415 5760 +
768	3.1416 1018 —	3.1415 8389 +
1536	3.1415 9704 —	3.1415 9046 +
3072	3.1415 9375 —	3.1415 92105 +
6144	3.1415 92928 —	3.1415 92516 +
12288	3.1415 92722 +	3.1415 92619 +
24576	3.1415 92671 —	3.1415 92645 +
49152	3.1415 92658 —	3.1415 92651 +
98304	3.1415 92655 —	3.1415 92653 +

Da nun die Kreisperipherie größer als jeder eingeschriebene, und kleiner als jeder umschriebene Polygonumfang ist, so wird um so mehr die Kreisperipherie größer als 3, 1415 92653 Durchmesser, und kleiner als 3, 1415 92655 Durchmesser sein, und bezeichnet man das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser mit $\pi : 1$, so ist näherungsweise und bis auf acht Bruchziffern richtig

$$\pi = \mathbf{3,\ 1415\ 9265}\ \dots\ ^{*)}.$$

---

*) Anm. für Geübtere. Da die Umfänge der beiden 384ecke und noch mehr je zwei folgende so wenig verschieden sind, daß das Quadrat ihres Unterschiedes wenig mehr als eine Einheit der achten Decimalstelle liefert, so kann von diesen Vielecken an statt des geometrischen und des harmonischen Mittels das arithmetische, oder $u' = \frac{1}{2}(u + e)$, $e' = \frac{1}{2}(u + e)$, gesetzt werden; denn diese drei Mittel können in den sieben ersten Decimalstellen nicht verschieden sein. Es ist nämlich der Unterschied zwischen dem arithmetischen und harmonischen Mittel $\frac{u+e}{2} - \frac{2ue}{u+e} = \frac{(u-e)^2}{2(u+e)}$ (hier) $< \frac{1}{12}(u - e)^2$, und der zwischen dem arithmetischen und geometrischen $\frac{u'+e}{2} - \sqrt{u'e} < \frac{u'+e}{2} - \frac{2u'e}{u'+e} < \frac{1}{12}(u' - e)^2$. Eben deshalb kann man aber auch sogleich von den genannten Vielecken zur Grenze π übergehen, gegen welche beide Zahlenreihen gemeinschaftlich convergiren. Es ist nämlich, wenn u und e die Umfänge der 384ecke oder je zwei folgende bezeichnen, innerhalb der hier angenommenen Grenzen der Ge-

II. Dasselbe Verhältniß läßt sich aus dem Flächeninhalte der ein- und umgeschriebenen Polygone finden. Geht man dabei wieder von zwei Sechsecken aus und nimmt nun den Halbmesser des Kreises $= 1$, so ist das eingeschriebene Sechseck $E = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, das umschriebene $U = 2\sqrt{3}$. Hieraus findet sich nach den Formeln $E' = \sqrt{EU}$, $U' = \frac{2UE'}{U + E'}$ (Aufg. 34) das eingeschriebene Zwölfeck $E' = 3$, das umschriebene $U' = 12\,(2 - \sqrt{3})$ u. s. w. Die Ausführung der Rechnung ist der vorhergehenden über die Umfänge geführten ganz ähnlich und es gelten dabei gleiche Bemerkungen. Ihr Ergebniß kann aber, nachdem in I. die Polygonumfänge mitgetheilt worden, hier um so mehr unterbleiben, als bei der Wahl des Halbmessers als Längeneinheit der Flächeninhalt des umschriebenen Polygons dem vorhin (wo der Durchmesser $= 1$) angegebenen Umfange desselben gleich, der Inhalt des eingeschriebenen Polygons aber die dritte Proportionale zu den Umfängen eines ähnlichen umschriebenen und des eingeschriebenen selbst wird. Die Umfänge geben daher eine etwas schnellere Näherung zu π als der Inhalt.

III. Die Formeln $r' = \frac{1}{2}(R + r)$, $R' = \sqrt{Rr'}$, Aufg. 35, enthalten die einfachste Methode, das umgekehrte Verhältniß $1 : \pi$ oder den Werth von $\frac{1}{\pi}$ elementarisch zu berechnen, woraus denn auch wieder π selbst sich ergiebt. Geht man beispielsweise von einem regelmäßigen Sechsecke aus, dessen Seite $= 1$, der Umfang $= 6$, so ist der Radius eines ihm umschriebenen Kreises $R = 1$, der seines eingeschriebenen $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

---

nauigkeit $\pi = \frac{1}{3}\,(u + 2e)$. Diese Formel beruht auf dem Satze: Eine Reihe von Zahlen, deren zwei erste a und b sind, deren dritte aber und jede folgende die halbe Summe der beiden jedesmal vorhergehenden ist, convergirt nach einer Grenze hin, die $= \frac{1}{3}\,(a + 2b)$. Der Beweis des letzteren Satzes ist folgender: Die Größen seien der Ordnung nach $a, b, c = \frac{a\ b}{2}, d = \frac{b + c}{2}, e = \frac{c + d}{2}$ u. s. w. Drückt man sie durch die beiden ersten a und b aus, so findet sich $d = \frac{a + 3b}{4}, e = \frac{3a + 5b}{8}$ u. s. w. Die Grenze x hat also die Form $x = ma + nb$; sie bleibt dieselbe, wenn man die Reihe mit b und c anfangen läßt, also ist auch $x = mb + nc = mb + \frac{n}{2}\,(a + b)$, hieraus folgt $ma + nb = mb + \frac{n}{2}\,(a + b)$, $n = 2m$, also $x = m\,(a + 2b)$. Da aber, wenn $a = b$, auch $x = a$, so muß $m = \frac{1}{3}$, also $x = \frac{a + 2b}{3}$ sein.

Mit diesen Werthen berechnen sich nach obigen Formeln die Radien eines regelmäßigen Zwölfecks von gleichem Umfange, nämlich der kleine Radius $r' = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3})$, der große $R' = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\sqrt{3})} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ u. s. w. Die Durchführung der Rechnung mit zehn Bruchziffern, von welchen die beiden letzten gestrichen sind, giebt folgende Tabelle:

Anzahl der Seiten.	Radius des eingeschriebenen Kreises. $r =$		Radius des umgeschriebenen Kreises. $R =$	
6	0.8660 2540	+	1.0000 0000	
12	0.9330 1270	+	0.9695 2583	—
24	0.9494 6926	+	0.9576 6220	—
48	0.9535 6573	+	0.9556 1177	—
96	0.9545 8875	—	0.9551 0012	+
192	0.9548 4443	+	0.9549 7227	+
384	0.9549 0835	+	0.9549 4031	+ *)
768	0.9549 2433	+	0.9549 3232	+
1536	0.9549 2833	—	0.9549 30325	—
3072	0.9549 2932	+	0.9549 2983	—
6144	0.9549 2957	+	0.9549 2970	+
12288	0.9549 2964	—	0.9549 2967	—
24576	0.9549 2965	+	0.9549 2966	+
49152	0.9549 29655	+	0.9549 29660	—

Sie ergiebt, daß, wenn der Umfang eines Kreises $= 6$ ist, sein Radius $> 0{,}95492965$ und $< 0{,}95492966$ sein müsse, daß also $\frac{1}{\pi} > \frac{2 \times 0{,}95492965}{6} > 0{,}31830988\ldots$ und $\frac{1}{\pi} < \frac{2 \times 095492966}{6} < 0{,}31830989$, näherungsweise also $\frac{1}{\pi} = 0{,}318309885\ldots$ sei, woraus $\pi = 3{,}14159265\ldots$ wie oben.

IV. Nur der Vollständigkeit wegen sei noch der vierten, auf die

*) Anm. Auch hier können wieder vom 384eck an die arithmetischen Mittel den geometrischen und harmonischen substituirt werden, was zur Folge hat, daß die Grenze $\frac{1}{\pi}$, gegen welche beide Zahlenreihen convergiren, innerhalb der angenommenen Grenzen der Genauigkeit $= \frac{1}{3}(r + 2R)$, wo r und R die Halbmesser des 384ecks bezeichnen.

Formel (36) gegründeten Methode gedacht, die Zahl $\frac{1}{\pi}$ und damit π zu berechnen, da sie der vorigen an Kürze nachsteht. Geht man zur Anwendung von einem Quadrate aus, dessen Seite $= 2$, Inhalt also $= 4$, so ist der Halbmesser des ihm eingeschriebenen Kreises $r = 1$, der des umschriebenen also $R = \sqrt{2}$. Hieraus ergeben sich durch die Formeln $R' = \sqrt{Rr}$, $r' = \sqrt{\frac{1}{2}r(R+r)}$ die Halbmesser eines dem Quadrate an Inhalt gleichen Achtecks $R' = \sqrt{\sqrt{2}}$, $r' = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}$ u. s. w.

38. Geschichtliches. Das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser, oder die Zahl π, ist zuerst von Archimedes (gest. 212 v. Chr.) genauer bestimmt worden. In seinem Buche über die Kreismessung berechnet er den Umfang eines ein- und den eines umgeschriebenen 96ecks und findet, daß die Peripherie des Kreises, welche dazwischen liegt, weniger als $3\frac{1}{7}$ und mehr als $3\frac{10}{71}$ des Durchmessers betrage*). Der erste dieser beiden Näherungswerthe oder das Verhältniß 7 : 22 wird gewöhnlich, doch nicht mit Recht, das Archimedische genannt. Es weicht vom wahren um keine 0,0013 ab. Peter Metius**) bestimmte dasselbe (um 1550) genauer auf 113 : 355, zwei

*) Anm. Diese Archimedischen Grenzen von π lassen sich schon durch ein ein- und umgeschriebenes Zwölfeck finden, wenn man dabei folgende zwei von Huygens in der Schrift: „De Circuli magnitudine inventa" bewiesenen Sätze zu Grunde legt: 1) die Kreisperipherie ist kleiner als $\frac{2}{3}$ vom Umfange jedes eingeschriebenen Polygons $+ \frac{1}{3}$ vom Umfange eines ähnlichen umschriebenen; 2) sie ist größer als der Umfang jedes eingeschriebenen regelmäßigen Polygons $+ \frac{1}{3}$ des Ueberschusses dieses Umfanges über den eines eingeschriebenen von halber Seitenzahl. Man setze nun den Durchmesser eines Kreises $= 1$, so ist der Umfang des eingeschriebenen Sechsecks $= 3$; ferner, da $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$ und $< \frac{362}{209}$, die Apotheme dieses Sechsecks $(= \frac{1}{4}\sqrt{3}) < \frac{181}{418}$ und $> \frac{265}{612}$, der Ueberschuß des Radius über diese Apotheme $< \frac{41}{612}$ und $> \frac{14}{209}$, die Seite des eingeschriebenen Zwölfecks $< \sqrt{\frac{41}{612}}$ und $> \sqrt{\frac{14}{209}}$, um so mehr $< \frac{1109}{4284}$ und $> \frac{147}{568}$, der Umfang dieses Zwölfecks also $< \frac{1109}{357}$ und $> \frac{441}{142}$, der Umfang des umschriebenen Zwölfecks (= dem 48fachen Ueberschusse des Radius über die Apotheme des eingeschriebenen Sechsecks) $< \frac{164}{51}$ und $> \frac{672}{209}$. Nach dem ersten der beiden angeführten Sätze ist nun die Peripherie π um so mehr $< \frac{2}{3} \cdot \frac{1109}{357} + \frac{1}{3} \cdot \frac{164}{51}$, d. i. $\pi < 3\frac{1}{7}$; nach dem zweiten ist $\pi > \frac{441}{142} + \frac{1}{3}\left(\frac{441}{142} - 3\right)$, d. i. $\pi > 3\frac{10}{71}$.

**) Nach der Angabe des Sohnes desselben Adrian Metius von Alkmar s. Arithmeticae et Geometricae practica Adriani Metii. Ex offic. Elzevir. 1611.

durch ihre Ziffern leicht im Gedächtniß zu behaltende Zahlen. Sie geben das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie schärfer an, als irgend welche kleinere Zahlen dies vermögen, und liefern den Kreisumfang bis auf nahe $\frac{1}{4}$ Milliontel des Durchmessers. Später (1586) trieb Ludolph van Ceulen die Näherung viel weiter und berechnete mittels wiederholter Wurzel-Ausziehungen die Zahl π Anfangs bis auf 20, nachher bis auf 32 Decimal-Bruchstellen, weshalb der als Decimalbruch ausgedrückte Näherungswerth dieser Zahl auch wohl die Ludolph'sche Zahl heißt.

In neueren Zeiten hat man durch die Hülfsmittel der Analysis weit kürzere Wege gefunden, die Zahl π bis auf einen hohen Grad von Genauigkeit zu berechnen und zuletzt die Annäherung an den wahren Werth, der, wie sich beweisen läßt, irrational ist, bis auf 500 Decimalstellen getrieben. S. Richter in Grunerts Archiv, Thl. XXV, S. 472.

Da bei Kreisrechnungen die Multiplication und Division mit π beständig vorkommt, so ist es bequem, eine Tafel der acht ersten vielfachen von π und von $\frac{1}{\pi}$ vor Augen zu haben, durch deren Benutzung die Rechnung bedeutend erleichtert und sicherer gemacht wird. Hier ist sie:

Vielfache von π.			Vielfache von $\frac{1}{\pi}$.		
1	3.14159 265359	—	1	0.31830 98862	—
2	6.28318 53072	—	2	0.63661 97724	—
3	9.42477 79608	—	3	0.95492 965855	+
4	12.56637 06144	—	4	1.27323 95447	+
5	15.70796 32679	+	5	1.59154 94309	+
6	18.84955 59215	+	6	1.90985 93171	+
7	21.99114 85751	+	7	2.22816 92033	—
8	25.13279 12287	+	8	2.54647 90895	—
9	28.27433 38823	+	9	2.86478 89757	—

Es ist $\pi^2 = 9{,}8696044$, $\frac{1}{\pi^2} = 0{,}1013212$, $\sqrt{\pi} = 1{,}7724538\ldots$

$\pi^3 = 31{,}00627668$, $\pi^4 = 97{,}409091$, $\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}5641896\ldots$

$\log \pi = 0{,}49714987\ldots$ $\log \frac{1}{\pi} = 0{,}50285013 - 1$.

39. Die Kenntniß der Zahl π setzt in den Stand, folgende Aufgaben zu lösen:

A. **Aus dem Halbmesser des Kreises Umfang und Inhalt desselben zu berechnen.**

Ist der Radius r, so ist der Umfang $p = 2\pi r$, der Inhalt $c = \pi r^2$.

B. **Aus dem Umfange des Kreises Radius und Inhalt desselben zu finden.**

Bezeichnet p den Umfang, so ist der Radius $r = \frac{p}{2\pi}$, der Inhalt $c = \frac{p^2}{4\pi}$.

C. **Aus dem Inhalte des Kreises Radius und Umfang desselben zu bestimmen.**

Die dazu dienenden Formeln sind $r = \sqrt{\frac{c}{\pi}}$, $p = 2\sqrt{\pi c}$.

Anm. Ist der Inhalt $= 1$, so ist der Radius $= \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}56419$, beinahe $= \frac{9}{16}$, genauer $= \frac{22}{39}$.

D. **Die Seite eines Quadrats anzugeben, welches einem gegebenen Kreise nahe gleich kommt.**

Hat der Kreis den Radius r, so muß die Seite des Quadrats $= r\sqrt{\pi} = 1{,}77245..r$, fast $\frac{8}{9}$, oder genauer $\frac{39}{44}$ des Durchmessers sein.

E. **Die Länge eines in Graden, Minuten u. s. w. ausgedrückten Bogens zu finden.**

Hält der Bogen n Grade, deren 360 auf die ganze Peripherie gehen, so ist seine Länge $a = \frac{n}{180}\pi r$, und wenn $r = 1$, $a = \frac{n\pi}{180}$, daher $1^0 = 0{,}01745329...$, $1' = 0{,}000290888...$, $1'' = 0{,}000004848....$

Zur leichtern Verwandlung einer beliebigen Anzahl von Graden, Minuten und Secunden in Bogen mit dem Radius 1 dient die folgende Tabelle der Vielfachen von 1^0, $1'$ und $1''$

	1°	1′	1″
1	0,01745329	0,00029089	0,00000485
2	0,03490659	0,00058178	0,00000970
3	0,05235988	0,00087266	0,00001454
4	0,06981317	0,00116355	0,00001939
5	0,08726646	0,00145444	0,00002424
6	0,10471976	0,00174533	0,00002909
7	0,12217305	0,00203622	0,00003394
8	0,13962634	0,00261799	0,00003878
9	0,15707963	0,00290888	0,00004363

F. Aus der Länge eines Bogens die Zahl der Grade zu bestimmen, die er hält.

Diese ist $n = \frac{a}{\pi r} 180^0$, und wenn $r = 1$, $n = \frac{180 a^0}{\pi}$.

G. Den Bogen zu finden, der dem Radius gleich ist.

Derselbe ist in jedem Kreise $= \frac{180^0}{\pi} = 57^0{,}2957795 \ldots$ $57^0\, 17'\, 44''{,}8$.

Anm. Nimmt man den πten Theil von 180^0 zur Winkel-Einheit, so wird jeder Winkel durch dieselbe Zahl ausgedrückt, wie der mit dem Radius 1 zwischen seinen Schenkeln beschriebene Bogen.

H. Den Inhalt eines Kreissectors s zu finden, dessen Bogen n Grade enthält.

Dieser Inhalt ist $s = \frac{n}{360} \pi r^2$.

I. Umgekehrt: Aus dem Inhalte des Sectors den Winkel desselben zu bestimmen.

Als Formel dazu ergiebt sich $n = \frac{360 s}{\pi r^2}$.

K. Aus dem Inhalte eines Sectors und dem Winkel am Mittelpunkte den Radius zu finden.

Dieser ist $r = \sqrt{\frac{360 s}{n \pi}}$.

40. Quadratur des Kreises. Die Aufgabe, ein Quadrat zu machen, welches einem gegebenen Kreise an Inhalt gleich kommt, oder die sogenannte Quadratur des Kreises, hat von je her die mathemati-

sche Forschbegierde beschäftigt und eine Menge stets erneuter Anstrengungen hervorgerufen, durch welche dieser Aufgabe eine gewisse Celebrität in der Geschichte der Wissenschaft erwachsen ist, größer, als sie es ihrem Gegenstande nach verdient. Es hat damit folgende Bewandtniß:

Da jeder Kreis so groß als ein Rechteck ist, dessen Grundlinie dem halben Umfange und dessen Höhe dem Radius gleich kommt, jedes Rechteck aber (IV. 25) in ein Quadrat verwandelt werden kann, so kommt es bei der Quadratur des Kreises zunächst auf die Rectification seines Umfanges, d. h. auf die Darstellung einer geraden Linie an, welche diesem Umfange an Länge gleich ist. Verlangt man nun eine geometrische Construction, welche mittels Beschreibung von geraden Linien, Kreisen oder sonstigen algebraischen Curven eine Gerade liefern soll, die dem Kreisumfange an Länge völlig gleich kommt, so ist die Erfüllung dieser Forderung unmöglich und jeder Versuch zur Quadratur des Kreises in diesem Sinne also vergeblich. — Verlangt man aber nur eine gerade Linie, die dem Umfange, oder ein Quadrat, das dem Kreise zwar nicht völlig, doch so nahe gleich ist, daß der Unterschied des einen und andern kleiner als irgend ein aliquoter Theil derselben, überhaupt kleiner als irgend eine beliebige, aber gegebene Größe bleibt, so ist diese Aufgabe durch die berechneten Näherungswerthe der Zahl π längst und für jedes Bedürfniß hinreichend gelöst. Um nämlich eine gerade Linie zu erhalten, die dem Kreisumfange so nahe kommt, daß beide um weniger als eine gegebene Länge l verschieden sind, braucht man nur ein Vielfaches von l zu suchen, welches entweder den Durchmesser $2r$ erreicht oder ihn übertrifft. Es sei $nl =$ oder $> 2r$, m aber eine ganze Zahl zunächst unter $n\pi$, so daß $m + 1 > n\pi > m$, dann wird sowohl $\frac{m+1}{n}$ als $\frac{m}{n}$ des Durchmessers um weniger als $\frac{1}{n}$ desselben und um so mehr um weniger als l von der Peripherie verschieden sein. Eben so: soll ein Quadrat gemacht werden, das einen gegebenen Kreis um weniger als eine gegebene Fläche q übertrifft oder davon übertroffen wird, so hat man nur ein Vielfaches von q zu suchen, das entweder $=$ oder $> r^2$ ist. Es sei $nq =$ oder $> r^2$. Nimmt man nun die zunächst unter $n\pi$ liegende ganze Zahl m, so daß $m + 1 > n\pi > m$, und sucht ein Quadrat, das sich zu r^2 wie $m + 1$ oder wie m zu n verhält, so leistet dieses Quadrat das verlangte; denn

der Unterschied zwischen $\frac{m+1}{n}r^2$ und πr^2 so wie der zwischen πr^2 und $\frac{m}{n}r^2$ ist kleiner als $\frac{1}{n}r^2$, also auch um so mehr kleiner als q.

Auch durch geometrische Construction kann man leicht eine gerade Linie finden, die der Peripherie sehr nahe kommt. Eine der einfachsten und in praktischen Fällen stets genügende ist die, daß man zum dreifachen Durchmesser den fünften Theil der Sehne des Quadranten addirt. Eine andere besteht darin, daß man in den zwei Endpunkten eines Durchmessers nach einer Seite desselben hin Perpendikel auf diesem errichtet, das eine dem dreifachen Radius, das andere der halben Seite des umschriebenen Sechsecks gleich; die gerade Linie, welche die Endpunkte dieser Perpendikel verbindet, wird nahe der halben Peripherie gleich sein. Um welchen Theil des Durchmessers und um welchen Theil der Peripherie geben beide Constructionen die Länge der letzteren zu groß oder zu klein?

Zweiter Theil

der

Planimetrie.

Erweiterungen der Elemente und fortgesetzte Uebungen in der geometrischen Construction.

Unter den in dem folgenden Theile enthaltenen Aufgaben und Lehrsätzen sind viele enthalten, die vorzugsweise als solche zu betrachten sind, wodurch das in den sechs Capiteln des ersten Theiles enthaltene System seine Ergänzung und Erweiterung erhält. Um die Heraushebung und Uebersicht derselben zu erleichtern, sind dieselben mit einem vorgesetzten * bezeichnet.

VII. Capitel.

Uebungs-Aufgaben und Sätze als Anwendungen der sechs ersten Capitel.

Erster Abschnitt.

Anwendungen des ersten Capitels.

1. Wie viel beträgt jeder Winkel eines Dreiecks, eines Vierecks, eines Fünfecks u. s. w., wenn sämmtliche Winkel der Figur einander gleich sind?

2. Satz. Die Summe der fünf hohlen Winkel A, B, C, D, E des untenstehenden Sternfünfecks (Pentagramm genannt) beträgt 2 Rechte;

Fig. 224.

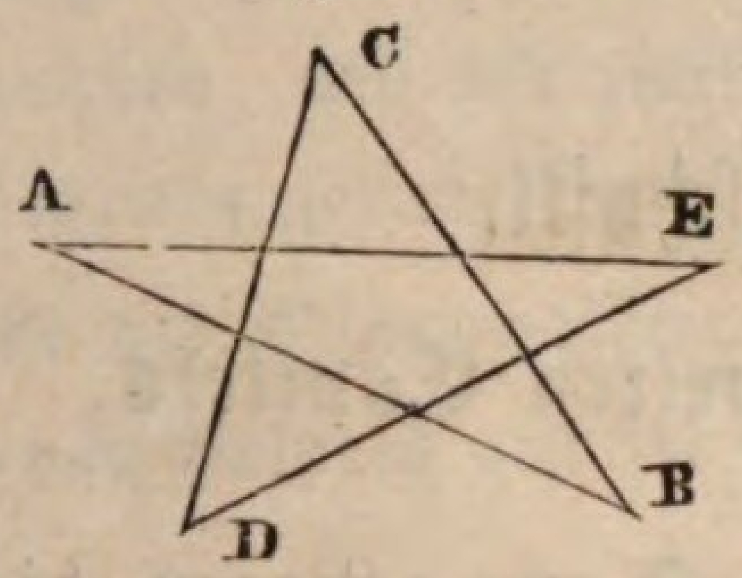
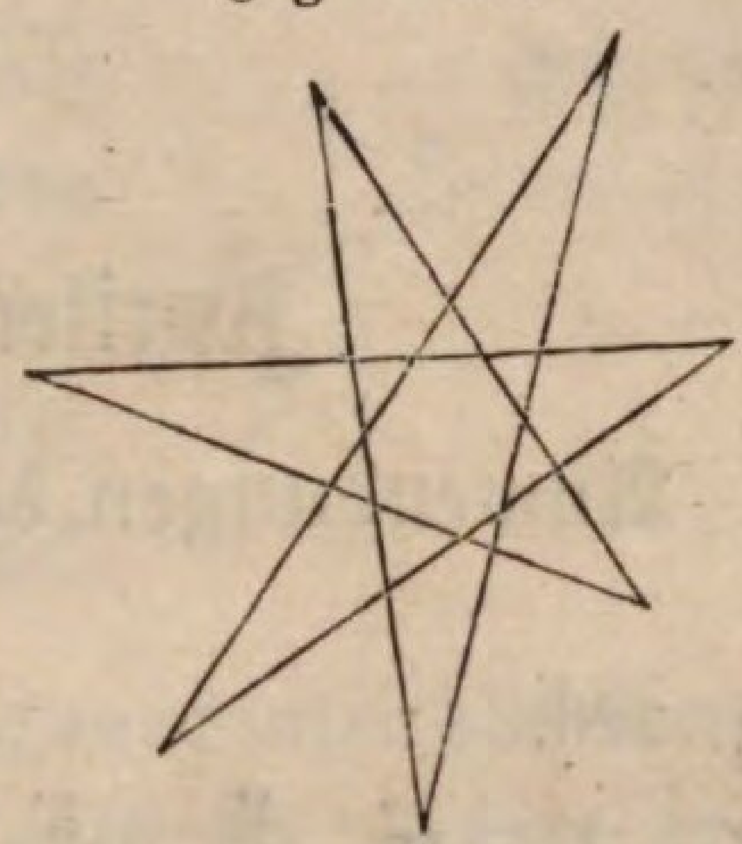


Fig. 225.



eben so beträgt die Summe der 7 hohlen Winkel der zweiten Figur des Sternsiebenecks (Heptagramm) 2 Rechte.

Der Beweis wird entweder dadurch geführt, daß man zuerst die Summe der beiden Winkel A und B bestimmt (I. 27, 2. Zusatz), hierzu den Winkel C addirt (nach demselben Satze) u. s. w., oder indem man in ähnlicher Weise verfährt, wie bei dem zweiten Beweise des Satzes I. 29.

3. Satz. Liegen an einer Seite eines Dreiecks zwei gleiche Winkel, so steht die Halbirungslinie des dritten Winkels auf dieser Seite senkrecht.

4. Wenn zwei Winkel eines Dreiecks zusammen so groß sind, als der dritte Winkel, wie groß ist alsdann der dritte Winkel?

5. Zwei Winkel eines Dreiecks mögen einander gleich sein, der dritte aber die Hälfte eines jeden dieser Winkel. Wie viel in Theilen eines rechten Winkels beträgt nun jeder der drei Winkel des Dreiecks?

6. Es sollen die Vierecke in Hinsicht der Anzahl der in denselben möglicher Weise vorkommenden a) rechten, b) spitzen, c) stumpfen, d) erhabenen Winkel geordnet werden.

Die Anzahl der Vierecke ist 10, wenn unter den erhabenen Winkeln kein Unterschied gemacht wird. Mit Rücksicht auf einen Unterschied derselben, je nachdem sie $>$ $=$ oder $<$ $2R$ sind, ist die Zahl der Vierecke 12.

7. Satz. Die halbe Summe und halbe Differenz zweier geraden Linien oder Winkel geben zu einander addirt die größere der beiden Linien oder Winkel; von einander abgezogen, geben sie die kleinere Linie oder den kleineren Winkel zum Reste.

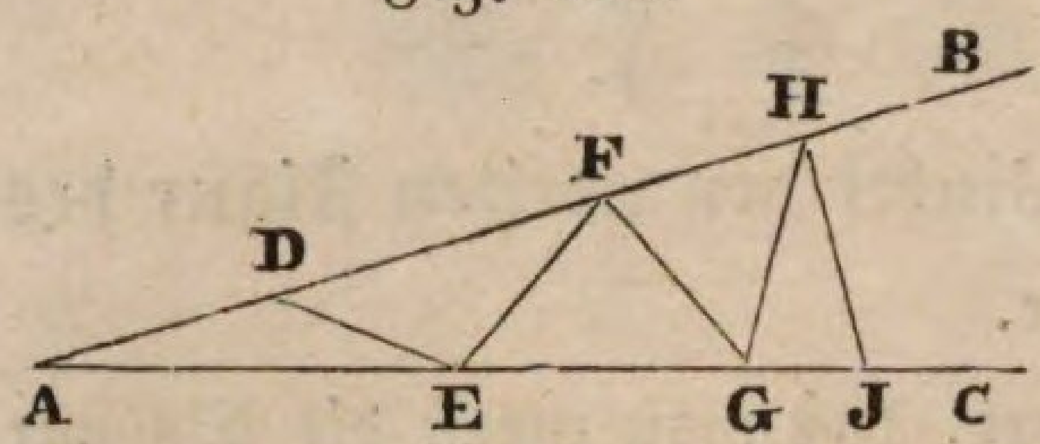
Der Satz gilt zwar von Größen überhaupt und wird als solcher durch die Formeln: $\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b) = a$, und $\frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b) = b$

ausgedrückt; ist aber hier durch geometrische Construction speciell von Linien und Winkeln zu beweisen.

Zweiter Abschnitt.

Anwendungen des zweiten Capitels.

Fig. 226.



8. Satz. Liegen die Punkte D, E, F, G, H, I abwechselnd auf den Schenkeln BA und AC eines Winkels BAC, und ist $AD = DE = EF = FG = GH = HI$, so ist 1) $\sphericalangle FDE = 2A$, 2) $\sphericalangle FEG = 3A$, 3) $\sphericalangle GFH = 4A$, 4) $\sphericalangle HGI = 5A$, 5) $\sphericalangle IHB = 6A$.

Der Beweis ist auf II. 2 und I. 27, 2 zu stützen.

9. Satz. Ergänzen sich in zwei gleichschenkeligen Dreiecken die Winkel an der Spitze zu 2 Rechten, so ergänzen sich die Winkel an der Grundlinie zu 1 Rechten.

Der Beweis stützt sich auf II. 2 und I. 27.

* 10. Satz. Im gleichschenkeligen Dreiecke sind die aus den Endpunkten der Basis auf die gleichen Schenkel gefällten Senkrechten einander gleich und umgekehrt.

Auf II. 9, Zus. 1, zu gründen. Es mögen hierbei die drei Fälle unterschieden werden, wo das Dreieck ein spitz-, recht- oder stumpfwinkeliges ist.

* 11. Im gleichschenkeligen Dreiecke sind die gleiche Winkel halbirenden Linien einander gleich.

Der Beweis ist auf II. 2 und II. 9 zu gründen.

Bemerkung. Die Umkehrung dieses Satzes, deren Beweis einige Schwierigkeiten verursacht, soll später (VIII. 52) betrachtet werden.

12. Satz. Zieht man aus einem beliebigen Punkte der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks Parallelen mit den Schenkeln bis zu diesen, so ist die Summe derselben einem der gleichen Schenkel des Dreiecks gleich.

Leicht.

Zusatz. Nimmt man den Punkt auf der Verlängerung der Grundlinie so gilt der Satz für die Differenz der Parallelen.

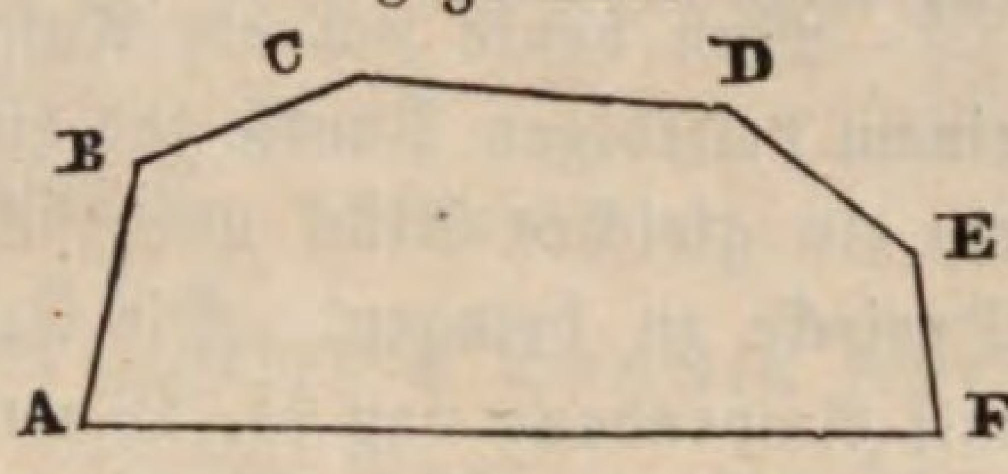
13ᵃ. Satz. In jedem Vierecke ist die Summe zweier gegenüberstehenden Seiten kleiner als die Summe der Diagonalen.

Beweis leicht.

13ᵇ. Satz. Jede gebrochene Linie *ABCDEF* ist größer, als die zwischen den Endpunkten liegende gerade Linie *AF*.

Man ziehe die Diagonalen *AC*, *AD*, *AE* und führe den Beweis auf II. 6 zurück.

Fig. 227.



*14. Haben zwei convexe gebrochene Linien dieselben Endpunkte, und umschließt die eine die andere, so ist die äußere größer als die innere.

Eine gegebene Linie ist convex, wenn sie der ihre Endpunkte verbindenden Linie nur hohle Winkel zukehrt. Eine convexe Linie liegt immer auf einer Seite einer jeden der geraden Linien, woraus sie besteht; auch kann sie von einer anderen beliebigen Geraden nur in zwei Punkten getroffen werden.

Der Satz ist in ähnlicher Art zu beweisen, wie II. 6, Zusatz.

15. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche zwei gegebene Parallellinien so schneidet, daß das begränzte Stück dieser Linie einer gegebenen Linie gleich werde.

Die Construction ist auf II. 32 zu gründen.

16. Zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels eine gerade Linie zu legen, gleich und parallel einer gegebenen geraden Linie.

Die Construction ist auf II. 32 zu stützen.

17. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche zwei andere gegebene, nicht parallele gerade Linien unter gleichen Winkeln trifft.

Die Aufgabe läßt verschiedene Arten der Lösung zu, welche sich auf die Eigenschaften der Parallellinien und des gleichschenkeligen Dreiecks stützen. Eine besondere Lösung erhält man, wenn man die Lage untersucht, welche die verlangte Linie gegen die Halbirungslinien der Winkel der gegebenen Geraden hat.

1. Bemerk. Es ist nachzuweisen, daß jede Lösung zwei gerade Linien zuläßt, welche beide der Aufgabe Genüge leisten. Welchen Winkel machen diese Linien mit einander?

2. Bemerk. Die Aufgabe: „Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche auf zwei anderen gegebenen geraden Linien gleiche, vom Durchschnittspunkte an gerechnete Stücke abschneide," reducirt sich sofort auf die vorige.

18. Aufgabe. Durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkels gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß die Theile derselben zwischen dem Punkte und den Schenkeln des Winkels einander gleich sind.

Man denke sich die Aufgabe gelöst, verbinde den gegebenen Punkt mit einem beliebigen Punkte des einen Schenkels, verlängere die Verbindungslinie um ein gleiches Stück und suche die Stücke der gesuchten Linie in congruente Dreiecke zu bringen. Die Construction dieser congruenten Dreiecke geschieht mit Anwendung von II. 18 und II. 8.

Eine zweite Construction, welche sich auf die erste zurückführen läßt, ergibt sich durch Anwendung von II. 36; eine dritte durch Anwendung von II. 44, eine vierte durch Anwendung von II. 45, Zus.

19. Aufgabe. Von einem außerhalb zweier sich schneidenden Linien gegebenen Punkte eine gerade Linie an einen Punkt der einen Linie zu ziehen, welche durch die andere Linie halbirt wird.

Man betrachte die Aufgabe als gelöst und ziehe entweder 1) mit der ersteren der durchschneidenden Linien eine Parallele und suche die hierdurch entstehenden Dreiecke congruent zu machen, oder ziehe 2) mit der anderen der durchschneidenden Linien eine Parallele und suche II. 44 in Anwendung zu bringen, oder 3) verbinde man den gegebenen Punkt mit dem Durchschnittspunkte der beiden gegebenen Geraden und suche ebenfalls auf II. 44 sich zu stützen.

20. Aufgabe. Mit der Grundlinie eines Dreiecks eine Parallele zu legen, welche der Summe der auf den beiden anderen Seiten des Dreiecks an der Grundlinie liegenden Abschnitte gleich ist.

Denkt man sich die Aufgabe als gelöst und theilt man die zu suchende Parallele in zwei Stücke, welche bezüglich den anliegenden Segmenten der beiden Seiten des Dreiecks gleich sind, so stützt sich, wenn man den Theilungspunkt mit den Endpunkten der Grundlinie verbindet, die Auflösung auf I. 21, II. 2. 22 und 18. — Die Aufgabe läßt sich erweitern, wenn die Parallele außerhalb des Dreiecks gezogen wird.

21. Aufgabe. Mit der Grundlinie eines Dreiecks eine Parallele zu legen, welche der Differenz der auf den beiden anderen Seiten an der Grundlinie liegenden Abschnitte gleich ist.

Die Construction ist der in 20 ähnlich.

22. Aufgabe. Eine gerade Linie XY so zu ziehen, daß sie einer gegebenen Linie MN parallel ist, und daß die Summe der aus zwei gegebenen Punkten A und B auf sie gefällten Perpendikel einer gegebenen Linie s gleich werde.

Die Auflösung ist auf II. 48, Zus. 1, zu stützen. — Wie ist die Bedingniß der Aufgabe umzuändern, wenn die gesuchte Linie zwischen *A* und *B* fällt?

23. Aufgabe. Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

Die Construction gründet sich auf II. 2, Zusatz 2.

24. Aufgabe. Durch einen von drei gegebenen Punkten eine gerade Linie zu ziehen, die von den beiden anderen Punkten gleichen Abstand hat.

Die Aufgabe gestattet zwei Lösungen, je nachdem die beiden Punkte auf derselben Seite der zu construirenden Linie zu liegen kommen, oder auf verschiedenen Seiten. Im ersteren Falle wird II. 34, im zweiten aber die Congruenz zweier Dreiecke in Anwendung gebracht. — Wie ist die Lösung der Aufgabe, wenn alle drei Punkte in gerader Linie liegen, und wie, wenn der erstere Punkt dabei in der Mitte zwischen den beiden anderen liegt?

25. Aufgabe. Drei nicht in gerader Linie liegende Punkte *A*, *B*, *C* sind gegeben. Durch einen derselben, z. B. *A*, eine gerade Linie zu ziehen, daß *A* auf ihr gleich weit von den Projectionen der beiden anderen Punkte absteht.

Die Lösung der Aufgabe ist leicht.

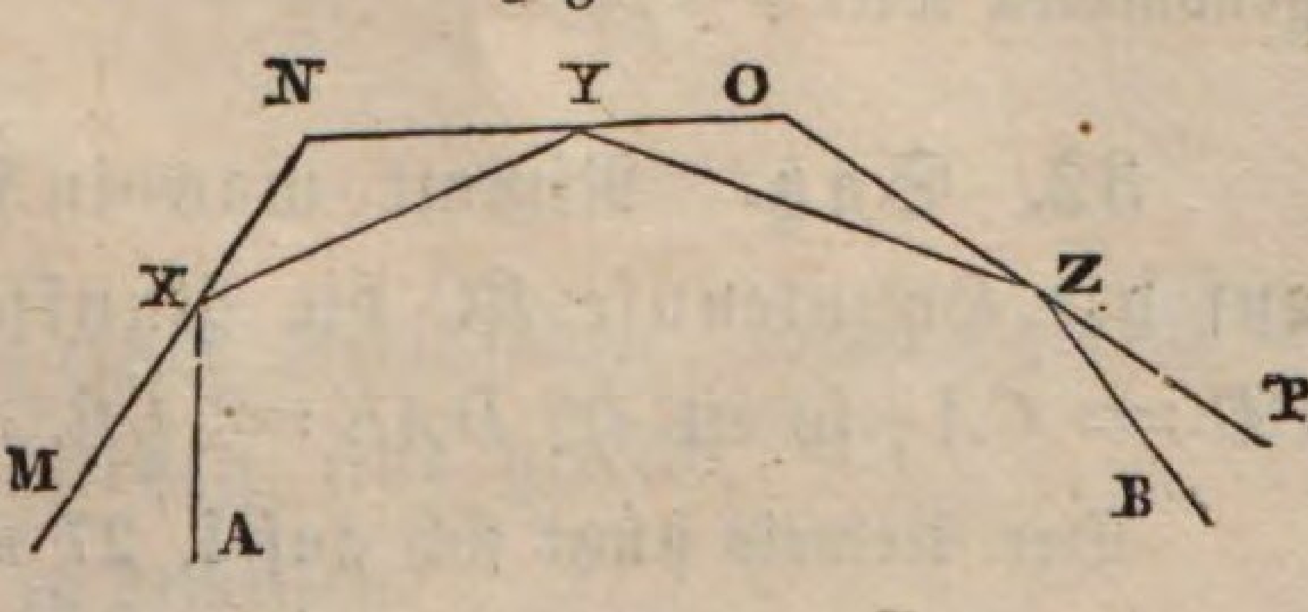
***26. Aufgabe.** Auf einer gegebenen geraden Linie *MN* einen Punkt *X* zu bestimmen, dessen Verbindungslinien mit zwei außerhalb *MN* gegebenen Punkten *A* und *B* gleiche Winkel mit *MN* machen.

Denkt man sich die Aufgabe gelöst und fällt von dem Punkte *A* auf *MN* eine Senkrechte *AC* bis zum Durchschnitte *E* mit der verlängerten *BX*, so läßt sich die Congruenz der beiden Dreiecke *AXC* und *CXE* nachweisen. Die Construction ergiebt sich hiernach leicht.

Bemerk. Man untersuche sowohl den Fall, wo die Punkte *A* und *B* auf derselben Seite der *MN*, als auf entgegengesetzter Seite der *MN* liegen.

27. Es sei die gebrochene Linie *MNOP*, und außerhalb derselben seien die beiden Punkte *A* und *B* gegeben; es sollen drei Punkte *X*, *Y*, *Z* auf den Linien *MN*, *NO*, *OP* gesucht werden, so daß 1) ∢ *MXA* = ∢ *NXY*, 2) ∢ *NYX* = ∢ *OYZ*, 3) ∢ *OZY* = ∢ *PZB* wird.

Fig. 228.



Die Construction dieser Aufgabe gründet sich auf die der vorhergehenden.

28. Satz. Nimmt man auf den beiden gegenüber stehenden Seiten *AB*, *CD* eines Parallelogramms *ABCD* zwei gleiche Stücke *AM* und *CO*, und auf den anderen gegenüber stehenden Seiten die gleichen Stücke *DP*, *BN* und verbindet die Punkte *O*, *P*, *M*, *N* folgeweise, so entsteht wieder ein Parallelogramm.

Der Beweis stützt sich auf Congruenz der Dreiecke und auf II. 33. — Warum haben die Parallelogramme *ABCD* und *PONM* denselben Mittelpunkt? Können die Punkte *M*, *N*, *O*, *P* auch auf den Verlängerungen der Seiten des Parallelogramms genommen werden?

29. Satz. Nimmt man auf den Seiten *AB*, *BC*, *CD*, *DA* eines Quadrats *ABCD* bezüglich die Punkte *M*, *N*, *O*, *P*, so daß $AM = BN = CO = DP$, und verbindet die Punkte *M*, *N*, *O*, *P* folgeweise, so ist *MNOP* wieder ein Quadrat.

Leicht.

30. Satz. Verkürzt man eine der gleichen Seiten eines gleichschenkeligen Dreiecks um eben so viel, als man die andere verlängert, und verbindet die neuen Endpunkte, so wird die Verbindungslinie von der Grundlinie halbirt.

Zum Beweise ziehe man durch einen der genannten Endpunkte eine Parallele mit dem gegenüber stehenden Schenkel des gleichschenkeligen Dreiecks und beweise die Congruenz der hierdurch entstehenden Dreiecke. Oder: Man fälle von beiden Endpunkten Senkrechte auf die Grundlinie des gleichschenkeligen Dreiecks und beweise die Congruenz der hierdurch entstehenden rechtwinkeligen Dreiecke.

31. Satz. Zieht man von einem beliebigen Punkte der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks auf die Schenkel Lothe, so ist die Summe derselben gleich der zu einem Schenkel gehörigen Höhe.

Zum Beweise ziehe man durch den Punkt der Grundlinie mit demjenigen Schenkel, worauf die Höhe genommen ist, eine Parallele und stütze den Satz auf VII. 10. — Wie heißt der Satz, wenn der Punkt auf der Verlängerung genommen wird?

32. Satz. Nimmt man in einem rechtwinkeligen Dreiecke *BAC* auf der Hypotenuse *BC* die Punkte *E* und *D* so, daß $BE = BA$ und $CD = CA$, so ist $\sphericalangle\, DAE = \frac{1}{2}R$.

Der Beweis stützt sich auf I. 27 und II. 2.

33. Satz. Der Winkel, den die Halbirungslinie eines Dreieckswinkels mit dem durch die Spitze dieses Winkels gehenden Höhenper-

pendikel macht, ist dem halben Unterschiede der beiden anderen Winkel des Dreiecks gleich.

Man beweise zuerst mit Hülfe von I. 27, 1. Zusatz, daß die Differenz der durch das Höhenperpendikel gebildeten Winkel an der Spitze gleich ist der Differenz der Winkel an der Grundlinie, woraus sich alsdann die Behauptung leicht ableiten läßt; oder man bilde die Differenz der Winkel nach II. 3, Zusatz, und zeige mit Hülfe von I. 24, daß diese Differenz gleich ist dem durch das Höhenperpendikel und die Halbirungslinie gebildeten Winkel.

Dritter Abschnitt.

Anwendungen des dritten Capitels.

* 34. Aufgabe. Ueber einer der Lage nach gegebenen geraden Linie ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, so daß diese Linie Hypotenuse, eine andere von gegebener Länge Kathete wird.

Mit Hülfe von III. 19, Zusatz 1, zu lösen.

35. Aufgabe. Durch einen von drei gegebenen Punkten eine gerade Linie so zu ziehen, daß die aus den zwei anderen gegebenen Punkten darauf gefällten Perpendikel a) eine gegebene Differenz, b) eine gegebene Summe haben.

Auf die vorhergehende Aufgabe zurückzuführen.

36. Satz. Beschreibt man über zwei mit einem Ende an einander stoßende Linien als Durchmesser Kreise, so liegt deren Durchschnittspunkt mit den beiden anderen Endpunkten in gerader Linie.

Leicht.

37. Satz. Berühren zwei Kreise einander von Innen und ist ein Radius des einen Durchmesser des anderen Kreises, so wird jede durch den Berührungspunkt gezogene Sehne des ersteren vom Umfange des zweiten halbirt.

Stützt sich auf III. 19, Zusatz 1, und 13.

38. Satz. Perpendikel auf einer Kreissehne, welche gleich weit von den Endpunkten der Sehne abstehen, sind gleich.

Durch Congruenz der Dreiecke zu beweisen.

* 39. Satz. Schneiden zwei Sehnen sich innerhalb eines Kreises

oder treffen ihre Verlängerungen sich außerhalb, so ist ihr Durchschnittswinkel im ersten Falle der Summe, im zweiten Falle der Differenz derjenigen zwei Peripheriewinkel gleich, welche mit dem Durchschnittswinkel auf demselben Bogen stehen.

Der Beweis stützt sich auf I. 27, 2. Zusatz, und III. 20. — Wie groß ist die Summe oder Differenz der Bogen, wenn der Winkel, unter welchem sich die Sehnen treffen, ein Rechter ist?

40. Satz. Beschreibt man über einer geraden Linie zwei Kreissegmente, so schließen alle Peripheriewinkel des einen Segmentes oder deren Scheitelwinkel gleiche Bogen vom Umfange des zweiten Segmentes zwischen sich ein.

Der Satz stützt sich auf I. 27, 2. Zus., und III. 20, 1. Umkehrung.

41. Aufgabe. In einen Kreis eine Sehne zu legen gleich einer gegebenen Linie m und parallel einer anderen Linie AB.

Leicht.

42. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt A innerhalb eines Kreises eine Sehne XY zu legen, so daß die Differenz der Segmente $YA - AX$ einer gegebenen Linie gleich werde.

Eine Auflösung gründet sich auf VII. 7 und 34, eine zweite auf die Construction eines Dreiecks aus den drei Seiten, wenn man das Stück AX auf AY von Y aus abgetragen denkt. — Determination.

43. Aufgabe. Eine gerade Linie zu ziehen, welche mit dem einen Endpunkte an eine gegebene gerade Linie, mit dem anderen an die Peripherie eines gegebenen Kreises anstößt, und welche einer von zwei gegebenen Linien parallel, einer anderen gleich ist.

Die Auflösung ist auf II. 32 zu stützen. — Determination.

44. Aufgabe. Durch einen Punkt außerhalb eines Kreises eine Sekante an den Kreis zu ziehen, so daß das außerhalb des Kreises fallende Stück der Sekante dem innerhalb des Kreises fallenden Stücke gleich wird.

Ist mit Hülfe der Congruenz der Dreiecke auf mehrfache Weise zu lösen.

45. Aufgabe. Von einer der Lage nach gegebenen geraden Linie aus an einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen, deren Länge einer gegebenen Linie m gleich wird. — Leicht.

46. Aufgabe. In einen gegebenen Kreis eine Sehne XY zu

legen, parallel einer gegebenen Geraden *MN*, und die zugleich von einer der Lage nach gegebenen Sehne *AB* halbirt wird.

Auf III. 13 und I. 21, Zusatz 3, zu stützen.

47. Aufgabe. Durch einen Punkt *A* innerhalb oder außerhalb eines Kreises eine Gerade zu ziehen, deren in den Kreis fallender Theil *XY* a) von einer gegebenen Sehne, b) von einem gegebenen Kreisumfange halbirt wird.

Auf III. 13 und III. 19, Zusatz 1, zu gründen. — Determination.

48. Aufgabe. In einen gegebenen Kreis eine Sehne *XY* zu legen, parallel einer gegebenen Geraden *MN*, die zugleich von einem der Lage nach gegebenen zweiten Kreise halbirt wird.

Leicht.

*49. Satz. In jedem Vielecke von gerader Seitenzahl, durch dessen sämmtliche Ecken sich eine Kreisperipherie ziehen läßt, ist die Summe des ersten, dritten, fünften u. s. w. Winkels der Summe des zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Winkels gleich.

Man ziehe nach den Ecken Radien und benutze II. 2.

*50. Satz. In jedem Vielecke von gerader Seitenzahl, in welchem sich ein alle Seiten berührender Kreis einschreiben läßt, ist die Summe der 1., 2., 3. u. s. w. Seite der Summe der 2., 4., 6. u. s. w. Seite gleich.

Der Beweis stützt sich auf III. 17.

*51. Aufgabe. Zu drei gegebenen Punkten *A*, *B*, *C* einen vierten *X* zu finden, so daß die drei Verbindungslinien *AX*, *BX*, *CX* gegebene Winkel $AXB = \alpha$ und $AXC = \beta$ mit einander bilden. (Potenot'sche Aufgabe.)

Auf III. 36 zurückzuführen.

52. Aufgabe. Zu den drei gegebenen Punkten *A*, *B*, *C* einen vierten *X* zu finden, so daß die drei Verbindungslinien *AX*, *BX*, *CX* gleiche Winkel mit einander bilden.

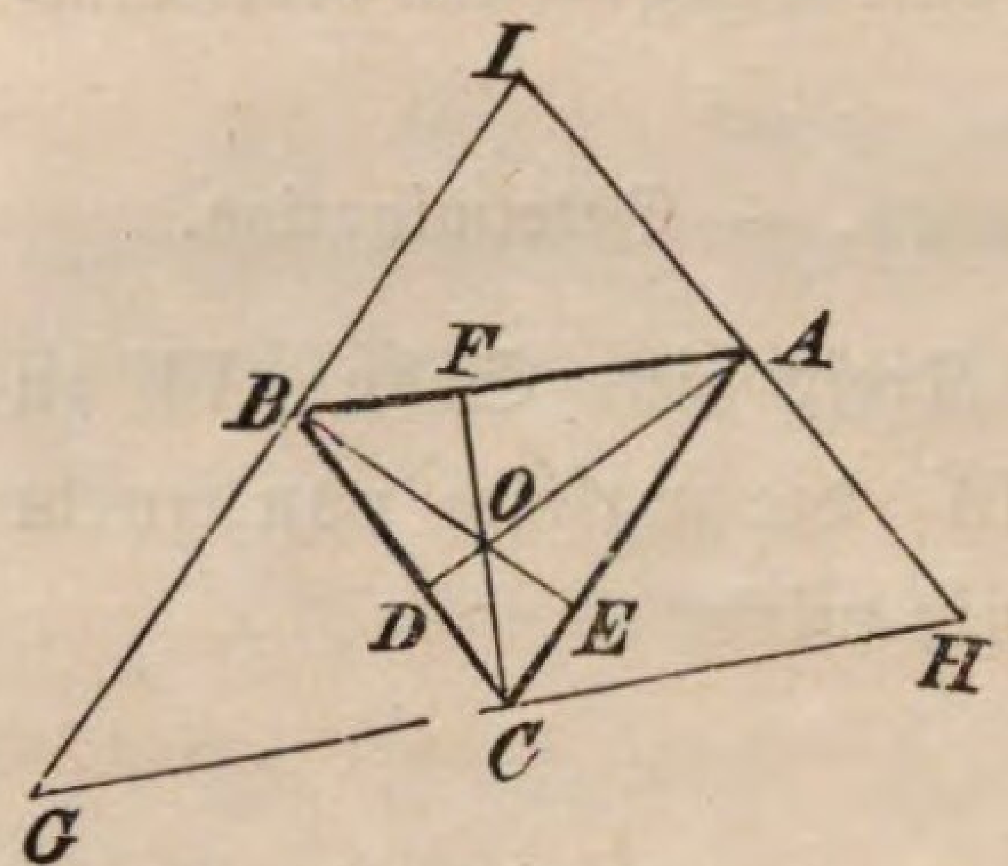
Auf die vorige Aufgabe zurückzuführen; auch mit Anwendung von III. 21 zu lösen, wenn man auf zwei Seiten des Dreiecks *ABC* nach außen zu gleichseitige Dreiecke errichtet und durch die Spitzen der Dreiecke Kreise zieht.

53. Aufgabe. Eine gerade Linie *MN* und zwei Punkte *A* und *B* außerhalb ihr seien gegeben. Man soll einen Punkt *X* in *MN* finden,

der so liegt, daß, verbindet man ihn mit *A* und *B*, die Winkel *AXM* und *BXN* einen gegebenen Unterschied *d* haben.

Man ziehe, wie in der ähnlichen Aufgabe 26 geschehen, von **B** eine Senkrechte **BC** auf die **MN**, verlängere **BC** um ein Stück **CD** = **CB** und verbinde **D** mit **X**. Die Aufgabe läßt sich alsdann auf III. 36 zurückführen.

Fig. 229.



54. Den Satz II. 52 mit Hülfe der Sätze von Peripheriewinkeln zu beweisen.

Man denke sich zwei der Senkrechten *AD*, *BE* gezogen und ihren Durchschnittspunkt *O* mit *C* verbunden. Es ist alsdann zu zeigen, daß die verlängerte **CO** auf *AB* senkrecht steht. Man ziehe über *BA* und **OC** als Durchmesser Kreise, ziehe noch *DE*, und zeige mittels III. 29, daß ∢ *BAD* = **OCD** sei, woraus sich alsdann leicht die Richtigkeit der Behauptung ergiebt.

55. Aufgabe. Auf der Verlängerung eines Kreisdurchmessers sei ein Punkt *A* gegeben. Zwischen *A* und dem Kreise einen anderen Punkt *X* zu finden, so daß die von *X* an den Kreis gelegte Tangente der Entfernung *XA* gleich werde.

Man denke sich die Aufgabe gelöst und suche die beiden gleichen Stücke in congruente Dreiecke zu bringen. Die Aufgabe läßt sich hiernach auf III. 34 zurückführen.

56. Aufgabe. In dem einen Endpunkte *A* einer geraden Linie *AB* eine Senkrechte auf derselben zu errichten, ohne jene Linie *AB* über diesen Endpunkt *A* hinaus zu verlängern.

Die Construction ist auf III. 19, Zusatz 1, zu gründen. Zu dem einen Endpunkte *A* der Linie und einem beliebigen anderen Punkte *B* derselben ist der Mittelpunkt des durch beide gehenden Kreises zu bestimmen u. s. w.

57. Aufgabe. Einen Kreis zu beschreiben, so daß, wenn man zwei gegebene gerade Linien als Sehnen einträgt, von den zugehörigen Bogen der eine doppelt so groß als der andere sei.

Man denke die Aufgabe gelöst und den Halbirungspunkt des größeren Bogens mit den Endpunkten der zugehörigen Sehne verbunden. Die Auflösung ergiebt sich hiernach leicht.

58. Aufgabe. Auf einer Kreisperipherie sind zwei Punkte *A* und *B* gegeben. Einen dritten Punkt *X* des Umfanges zu bestimmen, dessen Abstände von *A* und *B* eine gegebene Linie *s* zur Summe haben.

Denkt man sich die Aufgabe gelöst, und verlängert man *AX* um ein Stück

XD = *XB*, so ist *ADB* ein gegebener Winkel; die Aufgabe ist somit auf III. 36 zurückgeführt. — Wo liegt der Mittelpunkt des nach III. 36 zu construirenden Hülfskreises? — Determination. — Werden beide Bogen, zu denen *AB* als Sehne gehört, berücksichtigt, so giebt es im Allgemeinen vier Punkte von verlangter Eigenschaft; in besonderen Fällen giebt es drei, zwei Punkte, einen Punkt oder endlich gar keinen Punkt.

59. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt einen Kreis zu ziehen, der entweder a) eine gegebene gerade Linie, oder b) einen gegebenen Kreis jedesmal in einem gegebenen Punkte berührt.

Leicht.

60. Aufgabe. Gegeben ein Kreis und eine gerade Linie; es soll ein Kreis construirt werden, der beide berührt und entweder a) durch einen Punkt auf der geraden Linie, oder b) durch einen Punkt auf der Kreislinie geht.

Man denke sich die Aufgabe gelöst und suche den Punkt auf der Peripherie des gegebenen Kreises zu bestimmen, der mit den beiden Berührungspunkten, von welchen der eine oder der andere gegeben ist, in einer geraden Linie liegt.

61. Aufgabe. Einen Kreis zu ziehen, der zwei gegebene Kreise berührt, und zwar einen derselben in einem auf der Peripherie desselben gegebenen Punkte.

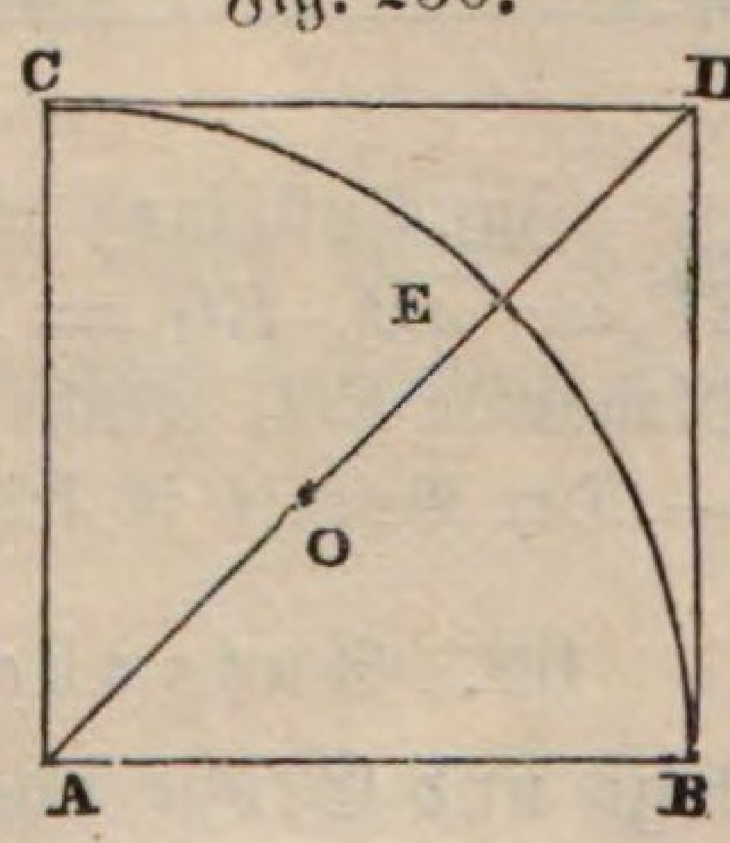
Man denke sich die Aufgabe gelöst und mit dem gesuchten Kreise einen concentrischen Kreis beschrieben, der durch den Mittelpunkt des zweiten Kreises geht. Mit Hülfe des letztern leicht zu construirenden Kreises läßt sich der erstere Kreis finden. Wie viele Kreise giebt es von der verlangten Eigenschaft?

62. Aufgabe. Um drei gegebene Punkte als Mittelpunkte Kreise zu beschreiben, die sich je zwei und zwei berühren.

Die Auflösung auf II. 51 zu stützen. Es giebt vier Systeme von Kreisen, welche der Aufgabe Genüge leisten.

63. Aufgabe. In einem gegebenen Quadranten einen Kreis zu beschreiben, der den Bogen und beide begrenzende Radien berührt.

Fig. 230.



Man denke sich die Aufgabe gelöst und verbinde den Berührungspunkt des Quadranten mit den beiden übrigen Berührungspunkten und untersuche dann, wo diese Verbindungslinien die verlängerten Halbmesser treffen. Die Construction ist hiernach leicht.

Eine zweite Lösung ergiebt sich, wenn man das Quadrat *ABDC* vollendet, die Diagonale *AD* zieht und *EO* = *ED* nimmt. Der Punkt *O* wird, wie sich leicht beweisen läßt, der Mittelpunkt des gesuchten Kreises sein.

Vierter Abschnitt.

Anwendungen des vierten Capitels.

64. Satz. Verbindet man einen Punkt innerhalb eines Parallelogramms mit den vier Ecken desselben, so ist die Summe je zweier gegenüber stehenden Dreiecke dem halben Parallelogramm an Inhalt gleich.

Leicht.

65[a]. Satz. Verbindet man in einem Paralleltrapeze die Endpunkte einer der nicht parallelen Seiten mit der Mitte der andern, so ist das von diesen Linien und der ersteren Seite begrenzte Dreieck die Hälfte des Paralleltrapezes.

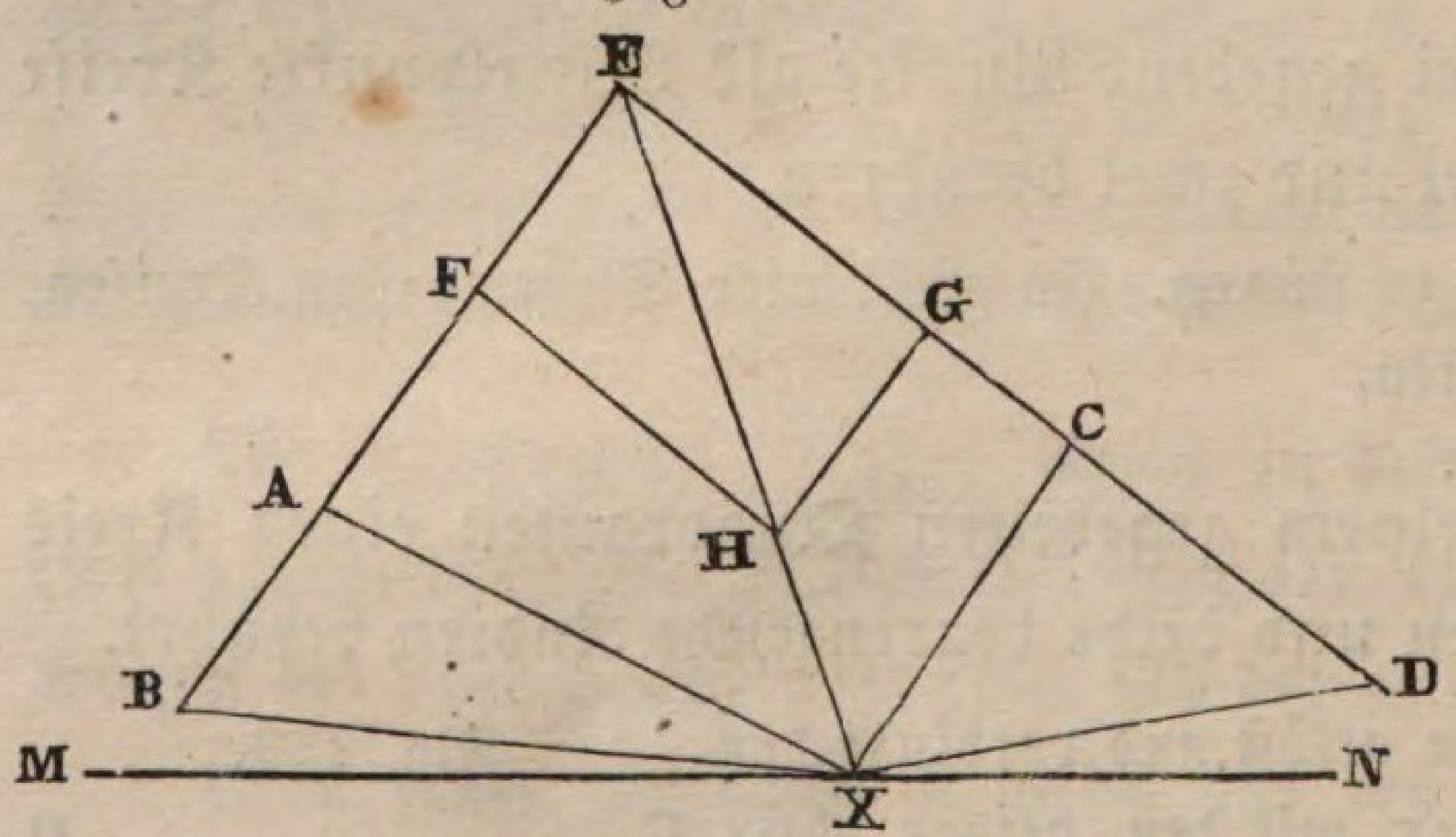
Zum Beweise vergleiche man die Summe der beiden äußeren Dreiecke mit dem Inhalte des ganzen Paralleltrapezes.

65[b]. Satz. Alle Vierecke, deren Diagonalen wechselseitig einander gleich sind, und wechselseitig gleiche Winkel bilden, sind einander gleich.

66. Aufgabe. Ein Dreieck *ABC* in ein anderes zu verwandeln, dessen Spitze in einem gegebenen Punkte *O* liegt und dessen Grundlinie der Lage nach bleibt.

Leicht.

Fig. 231.



67. Aufg. Gegeben seien zwei gerade Linien *AB*, *CD* der Lage und Größe nach; auf einer dritten der Lage nach gegebenen geraden Linie *MN* einen Punkt *X* so zu finden, daß die Dreiecke *XCD* und *XAB* einander gleich werden.

Zur Auflösung verlängere man *BA*, *DC* bis zum Durchschnitte *E*, mache *EF* = *AB*, *EG* = *CD*, vollende das Parallelogramm *EFHG* und ziehe die Diagonale *EH*, welche auf der gegebenen *MN* den gesuchten Punkt *X* bestimmt. — Der Beweis ist leicht.

68. Aufgabe. Es seien drei gerade Linien *AB*, *CD*, *EF* der Lage und Größe nach gegeben; es soll ein Punkt *X* außerhalb dieser

drei Linien gesucht werden, so daß die Dreiecke *XAB*, *XCD*, *XEF* einander gleich werden.

Die Auflösung ähnlich der der vorhergehenden Aufgabe.

69. Satz. Verbindet man die Halbirungspunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks mit einander, so ist das dadurch entstehende Viereck ein Parallelogramm und halb so groß als das ganze Viereck.

Der Beweis ist auf II. 45 zu stützen.

70. Satz. Halbirt man zwei Gegenseiten *AB*, *CD* eines beliebigen Vierecks *ABCD* in den Punkten *X* und *Y* und verbindet den Halbirungspunkt eines jeden mit den Endpunkten der gegenüber stehenden Seite, so sind die beiden hierdurch entstehenden Dreiecke zusammen so groß als das ganze Viereck.

Zum Beweise ziehe man von den Endpunkten einer der halbirten Seiten und dem Mittelpunkte derselben auf die gegenüber stehende Seite Perpendikel, und benutze diese Perpendikel zur Angabe des Inhaltes derjenigen Dreiecke, von welchen dieselben die Höhen sind. Mit Hülfe des Satzes II. 48, 1, ergiebt sich alsdann der Beweis des obigen Satzes.

71. Aufgabe. Zwischen den Endpunkten *A* und *B* einer gegebenen geraden Linie *AB* einen Punkt *X* zu finden, so daß $AX^2 - XB^2$ dem Quadrate einer gegebenen geraden Linie *m* gleich werde.

Man denke sich die Aufgabe gelöst, errichte auf *AB* in *B* eine Senkrechte $BC = m$, ziehe *XC*, wodurch $XC = XA$ wird. Die Auflösung der Aufgabe ist hiernach leicht.

Eine zweite Lösung ergiebt sich, wenn man mit Hülfe von IV. 7 die Differenz der Quadrate umformt, wodurch, um $AX - XB$ zu erhalten, die Aufgabe auf IV. 33 zurückgeführt wird. — Determination.

72. Aufgabe. Zwischen den Endpunkten einer gegebenen geraden Linie *AB* einen Punkt *X* zu finden, so daß $AX^2 + XB^2 = m^2$ wird.

Denkt man sich die Aufgabe gelöst und errichtet in *X* auf *AB* eine Senkrechte $XC = XB$, so ist 1) die Länge der Linie *AC*, und 2) die Lage der Linie *BC* bekannt. (II. 2. Zus. 3.) Der Punkt *C* sowohl als der Punkt *X* lassen sich hiernach leicht finden.

73. Satz. Durchschneiden die Diagonalen eines Vierecks sich rechtwinkelig, so sind die Quadratsummen der gegenüber stehenden Seiten einander gleich.

Leicht.

74. Satz. Durchschneiden sich in einem Kreise zwei Sehnen

rechtwinkelig, so ist die Quadratsumme der vier Segmente dieser Sehne gleich dem Quadrate des Durchmessers.

Stützt sich auf IV. 21 und VII. 39.

* 75. Satz. In jedem Paralleltrapeze ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über den nicht parallelen Seiten, vermehrt um das doppelte Rechteck aus den beiden parallelen Seiten.

Auf IV. 29 zu stützen.

76. Satz. In jedem Paralleltrapeze ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über den nicht parallelen Seiten, vermehrt um das doppelte Rechteck aus den beiden parallelen Seiten.

Auf IV. 26 und 27 zu stützen.

77. Satz. Wenn zwei einander schneidende Kreise von einer Geraden in den Punkten A, B, C, D, und ihre gemeinschaftliche Sehne in dem Punkte E geschnitten wird, so ist $EA \cdot EC = EB \cdot ED$.

Mit Hülfe von IV. 31, Zusatz, zu beweisen.

78. Satz. Verbindet man einen beliebigen Punkt O in der Ebene eines Parallelogramms $ABCD$ mit den Ecken desselben, so ist $\triangle\, AOC$ gleich der Differenz oder Summe der Dreiecke OAB und OAD oder OBC und OCD, je nachdem der Punkt O innerhalb des Winkels BAD und seines Scheitelwinkels oder in einem seiner beiden Nebenwinkel liegt.

Fünfter Abschnitt.

Anwendungen des fünften Capitels.

79. Aufgabe. Es seien zwei sich durchschneidende Gerade und ein Punkt in ihrer Ebene gegeben; durch diesen eine dritte gerade Linie so zu ziehen, daß a) die auf den gegebenen Linien dadurch abgeschnittenen Stücke, b) die auf der gesuchten Linie sich bildenden Segmente zwischen dem gegebenen Punkte und der gegebenen Linie in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Mit Hülfe von V. 37 zu lösen.

80. Es seien drei Punkte A, B, C gegeben; durch einen derselben, etwa C, eine gerade Linie zu ziehen, so daß die von den beiden anderen Punkten auf dieselbe gefällten Perpendikel AX und BY in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Erweiterung der Aufgabe 24. Auflösung leicht.

81. Drei nicht in gerader Linie liegende Punkte A, B, C sind gegeben; durch einen derselben, etwa A, eine gerade Linie so zu ziehen, daß das Verhältniß der Abstände des Punktes A von den beiden Projectionen X und Y der beiden anderen Punkte einem gegebenen Verhältnisse $m : n$ gleich werde.

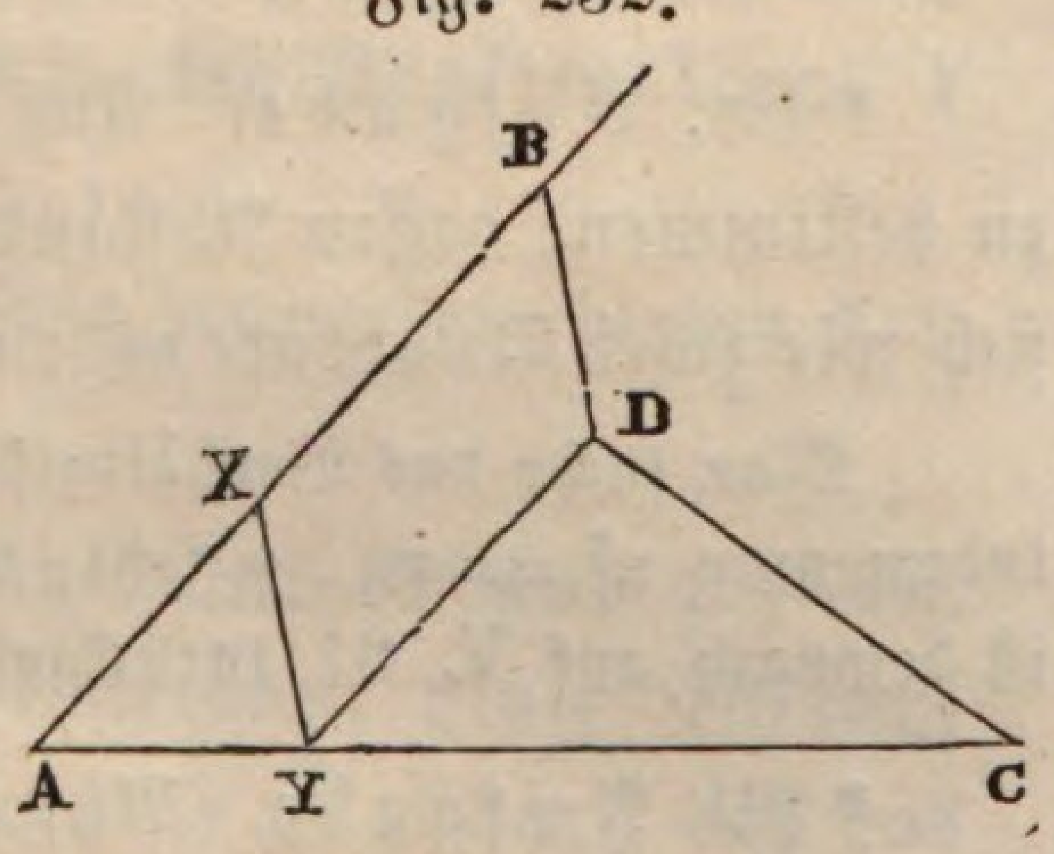
Erweiterung der Aufgabe 25.

82. Satz. Haben zwei Dreiecke gemeinschaftliche Grundlinie und liegen sie zwischen denselben Parallelen, so sind diejenigen Stücke einer mit der gemeinschaftlichen Grundlinie parallel gezogenen Geraden, welche innerhalb beider Dreiecke liegen, einander gleich.

Mit Hülfe von V. 39 zu beweisen.

83. Satz. Von zwei der Länge nach gegebenen geraden Linien zwei Stücke abzuschneiden, so daß diese Stücke ein gegebenes Verhältniß $m : n$, und die Reste ein anderes gegebenes Verhältniß $p : q$ zu einander haben.

Fig. 232.



Analysis 1) Die beiden gegebenen Linien AB und AC seien unter einem beliebigen Winkel BAC an einander gelegt; X und Y seien die verlangten Theilpunkte, so daß $AX : AY = m : n$, $BX : YC = p : q$. Man ziehe XY und vollende das Parallelogramm $BXYD$ und ziehe DC. Es läßt sich leicht nachweisen, daß sowohl die Linie BD der Lage nach bekannt ist, weil sie der XY parallel ist, als auch die DC, weil das $\triangle\ YDC$ der Art nach bekannt ist. Die Construction ist hiernach leicht auszuführen.

Eine zweite Lösung läßt sich, wenn man die beiden gegebenen Linien einander parallel legt, auf V. 39 gründen mit Anwendung der Aufgabe V. 61.

84. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt A eine gerade Linie $AXYZ$ zu ziehen, daß die Stücke XY, YZ, welche zwischen drei in E sich treffende gerade Linien EB, EC, ED fallen, sich wie $m:n$ verhalten.

Auf V. 40 und 37 zu stützen.

* 85. Aufgabe. Aus einem gegebenen Punkte A außerhalb eines Kreises eine Sekante AY an denselben zu legen, die zu ihrem äußeren Abschnitte AX in einem gegebenen Verhältnisse $m : n$ steht.

Auf V. 65 zurückzuführen.

2. Lösung. Man verbinde die Punkte X und Y mit dem Mittelpunkte C des Kreises und ziehe durch den gegebenen Punkt A mit dem Radius XC eine Parallele AN bis zum Durchschnitte N mit der verlängerten YC. Mit Hülfe von V. 61 lassen sich NY und NC bestimmen und hieraus das $\triangle NAC$ finden.

Zusatz. Die Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt A innerhalb eines Kreises eine Sehne XY zu ziehen, deren Theile AY und AX sich wie $m : n$ verhalten, ist der obigen ganz ähnlich.

86. Aufgabe. Es seien zwei concentrische Kreise gegeben; durch einen gegebenen Punkt des inneren Kreisumfangs eine Linie zu legen, so daß die Sehnen der beiden Kreise in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Die Aufgabe ist auf die vorhergehende zurückzuführen.

87. Satz. Zieht man durch einen Punkt innerhalb eines beliebigen Parallelogramms zwei Parallelen mit den Seiten, so entstehen vier Parallelogramme. Die Diagonalen zweier gegenüber liegenden derselben treffen mit der zwischen ihnen liegenden Diagonale des ersteren Parallelogramms in einem Punkte zusammen oder sind einander parallel.

Auf V. 40 zu stützen.

* 88. Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten dieser Linie sich wie zwei Quadrate $m^2 : n^2$ verhalten.

Man suche das Verhältniß $m^2 : n^2$ auf ein Linienverhältniß zurückzuführen, indem man $n^2 = m \,.\, p$ setzt, wodurch $m^2 : n^2 = m : p$ wird. Die Aufgabe ist demnach auf V. 61 zurückgeführt.

* 89. Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie einen Punkt zu bestimmen, so daß das Verhältniß der Quadrate der Abstände des Punktes von den beiden Endpunkten dem Verhältnisse zweier Linien $m : n$ gleich werde.

Man suche die Aufgabe auf V. 61 zurückzuführen.

90. Aufgabe. Vom Scheitelpunkte C eines Dreiecks ABC eine gerade Linie CX nach der gegenüber stehenden Seite AB zu ziehen, welche die mittlere Proportionale zwischen den Segmenten der Grundlinie wird.

Man beschreibe durch die Punkte *A*, *B*, *C* einen Kreis, verlängere *CX* und bringe V. 53 in Anwendung. — Wie wird die Aufgabe aufgelöst, wenn *X* auf der Verlängerung von *AB* gesucht wird? — Determination.

91. Aufgabe. Auf einer Seite *AB* eines gegebenen Dreiecks *ABC* einen Punkt zu finden, so daß die mit der einen Seite *BC* parallel gezogene und von der anderen Seite *AC* begrenzte Linie *XY* die mittlere Proportionale zwischen den beiden Segmenten *AX* und *XB* der Grundlinie werde.

Man suche das Verhältniß *AX* : *XB* in ein bekanntes umzuwandeln, wodurch die Aufgabe auf Aufgabe VII. 88 zurückgeführt wird.

92. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt *A* eine gerade Linie *YX* zu legen, welche eine gegebene Gerade *MN* in *X* und einen gegebenen Kreis in *Y* so schneidet, daß *AX* : *AY* einem gegebenen Verhältnisse *p* : *q* gleich wird.

1. Lösung. Zieht man durch den Punkt Y eine Linie parallel mit der gegebenen *MN*, so läßt sich mit Hülfe von V. 37 zeigen, daß diese Parallele der Lage nach gegeben ist.

Eine zweite Lösung erhält man, wenn man den Mittelpunkt *C* mit dem gegebenen Punkte *A* und mit dem Punkte Y verbindet und auf *AX* ein dem Dreiecke *CAY* ähnliches Dreieck construirt.

Determination. Wie viele Linien von verlangter Eigenschaft giebt es?

93. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt *A* eine gerade Linie *XY* zu legen, welche zwei gegebene Kreise so in den Punkten *X* und *Y* schneidet, daß *AY* : *AX* = *p* : *q*.

Die Lösung ist ganz analog der zweiten Lösung der vorhergehenden Aufgabe. — Determination.

94. Aufgabe. Ein Kreis und eine gerade Linie *MN* sind gegeben. Durch einen der Endpunkte *A* des auf der geraden Linie senkrecht stehenden Durchmessers *AB* eine gerade Linie *AD* so zu ziehen, daß das zwischen die Kreisperipherie und die gegebene Gerade fallende Segment *DE* von gegebener Länge ist.

(Figur zu V. 58, Seite 108.)

Zur Lösung benutze man V. 58, wodurch die Aufgabe auf V. 67 zurückgeführt ist. — Determination.

Der Deutlichkeit halber unterscheide man die Fälle, je nachdem die gegebene Gerade außerhalb des Kreises liegt, ihn schneidet oder berührt, je nachdem die gerade Linie durch den einen oder anderen Endpunkt des Durchmessers gezogen werden soll.

95. Aufgabe. Ein Dreieck durch eine gerade Linie in zwei Theile zu theilen, die sowohl an Inhalt als an Umfang einander gleich sind.

Die Analysis führt im Allgemeinen an V. 67 zurück.

Wie viele Theilungslinien giebt es höchstens und durch welchen der merkwürdigen Punkte gehen sie sämmtlich?

96. Aufgabe. Mit der gemeinschaftlichen Grundlinie zweier Dreiecke eine Parallele XT zu ziehen, so daß die beiderseits zwischen den anderen Seiten liegenden Abschnitte XY und ZT ein gegebenes Verhältniß $m : n$ zu einander haben.

Man betrachte zuerst den Fall, wo die Spitze des einen Dreiecks in einer Seite des anderen Dreiecks liegt und benutze zur Auflösung V. 40. Der allgemeine Fall läßt sich auf den besonderen zurückführen, wenn man VII. 82 berücksichtigt.

97. Satz. Werden zwei parallele Tangenten eines Kreises durch eine dritte Tangente durchschnitten, so wird letztere im Berührungspunkte so getheilt, daß der Radius die mittlere Proportionale zwischen den Stücken derselben ist.

Leicht.

98. Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein Rechteck von gegebenem Inhalte einzuschreiben.

Man zerlege das Rechteck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke und suche die Höhe eines dieser Dreiecke in Bezug auf die Diagonale als Grundlinie.

99. Satz. Zieht man an der Ecke A eines Dreiecks ABC eine Tangente an den demselben umschriebenen Kreis, bis sie die Verlängerung der gegenüberstehenden Seite BC in O trifft, so ist das Verhältniß der Segmente OB und OC dem der Quadrate der Dreiecksseiten AB und AC gleich.

Beweis leicht.

100. Aufgabe. Zu zwei gegebenen Punkten A und B, die auf der Peripherie eines gegebenen Kreises liegen, soll ein dritter Punkt X gesucht werden, so daß die Sehnen AX und XB in einem gegebenen Verhältnisse $m : n$ stehen.

Man halbire den Winkel AXB, wende III. 20 und V. 49 und in der Auflösung V. 61 an.

Eine zweite Lösung erhält man, wenn man an A eine Tangente AN an den Kreis legt und auf den Schenkeln N des Winkels X gleichen Winkels NAB

von A aus Stück AN und AM trägt, welche bezüglich der gegebenen m und n gleich sind. Das $\triangle ANM$ wird alsdann dem gesuchten AXB ähnlich sein u. s. w.

* 101. Satz. In jedem Kreisvierecke $ABCD$ (s. Figur auf Seite 122) ist:

$$AC : BD = BA \cdot AD + BC\;CD : AB \cdot BC + AD \cdot DC.$$

Es heißen die von A und C auf BD gefällten Senkrechten m, m', die von D und B auf AC gefällten Senkrechten p und p', der Durchmesser des Kreises heiße endlich d; alsdann ist:

$$ABCD = \tfrac{1}{2}BD\,(m+m') = \tfrac{1}{2}AC\,(p+p'), \text{ also:}$$
$$m+m' : p+p' = AC : BD.$$

Aus V. 52 ergiebt sich leicht:

$$BA \cdot AD + BC \cdot CD = (m+m')\,d, \text{ und}$$
$$AB \cdot BC + AD \cdot DC = (p+p')\,d,$$

und hieraus in Verbindung mit obiger Proportion die im Satze aufgestellte Behauptung.

Sechster Abschnitt.

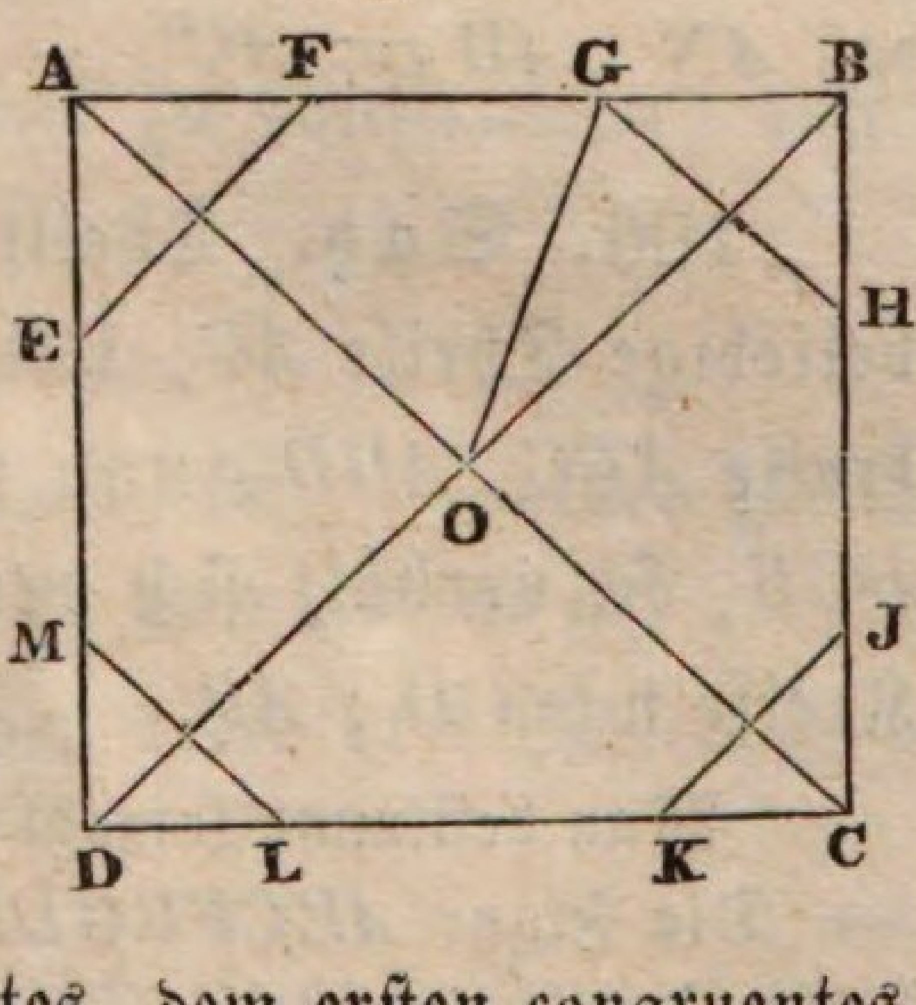
Anwendungen des sechsten Capitels.

102. Aufgabe. Die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks so abzustumpfen, daß aus demselben ein reguläres Sechseck wird.

Leicht.

103. Aufgabe. Die Ecken eines gegebenen Quadrats $ABCD$ so abzuschneiden, daß dadurch ein reguläres Achteck $EFGHIKLM$ entsteht.

Fig. 233.



Die Aufgabe läßt verschiedene Lösungen zu. Eine Lösung gründet sich darauf, daß das Quadrat und das reguläre Achteck einen gemeinschaftlichen eingeschriebenen Kreis haben.

Eine zweite Lösung erhält man durch die Betrachtung, daß durch die Verlängerungen der Seiten EF, GH, JK, LM des Achtecks ein zweites, dem ersten congruentes, Quadrat entsteht.

Eine dritte Lösung ergiebt sich durch Bestimmung der Größe des Winkels GOB.

Eine vierte Lösung endlich durch Vergleichung der beiden Winkel AGO

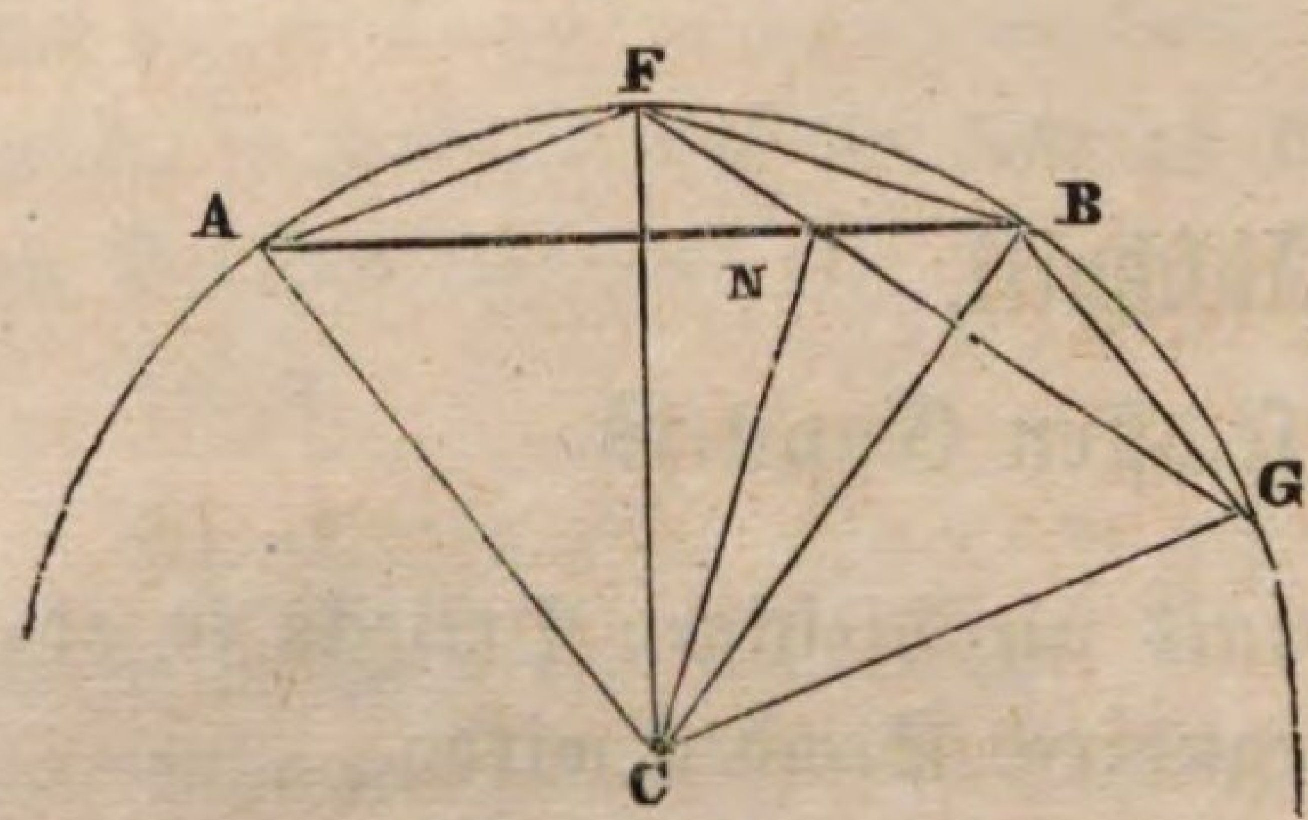
und *AOG*. Aus der zu beweisenden Gleichheit beider Winkel ergiebt sich die Gleichheit der Linien *AO* und *AG*. — Die Construction ist hiernach ganz einfach.

104. Satz. Zieht man von einem beliebigen Punkte innerhalb eines regulären *n*ecks Senkrechte auf die Seiten desselben, so ist die Summe aller dieser Senkrechten der *n*fachen Apotheme des Vielecks gleich.

Zum Beweise zerlege man sowohl vom Mittelpunkte als auch vom gegebenen Punkte innerhalb des Vielecks aus dasselbe in *n* Dreiecke, und suche in beiden Fällen den Inhalt des ganzen Vielecks mit Hülfe der einzelnen Dreiecke zu bestimmen. Durch Vergleichung der beiden erhaltenen gleichen Summen ergiebt sich der Beweis des Satzes leicht.

105. Satz. Sind in einen Kreis ein reguläres Fünfeck, Zehneck und Sechseck eingeschrieben, so ist das Quadrat der Seite des Fünfecks dem Quadrate der Seite des Sechsecks nebst dem Quadrate der Seite des Zehnecks gleich.

Fig. 234.



Es sei *AB* eine Seite des eingeschriebenen Fünfecks. *FB* oder *AF* oder *BG* die Seite eines eingeschriebenen Zehnecks. Um zu beweisen, daß $AB^2 = FB^2 + AC^2$, denke man sich AB^2 in zwei Rechtecke zerlegt, so daß $AB \cdot x = FB^2$, $AB \cdot y = AC^2$ und zeige, daß $x + y = AB$ ist. Zu dem Zwecke verbinde man *F* mit *G* und verbinde den Durchschnitt *N* der *FG* und *AB* mit *C*; es ist alsdann $BF^2 = NB \cdot BA$, wie sich leicht aus der Aehnlichkeit der Dreiecke *BFN* und *BAF* ergiebt. Eben so ergiebt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke *ACN* und *ACB*, daß $AN \cdot AB = AC^2$. — Der obige Satz ist somit erwiesen.

106. Satz. Theilt man den Durchmesser *AB* eines Kreises in drei beliebige Theile *AC*, *CD*, *DB* errichtet oberhalb *AC* und *AD* die Halbkreise *AEC*, *AHD*, und unterhalb *CB* und *DB* die Halbkreise *CFB* und *DGB*, so verhält sich der Inhalt der Figur *AECFBGDHA* zum ganzen Kreise wie *CD* : *AB*.

Man bestimme sowohl den Inhalt von *AECDHA* als von *CFBGDC* u. s. w. — Die Figur *AECFBGDHA* ist bei den alten Geometern unter dem Namen Pelecoides bekannt.

107. Aufgabe. Einen Kreis in eine gegebene Anzahl, z. B. 7 gleiche, von Halbkreisen begrenzte Stücke zu theilen.

Mit Anwendung des vorhergehenden Satzes zu lösen.

108. Satz. Wenn in einem gleichseitigen Fünfecke *ABCDE* drei Winkel, entweder in der Ordnung, in der sie auf einander folgen, *A, B, C*, oder außer solcher Ordnung, *A, C, D*, einander gleich sind, so ist das Fünfeck gleichwinkelig.

109. Satz. Ein reguläres Fünfeck verhält sich zu dem mittleren der drei Dreiecke, in welche es durch zwei aus einer Ecke gezogene Diagonalen getheilt wird, wie $\sqrt{5} : 1$.

110. Satz. Wenn *A* und *B* die Flächenräume zweier um und in einen Kreis beschriebenen regelmäßigen Polygone von gleicher Seitenzahl sind, so ist die Differenz $A - B$ der Fläche eines regelmäßigen Polygons von derselben Seitenzahl gleich, welches entweder um oder in einen Kreis beschrieben ist, dessen Halbmesser im ersten Falle der halben Seite des Polygons *B*, im zweiten Falle der halben Seite des Polygons *A* gleich ist.

VIII. Capitel.

Aufgaben und Sätze über Dreiecke und Vielecke.

Erster Abschnitt.

Das gleichseitige Dreieck und das Quadrat.

1. Aufgabe. Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, dessen Höhe einer gegebenen geraden Linie *h* gleich ist.

Leicht.

2. Satz. Nimmt man auf den Seiten *AB*, *BC*, *AC* eines gleichseitigen Dreiecks *ABC* die Punkte *P*, *Q*, *R*, so daß $AP = BQ = CR$, verbindet *P* mit *C*, *Q* mit *A*, *R* mit *B*, so bilden diese drei Linien ebenfalls ein gleichseitiges Dreieck.

3. Satz. Beschreibt man um ein gleichseitiges Dreieck einen Kreis und verbindet die Mittelpunkte der zu zwei Seiten eines Dreiecks gehörigen Bogen durch eine Sehne, so wird diese Sehne durch diese beiden Seiten des Dreiecks in drei gleiche Theile getheilt.

Beweis leicht.

4. Satz. Jeder Punkt im Umfange des einem gleichseitigen Dreiecke umschriebenen Kreises ist von der gegenüber liegenden Ecke des Dreiecks so weit entfernt, als von den beiden benachbarten zusammen.

Man schneide von der Verbindungslinie des Punktes mit der gegenüber stehenden Ecke ein Stück ab, gleich der Entfernung des Punktes von einer benachbarten Ecke, und beweise dann mit Hülfe eines Congruenzsatzes, daß das übrig bleibende Stück der ersteren Linie gleich ist der Entfernung des Punktes des Umfanges von der anderen benachbarten Ecke.

5. Satz. Die Summe dreier aus einem beliebigen Punkte O innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks auf die Seiten desselben gefällten Perpendikel ist der Höhe des Dreiecks gleich.

Man ziehe durch den gegebenen Punkt Parallelen mit den Seiten des Dreiecks, wodurch wieder ein gleichseitiges Dreieck entstehen wird. Da die drei Höhen dieses letzteren Dreiecks einander gleich sind, so lassen sich durch Benutzung dieser Eigenschaft die drei Perpendikel leicht als Theile der Höhe des ganzen Dreiecks nachweisen.

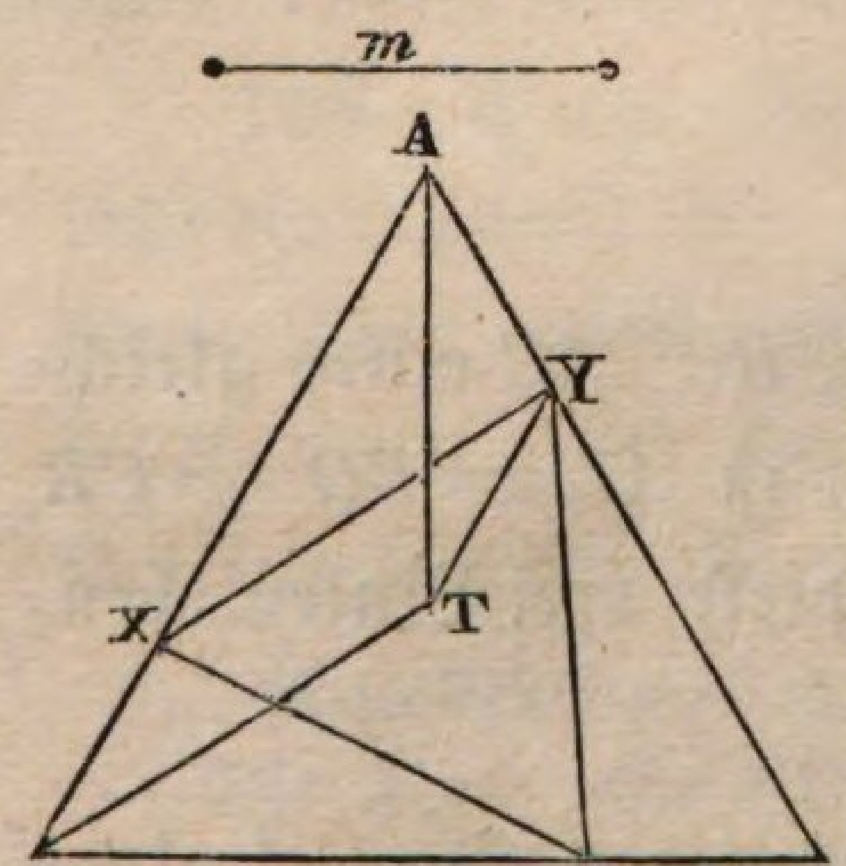
Der Satz ist nur ein specieller Fall des allgemeinen in VII. 104 und kann wie dieser bewiesen werden.

Wie ändert sich die Aussage des Satzes, wenn die drei Senkrechten nicht von einem Punkte innerhalb, sondern von einem Punkte außerhalb des Dreiecks gezogen werden?

6. Aufgabe. In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein anderes von gegebener Seitenlänge m einzuschreiben.

1. Lösung. Das gegebene Dreieck und das gesuchte haben, wie sich leicht zeigen läßt, denselben Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises. Mit Hülfe des Radius des um das Dreieck mit der Seite m beschriebenen Kreises lassen sich aus dem Mittelpunkte des um das gegebene Dreieck beschriebenen Kreises leicht die Spitzen des gesuchten Dreiecks finden. — Determination.

Fig. 235.



2. Lösung. Es sei XYZ das gesuchte Dreieck, dessen Seite $XY = m$. Man ziehe durch B mit XY die Parallele BT, und aus Y mit BX die Parallele YT. Aus der gegebenen Länge $BT = m$ und dadurch, daß T, wie sich leicht nachweisen läßt, auf der Halbirungslinie TA des $\measuredangle BAC$ liegt, läßt sich der Punkt T construiren.

Wie viele Dreiecke giebt es von verlangter Eigenschaft?

7. Aufgabe. Durch die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks Linien zu legen, welche ein gleichseitiges Dreieck von gegebener Seite einschließen.

Eine Lösung erhält man, wenn man die Aufgabe auf die vorhergehende zurückführt; eine zweite Lösung ergiebt sich durch die Betrachtung, daß das gesuchte und das gegebene Dreieck gleichen Mittelpunkt haben, und zugleich mit Anwendung von III. 36.

8. Aufgabe. Einem gegebenen gleichseitigen Dreiecke ein anderes einzuschreiben, dessen Seiten auf den Seiten des ersteren senkrecht stehen.

Man untersuche, in welchem Verhältnisse in jedem der drei an der Spitze des gegebenen Dreiecks liegenden congruenten rechtwinkeligen Dreiecke die beiden an der Spitze liegenden Seiten zu einander stehen. Hieraus ergiebt sich die Theilung einer jeden der drei Seiten, um zu dem gesuchten Dreiecke zu gelangen.

9. Aufgabe. Einem gegebenen gleichseitigen Dreiecke ein anderes gleichseitiges Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten mit den Seiten des ersten gegebene Winkel machen.

In ähnlicher Weise wie Aufg. 6 zu lösen.

10. Beschreibt man in ein gleichseitiges Dreieck einen Kreis, beschreibt alsdann in die drei Ecken des Dreiecks Kreise, die sowohl die Seiten des Dreiecks als den eingeschriebenen Kreis berühren, so ist jeder Radius der letzteren Kreise der dritte Theil vom Radius des ersteren.

Leicht.

11. Errichtet man über jeder der drei Seiten eines beliebigen Dreiecks ein gleichseitiges Dreieck entweder jedesmal nach Außen oder jedesmal nach Innen, und verbindet die Spitze eines jeden dieser Dreiecke mit der gegenüber stehenden Ecke des gegebenen Dreiecks, so treffen die drei Verbindungslinien in einem Punkte zusammen und sind dabei gleich lang. Der Durchschnittspunkt ist zugleich derjenige Punkt, in welchem sich die drei Kreise treffen, die um die gleichseitigen Dreiecke beschrieben sind.

Man verbinde die Spitzen zweier gleichseitigen Dreiecke mit den gegenüber stehenden Spitzen des gegebenen Dreiecks und zeige mit Hülfe zweier congruenten Dreiecke und der daraus sich ergebenden gleichen Winkel, daß der Durchschnittspunkt der Verbindungslinien mit den drei Spitzen jedes der beiden gleichseitigen Dreiecke in einem Kreise liege. Der vollständige Beweis des obigen Satzes ergiebt sich hiernach leicht.

12. Aufgabe. Ein Quadrat zu machen, dessen Diagonale einer gegebenen Linie gleich ist.

Leicht.

13. Aufg. Ein Quadrat zu construiren, dessen Seite und Diagonale eine gegebene Linie *n* zur Summe oder Differenz habe.

Die Aufgabe läßt sich auf verschiedene Weise behandeln.

14. Aufg. In ein gegebenes Quadrat ein anderes von gegebener Seitenlänge einzuschreiben.

Zwei Auflösungen, welche den Auflösungen der Aufg. 6 entsprechen.

15. Aufg. In ein gegebenes Quadrat ein gleichseitiges Dreieck einzuschreiben.

Leicht.

16. Satz. Die beiden Hülfslinien *AG*, *CE*, die bei dem Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes, Seite 75, gebraucht werden, stehen auf einander senkrecht.

Leicht.

17. Satz. Werden zwei senkrecht auf einander stehende gerade Linien von den Seiten eines Quadrats oder deren Verlängerungen geschnitten, so ist das von zwei gegenüber stehenden Seiten des Quadrats begrenzte Stück der einen Linie dem von den beiden andern gegenüber stehenden Seiten des Quadrats begrenzten Stücke der anderen Linie gleich.

Leicht.

18. Satz. Stehen in einem beliebigen Vierecke die Diagonalen auf einander senkrecht und sind einander gleich, so ist jedes Rechteck, dessen Seiten durch die vier Ecken des Vierecks gehen, ein Quadrat.

Umkehrung des vorhergehenden Satzes. — Beweis leicht.

19. Aufg. Durch vier gegebene Punkte *A*, *B*, *C*, *D* vier Linien zu legen, welche ein Quadrat einschließen.

Mit Hülfe des vorhergehenden Satzes leicht zu lösen.

Eine zweite Lösung erhält man, wenn man sich über zwei gegenüber stehenden Seiten *AB*, *CD* als Durchmesser Kreise beschrieben denkt und die Punkte auf diesen Kreisen zu bestimmen sucht, durch welche eine bestimmte Diagonale des zu suchenden Quadrats geht. Im Allgemeinen giebt es bei dieser Lösung, so wie bei der ersteren, vier Quadrate von verlangter Eigenschaft.

20. Aufg. Durch die vier Ecken eines Quadrats gerade Linien zu legen, welche ein Quadrat von gegebener Größe einschließen.

Leicht. — Determination.

21. Aufg. Ein Quadrat zu construiren, dessen drei Seiten

durch drei gegebene Punkte gehen und dessen vierte Seite einen gegebenen Kreis berührt.

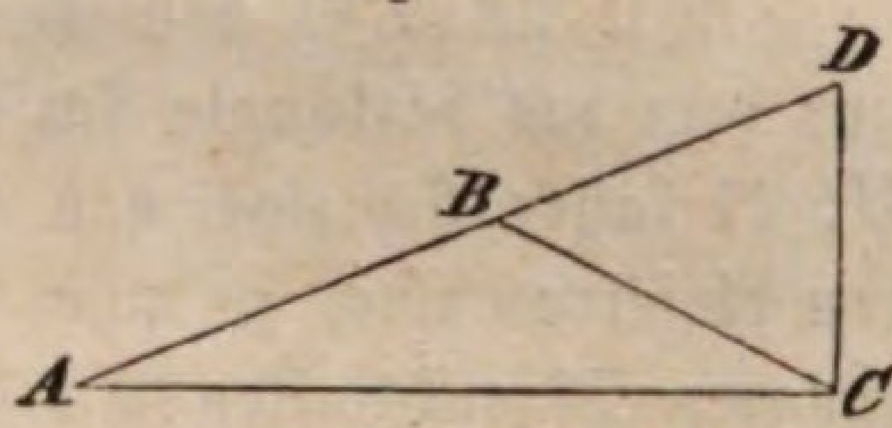
In ähnlicher Weise wie bei Aufg. 19, 1. Lösung, auf 18 zurückzuführen und mit Hülfe von III. 34 zu lösen.

Zweiter Abschnitt.

Construction der Dreiecke aus gegebenen Stücken.

* 22. Aufg. Von einem Dreiecke ABC kennt man zwei Winkel A und C und die Summe der diesen Winkeln gegenüber liegenden Seiten AB und BC, das Dreieck zu construiren.

Fig. 236.



Denkt man sich die Aufgabe gelöst, verlängert AB um ein Stück $BD = BC$, und verbindet D mit C, so läßt sich ADC und hieraus ABC leicht construiren. In ähnlicher Weise läßt sich die Aufgabe lösen, wenn statt der Summe die Differenz der Seiten AB und BC gegeben ist.

23. Aufg. Von einem Dreiecke kennt man zwei Winkel und die Summe der drei Seiten; das Dreieck zu construiren.

Man denke sich die Aufgabe gelöst, verlängere eine Seite nach beiden Richtungen um die anstoßende Seite, verbinde die Endpunkte der Verlängerungen mit der Spitze des Dreiecks u. s. w.

24. Aufg. Von einem Dreiecke kennt man die Grundlinie und die zu den beiden anderen Seiten gehörigen Höhen; das Dreieck zu construiren.

Leicht.

25. Aufg. Von einem Dreiecke kennt man die Grundlinie, die zugehörige Höhe und die zu einer anderen Seite gehörige Höhe; das Dreieck zu construiren.

Leicht.

* 26. Aufg. Ein Dreieck zu construiren, von welchem eine Seite g, ein anliegender Winkel α und die Summe s der beiden anderen Seiten gegeben sind.

Die Analysis ähnlich der in 22. — Die Construction leicht.

* 27. Aufg. Ein Dreieck zu construiren, von welchem eine

Seite g, ein anliegender Winkel α und die Differenz d der beiden anderen Seiten gegeben sind.

Bei dieser Aufgabe sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der gegebene Winkel der kleineren oder größeren Seite gegenüber steht. Im ersteren Falle denkt man sich die kleinere Seite auf die größere, im zweiten Falle die größere auf die kleinere gelegt. Durch Ziehung einer Hülfslinie gelangt man zu einem bekannten Dreiecke, aus welchem sich das gesuchte Dreieck leicht ableiten läßt. Bei der Determination genügt die bloße Angabe, daß $d < g$ sein müsse (II. 6), nicht, sondern es muß, wenn die Auflösung möglich sein soll, die Größe des Winkels α berücksichtigt werden. Die vollständige Ausführung der Determination wird dem Schüler überlassen.

* 28. Aufg. Von einem Dreiecke sind gegeben: eine Seite, der gegenüber stehende Winkel und die Summe der beiden anderen Seiten; dasselbe zu construiren.

Die Analysis ähnlich der von 22. Bei der Construction des Hülfsdreiecks, aus dem das verlangte sich ableiten läßt, kommt II. 21 in Anwendung. — Nach II. 21 lassen sich zwei von einander verschiedene Hülfsdreiecke construiren; führen dieselben auch zu zwei von einander verschiedenen Dreiecken von den verlangten Eigenschaften?

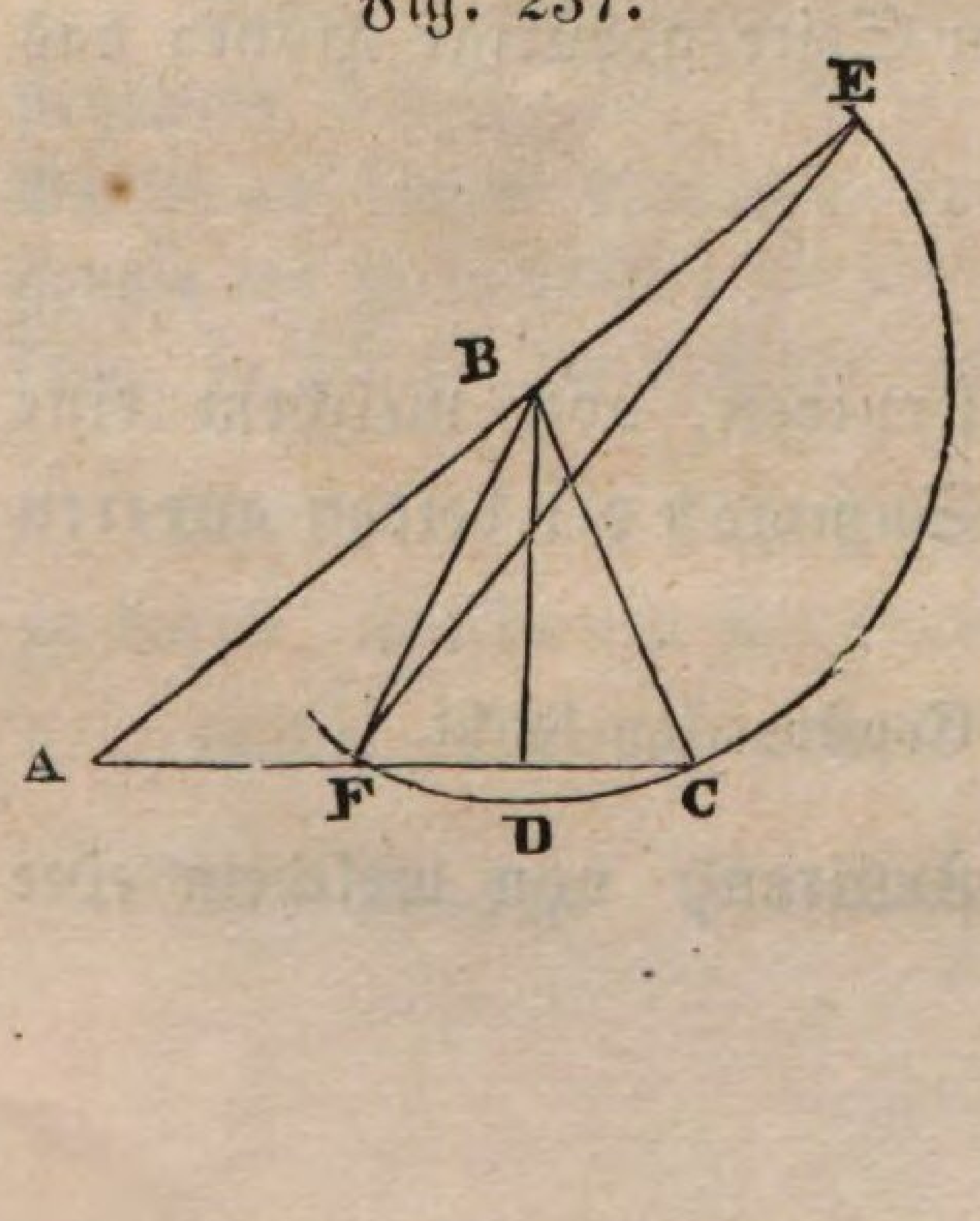
29. Aufg. Von einem Dreiecke sind gegeben: eine Seite, der gegenüber stehende Winkel und die Differenz der beiden anderen Seiten; dasselbe zu construiren.

Die Auflösung ähnlich der vorhergehenden. — Determination.

30. Aufg. Von einem Dreiecke sind gegeben: eine Seite g, die Differenz d der daran liegenden Winkel und die Summe s der beiden anderen Seiten; das Dreieck zu construiren.

Mit Benutzung des Satzes II. 3, Zusatz, ist die Aufgabe auf II. 21 zurückzuführen. — Determination.

Fig. 237.



31. Aufg. Von einem Dreiecke ABC sind gegeben: die Summe s zweier Seiten AB, BC, der von diesen eingeschlossene Winkel, und die Differenz oder Summe der Projectionen AD und DC jener Seiten auf die dritte, je nachdem an dieser zwei spitze Winkel oder ein spitzer und ein stumpfer Winkel liegen.

Ist ABC das verlangte Dreieck und beschreibt man aus B mit BC als Radius einen

Kreis, welcher die verlängerte *AB* in *E*, die Grundlinie *AC* oder deren Verlängerung in *F* schneidet, so ist *DF* = *DC*; es ist somit *AF* = *n*. Verbindet man nun *E* mit *F*, so ist zunächst die Größe des Peripheriewinkels *EFC* aus dem gegebenen Winkel *ABC* abzuleiten. Hieraus ergiebt sich die Richtung von *EF*, und somit der Punkt *E*.

32. **Aufg.** Ein Dreieck zu construiren, wenn von demselben gegeben sind die Grundlinie, der gegenüber stehende Winkel und das aus der Spitze dieses Winkels auf die Grundlinie gefällte Loth.

Die Aufgabe ist mit Hülfe von III. 36 zu lösen. — Determination.

33. **Aufg.** Ein Dreieck zu construiren, wenn von demselben gegeben sind: die Summe der drei Seiten, ein Winkel und das aus der Spitze dieses Winkels auf die Grundlinie gefällte Loth.

Man verlängere die Grundlinie nach beiden Richtungen um die anliegenden Seiten, verbinde die Endpunkte der Verlängerungen mit der gegenüber stehenden Ecke; die Verbindungslinien schließen alsdann einen Winkel ein, der aus dem gegebenen gefunden werden kann.

34. **Aufg.** Von einem Dreiecke kennt man die Summe oder Differenz zweier Seiten und die Projectionen der Seiten auf die dritte Seite einzeln; das Dreieck zu construiren.

Man beschreibe aus der Spitze eines Dreiecks mit der kleineren Seite einen Kreis, welcher die andere Seite selbst und ihre Verlängerung trifft. Mit Hülfe des Satzes V. 54 läßt sich, wenn die Summe der Seiten des Dreiecks gegeben ist, deren Differenz, oder wenn die Differenz gegeben ist, deren Summe finden. Die Construction des Dreiecks ist hiernach leicht.

35. **Aufg.** Von einem Dreiecke *ABC* kennt man die Summe zweier Seiten *AB* und *BC* und die Höhen *CD* und *AE*, welche zu denselben gehören; das Dreieck zu construiren.

Man verlängere eine der Seiten *AB* um ein Stück *BF* gleich der anderen *BC*, ziehe durch *F* mit *BC* eine Parallele bis zum Durchschnitte *G* mit der verlängerten Höhe *AE*. Das rechtwinkelige Dreieck *AFG* ist, wie sich leicht zeigen läßt, bekannt, und hieraus läßt sich das verlangte Dreieck construiren.

36. **Aufg.** Von einem Dreiecke kennt man die Summe zweier Höhen und die Seiten, welche zu diesen Höhen gehören; das Dreieck zu construiren.

Der vorigen Aufgabe ähnlich zu lösen. Beide Aufgaben sind in anderer Weise durch die Betrachtung zu lösen, daß die Grundlinien im umgekehrten Verhältnisse der Höhen stehen. Durch Anwendung von V. 61 lassen sich alsdann aus der Summe der Seiten in 35 die einzelnen Seiten, und aus der Summe der Höhen in 36 die einzelnen Höhen finden. Die Aufgaben sind hiernach auf Aufg. 25 zurückgeführt.

37. Aufg. Von einem Dreiecke kennt man eine Seite und die Mittellinien zu den beiden anderen Seiten; das Dreieck zu construiren.

Mit Rücksicht auf II. 53 läßt sich diese Aufgabe auf II. 16 zurückführen.

38. Aufg. Von einem Dreiecke kennt man zwei Seiten und die Mittellinie zur dritten Seite; das Dreieck zu construiren.

Man verlängere die Mittellinie um sich selbst über die Mitte der dritten Seite hinaus und verbinde den Endpunkt mit einem der Endpunkte der dritten Seite. Die Aufgabe wird hierdurch auf II 16 zurückgeführt.

39. Aufg. Ein Dreieck zu construiren, in welchem die drei Mittellinien dreien gegebenen geraden Linien gleich sind.

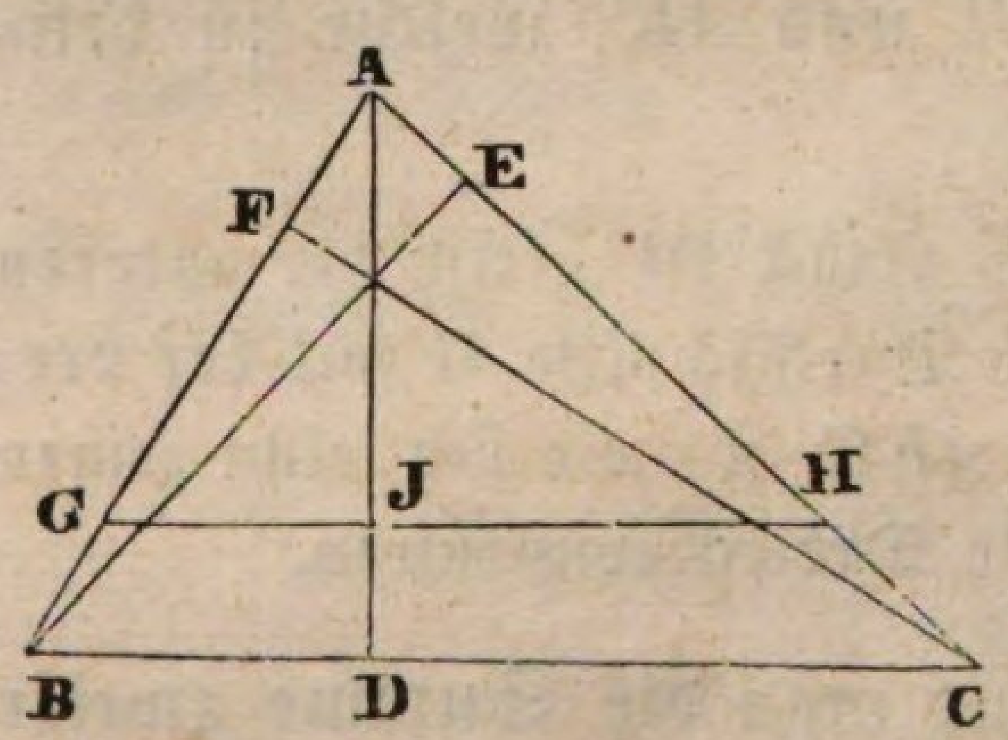
Zieht man durch die Mitte einer Seite eine Parallele mit einer der Mittellinien bis zur anderen, so entsteht ein Dreieck, dessen drei Seiten als gegeben erkannt werden. — Auf mehrfache andere Weise läßt sich diese Aufgabe lösen.

40. Aufg. Von einem Dreiecke ist gegeben: 1) ein Winkel α, 2) die von seiner Ecke ausgehende Mittellinie, 3) das von derselben Ecke ausgehende Höhenperpendikel; das Dreieck zu construiren.

Es sei ABC das verlangte Dreieck, ABC der gegebene Winkel, BD die Mittellinie und BE die Höhe. Durch die beiden letzten Stücke ist der Winkel BDE gegeben; durch ihn und den gegebenen Winkel ABC läßt sich mit Hülfe von III. 36 ein dem gesuchten ähnliches Dreieck, und hieraus das verlangte Dreieck selbst finden.

41. Aufg. Ein Dreieck zu construiren, dessen drei Höhenperpendikel drei gegebenen Linien h, h', h'' gleich sind.

Fig. 238.



1. Lösung. Es habe $\triangle ABC$ die verlangten Höhen $AD = h$, $BE = h'$, $CF = h''$. Schneidet man auf den Seiten AB und AC 1) $AG = BE$, 2) $AH = CF$ ab und zieht GH, so wird $\triangle AGH \sim ABC$, und GH die vierte Proportionale zu den drei Höhen; hieraus folgt die Auflösung.

2. Lösung. Heißen die entsprechenden unbekannten Grundlinien des zu suchenden Dreiecks g, g', g'', so ist:

1) $g : g' = h' : h$,

2) $g : g'' = h'' : h$; hieraus sowohl:

3) $g : g' : g'' = h'h'' : hh'' : hh'$, also auch:

4) $h : h' : h'' = g'g'' : gg'' : gg'$.

Bildet man nun aus den drei Höhen als Seiten ein Dreieck und bezeichnet die zu diesen Seiten gehörigen Höhenperpendikel mit H, H', H'', so ist gemäß 4):

$$H : H' : H'' = h'h'' : hh'' : hh'; \text{ es ist somit;}$$

$$g : g' : g'' = H : H' : H''.$$

Ein aus den Höhen H, H', H'' construirtes Dreieck ist so mit dem zu suchenden Dreiecke, dessen Seiten g, g', g'' sind, ähnlich. Das verlangte Dreieck ist hiernach leicht zu construiren. — Determination.

42. Aufg. Ein Dreieck zu construiren, von welchem zwei Seiten gegebene Längen m und n haben, die dritte aber dem darauf gefällten Höhenperpendikel gleich ist.

Es sei ABC das gesuchte Dreieck $AB = m$, $AC = n$, und die Höhe $AD = BC$. Man errichte auf BA in B, und auf BC in C Senkrechte, die sich in E schneiden, und vergleiche das Dreieck BCE mit BDA.

Determination.

Wie viele Dreiecke von der verlangten Eigenschaft giebt es im Allgemeinen?

43. Aufg. Es seien die drei Halbmesser r', r'', r''' der ein Dreieck ABC von außen berührenden Kreise gegeben; das Dreieck zu construiren.

Es sei ABC das verlangte Dreieck; D, E, F seien die Mittelpunkte der das Dreieck von außen berührenden Kreise und es sei $DG = r'$, $EH = r''$, $FJ = r'''$. Leicht läßt sich nachweisen, daß

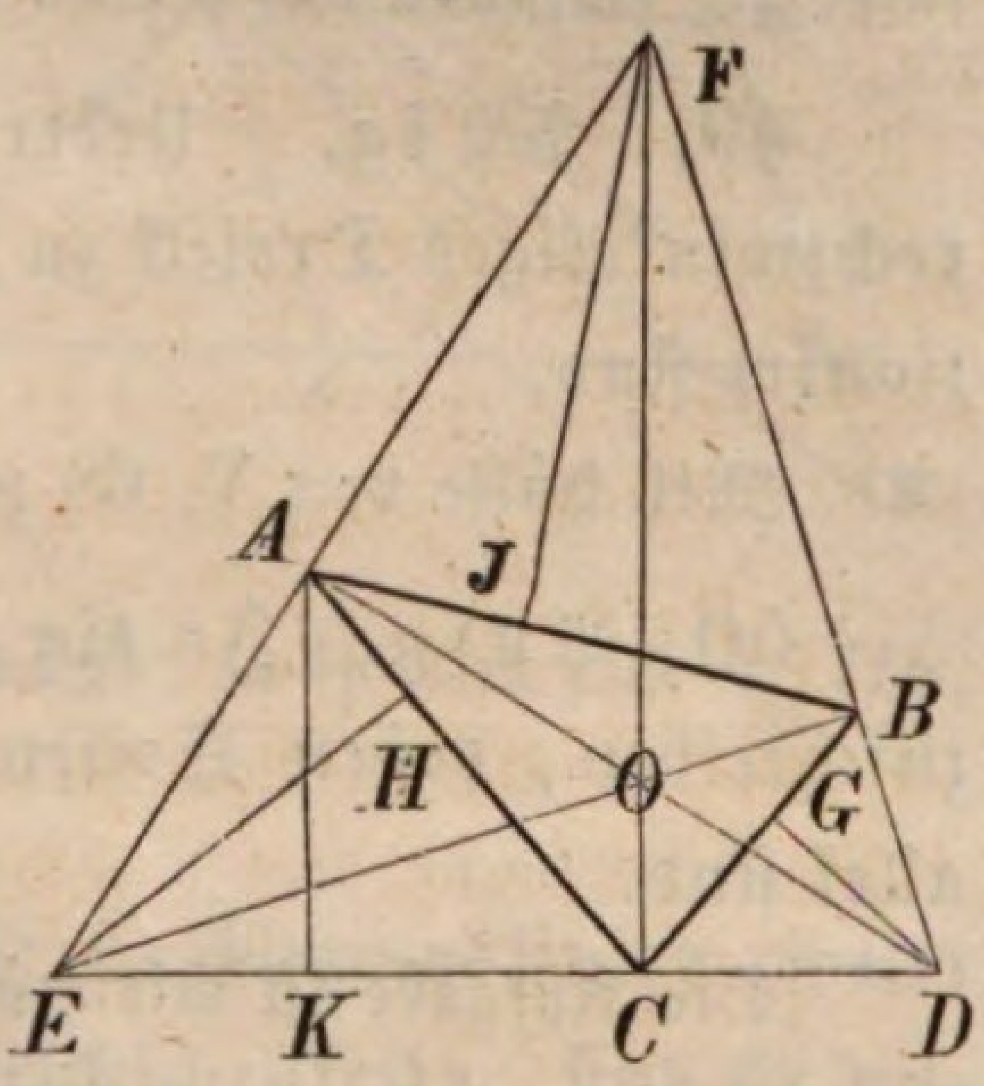
$$EC : CD = EH : DG = r'' : r'.$$

Fällt man von A auf ED die Senkrechte AK, so ist:

$$EK : KC = EA : AF = EH : FJ = r'' : r'''.$$

Hiernach sind die Verhältnisse $EK : KC$ und $EC : CD$ gegeben. Leicht läßt sich hiernach ein dem Dreiecke EFD ähnliches Dreieck construiren und hieraus das gesuchte Dreieck ABC ableiten.

Fig. 239.



44. Aufg. Durch einen innerhalb oder außerhalb eines Winkels BCD gegebenen Punkt A eine Linie XY zu ziehen, welche vom Raume dieses Winkels ein Dreieck CXY abschneidet, dessen Umfang von gegebener Länge m wird.

Die Aufgabe laßt sich am einfachsten mittels eines Kreises lösen, der die Seite XY des Dreiecks CXY und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten dieses Dreiecks berührt.

45. Aufg. Durch einen Punkt innerhalb oder außerhalb der Schenkel eines Winkels eine gerade Linie zu ziehen, so daß die Summe oder Differenz der durch sie begrenzten Schenkel des Winkels eine gegebene Länge bekommen.

Die Aufgabe ist auf V. 67 zurückzuführen.

46. Aufg. Von einem Dreiecke kennt man die Grundlinie, den Winkel an der Spitze und das Rechteck aus den beiden Seiten; das Dreieck zu construiren.

Die Aufgabe ist mit Hülfe von V. 52 zu lösen.

47. Aufg. Von einem Dreiecke kennt man das Rechteck aus zwei Seiten, die zur dritten Seite gezogene Mittellinie und den Winkel dieser Mittellinie mit der dritten Seite; das Dreieck zu construiren.

Man suche aus den beiden letzteren Angaben die Höhe des Dreiecks und benutze alsdann zur Construction V. 52.

48. Aufg. Von einem Dreiecke kennt man die Grundlinie $AB = g$, die Differenz der Winkel an der Grundlinie $= d$, und eine gerade Linie MN, auf welcher die Spitze des Dreiecks liegt; das Dreieck zu construiren.

Man verlängere AB bis zum Durchschnitte mit der gegebenen MN und suche die Aufgabe auf V. 51 zurückzuführen.

49. Aufg. Ueber einer geraden Linie als Hypotenuse ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, dessen drei Seiten stetig proportionirt sind.

Mit Hülfe von V. 68 zu lösen.

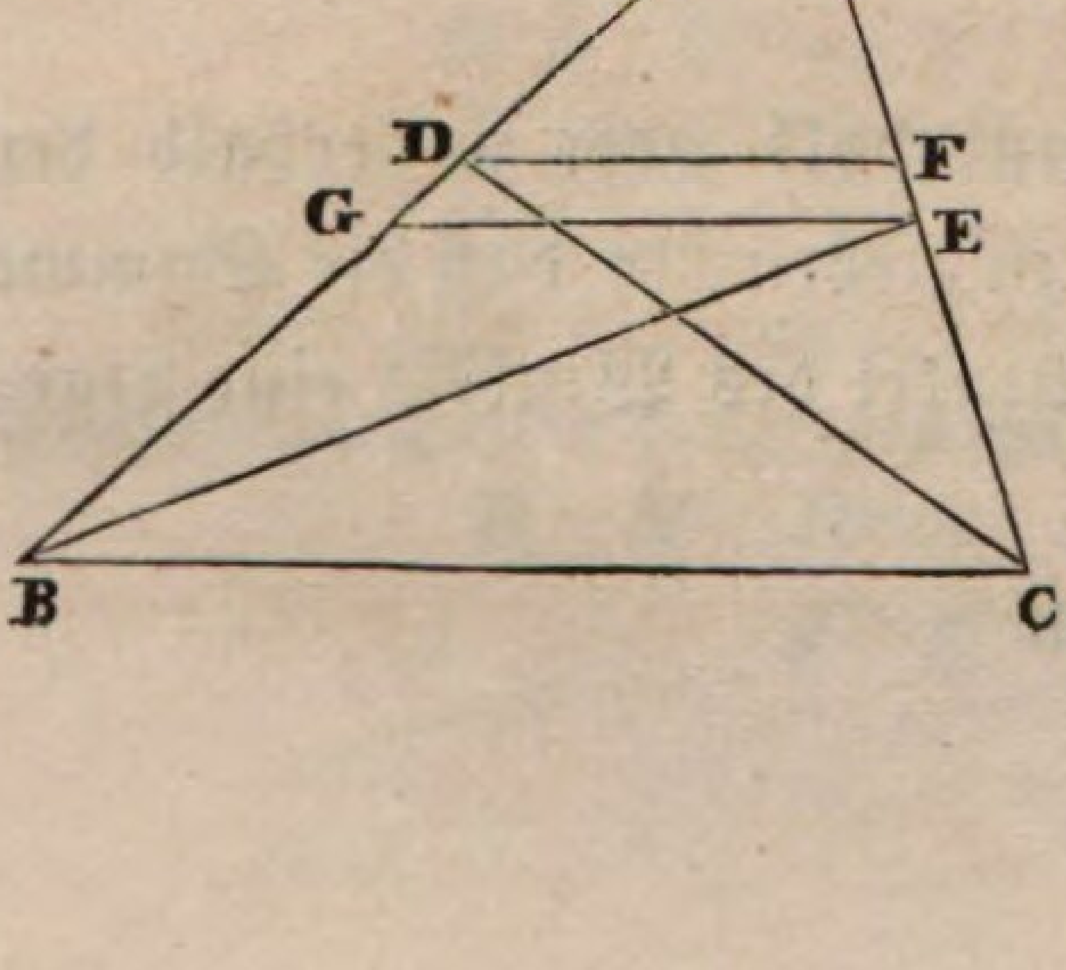
50. Aufg. In ein gegebenes Dreieck ABC ein anderes XYZ einzuschreiben, dessen Seiten den Seiten eines gegebenen Dreiecks parallel sind.

Die Aufgabe ist mit Hülfe der Aehnlichkeitspunkte zu lösen.

Dritter Abschnitt.

Lehrsätze über Dreiecke im Allgemeinen.

Fig. 240.



*51. Satz. In einem ungleichschenkeligen Dreiecke ist die Halbirungslinie des größeren Winkels kleiner als die des kleineren Winkels.

Es sei in dem Dreiecke ABC 1) $AB > AC$, 2) $\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBC$, 3) $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$; es soll bewiesen werden, daß $CD < BE$ sei.

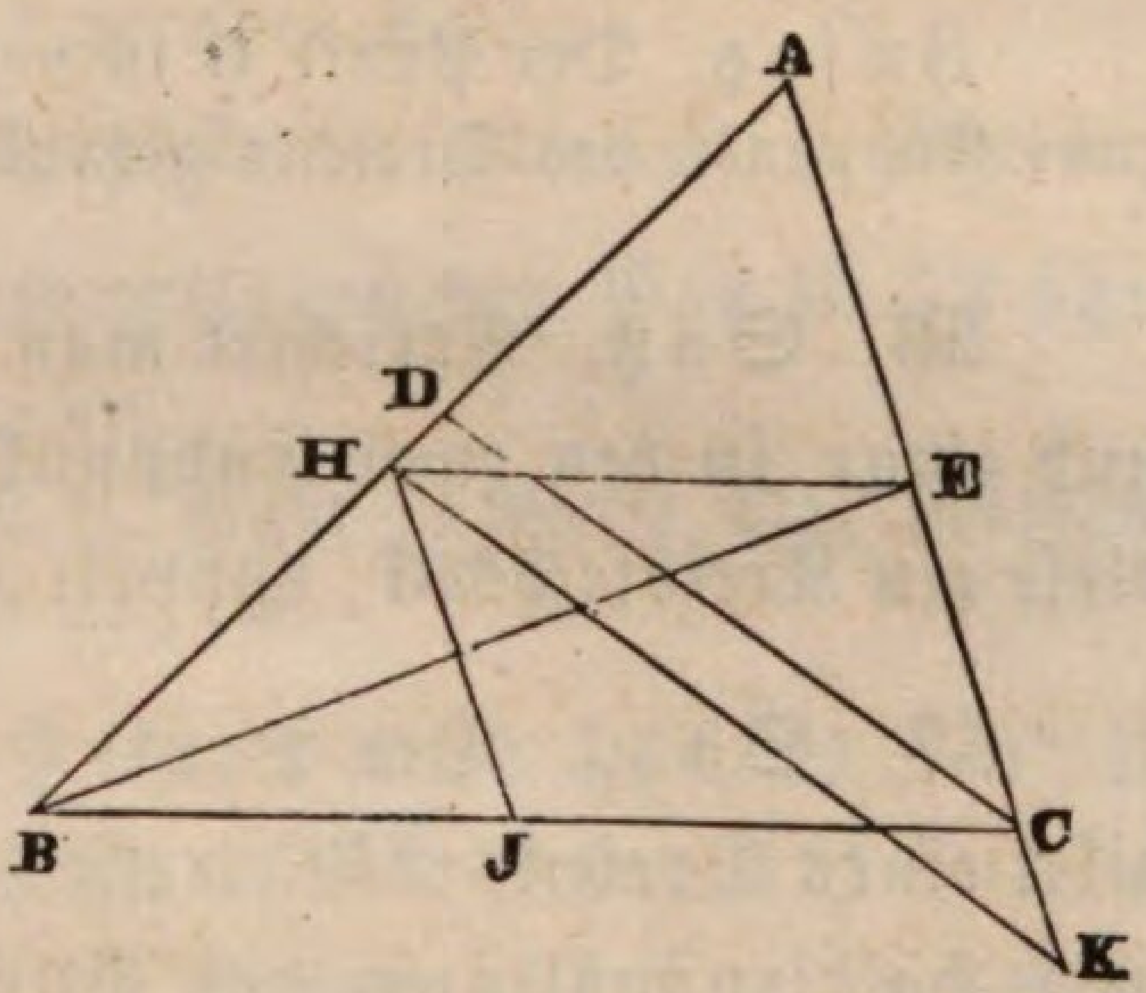
1. Beweis. $AC : CB = AD : DB$

und $AB : CB = AE : EC$; $AC < AB$, also $AC : CB < AB : CB$, mithin auch

$$AD : BD < AE : EC.$$

Zieht man durch den Punkt D eine Parallele DF mit BC, so ist: $AD : BD = AF : FC$, also $AF : FC < AE : EC$. Aus der letzteren Proportion folgt, daß der Punkt F dem Punkte A näher liegen muß, als der Punkt E. Das Dreieck DFC ist, wie sich leicht zeigen läßt, gleichschenkelig, $DF = FC$; eben so ist, wenn man durch E mit BC eine Parallele EG zieht, das Dreieck EGB gleichschenkelig, $EG = GB$. Nun ist aber in den beiden Dreiecken BGE und DFC: 1) $DF < GE$, 2) $\sphericalangle BGE > \sphericalangle DFC$ als Supplemente der ungleichen Winkel B und C; es muß demnach sowohl mit Berücksichtigung des Satzes II. 26, als des Satzes II. 29 $BE > CD$ sein.

Fig. 241.



2. Beweis. Man ziehe durch den Punkt E mit BC eine Parallele EH, und durch H mit AC eine Parallele HJ, ferner durch H mit DC eine Parallele HK. Es ist nun, wie sich leicht aus der Voraussetzung zeigen läßt, $HE = HB$, und eben so $HE = EK$; ferner ist $\sphericalangle HJB = \sphericalangle ACB > HBJ$, mithin $BH > HJ$, folglich auch $EK > HJ$ oder EC. Der Punkt K liegt also auf der Verlängerung von AC, und der Punkt D mithin zwischen A und H. Vergleicht man die beiden Dreiecke BHE und HEK mit einander, so ergiebt sich leicht aus II. 26, daß $BE > HK$ sein müsse; es ist aber $CD < HK$, mithin um so mehr $CD < BE$.

* 52. Satz. Sind in einem Dreiecke die Halbirungslinien zweier Winkel einander gleich, so ist das Dreieck gleichschenkelig; sind sie ungleich, so ist das Dreieck ungleichschenkelig.

Indirect aus dem vorhergehenden Satze zu beweisen.

53. Satz. Linien, welche den Winkel an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks in drei, vier oder mehrere gleiche Theile theilen, schneiden die Grundlinie in ungleiche Stücke, die von der Mitte aus nach den Endpunkten zunehmen; umgekehrt werden Linien, die, von der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks ausgehend, die Grundlinie in gleiche Theile schneiden, den Winkel an der Spitze in ungleiche Theile theilen.

Zum Beweise suche man die als gleich angenommenen Stücke in congruente Dreiecke zu bringen.

54. Satz. Zieht man in einem Dreiecke ABC die drei Höhenper-

pendikel AD, BE, CF, die sich im Punkte O treffen (II. 52), so sind die Rechtecke $AO \cdot OD$, $BO \cdot OE$, $CO \cdot OF$ einander gleich.

Auf IV. 31, Zusatz, zu gründen.

55. Satz. Zieht man in einem Dreiecke ABC Perpendikel aus den Ecken auf die Seiten, welche sich in O treffen, so sind die drei durch O und je zwei Ecken des Dreiecks ziehbaren Kreise alle dem umschriebenen Kreise des Dreiecks ABC gleich.

Der Beweis gründet sich darauf, daß, wenn zwei Kreise eine gleiche Sehne haben und in den Kreisen auf diesen Sehnen entweder gleiche Peripheriewinkel stehen oder Peripheriewinkel, welche Supplementwinkel sind, diese Kreise einander gleich sind.

Zusatz. Der Punkt O ist von den Mittelpunkten der drei durch O und je zwei Endpunkte des Dreiecks gehenden Kreise gleich weit entfernt.

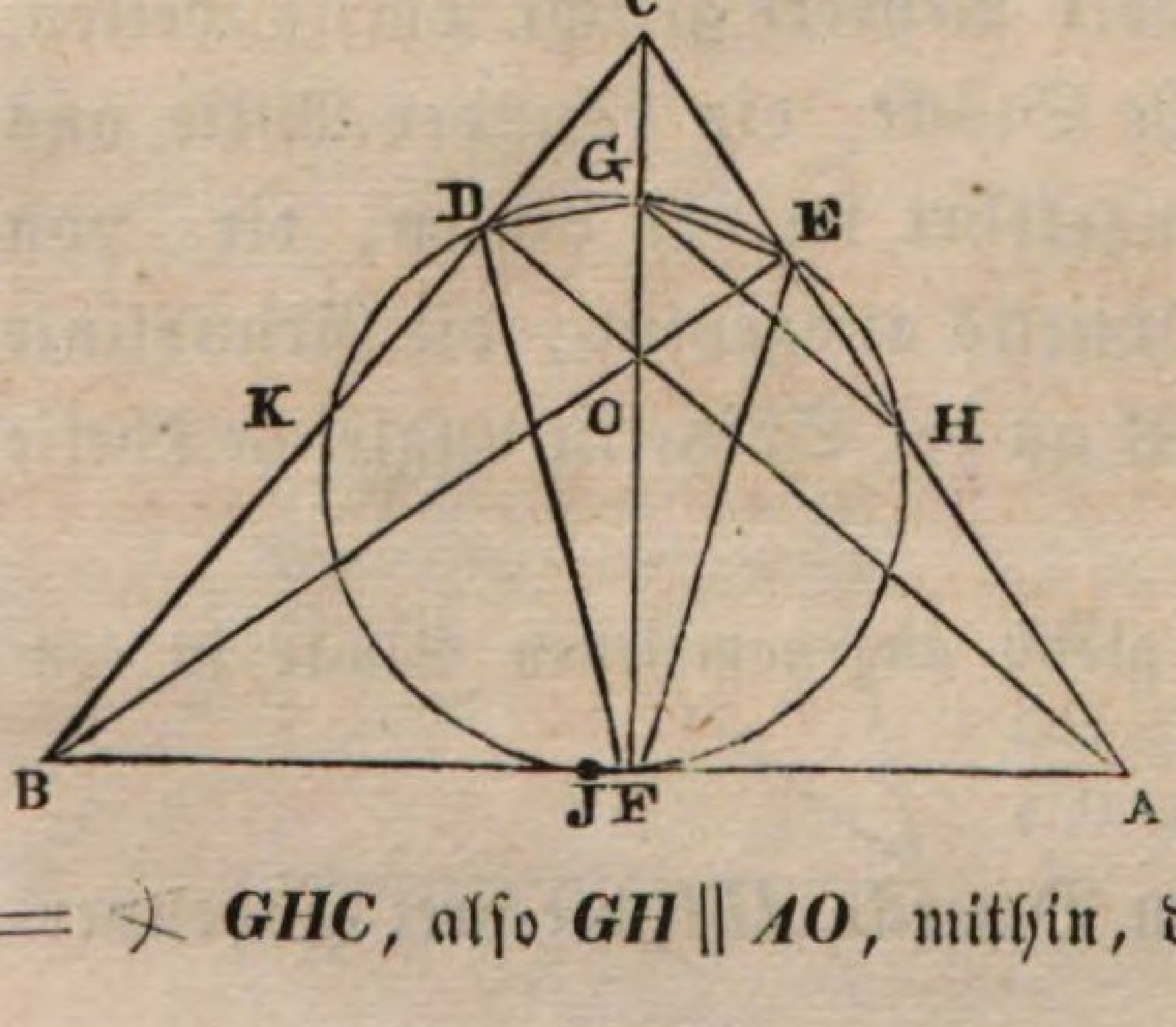
56. Satz. Errichtet man auf den drei Seiten eines Dreiecks ABC, und zwar in den zwei Endpunkten einer jeden Perpendikel, so bilden diese ein Kreissechseck, doppelt so groß als das Dreieck ABC.

57. Satz. Der Punkt O, in welchem sich die drei Höhenperpendikel eines Dreiecks ABC treffen, ist derselbe Punkt, in welchem sich die drei Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks DEF treffen, dessen Spitzen in den Fußpunkten der Höhenperpendikel liegen.

Mit Hülfe der Kreisvierecke ist zu beweisen, daß die Höhenperpendikel zugleich Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks FDE sind.

58. Satz. Zieht man durch die Fußpunkte D, E, F der drei sich in O schneidenden Höhenperpendikel eines Dreiecks ABC einen Kreis, so geht derselbe durch die Mitten der drei Seiten des Dreiecks und durch die Mitten von OA, OB, OC.

Fig. 242.



G sei die Mitte von CO, also noch der Mittelpunkt des durch C, D, O, E gehenden Kreises. Zieht man GD, GE, FD, FE, so ist: $\sphericalangle DGE = 2DCE = 2BCA = R - CBE + R - CAD = 2R - DFO - EFO = 2R - DFE$, also $DGE + DFE = 2R$. Der Punkt G liegt demnach auf der Peripherie des durch FED gehenden Kreises. Verbindet man G mit H, so ist $\sphericalangle GHE = GFE$; ferner ist $OFE = OAE$, mithin ist $\sphericalangle OAE = \sphericalangle GHC$, also $GH \parallel AO$, mithin, da $OG = GC$, auch $AH = HC$.

Die letztere Behauptung, daß $AH = HC$ sei, läßt sich auch unabhängig von der ersteren Behauptung beweisen. Es heißen die Durchschnittspunkte des Kreises mit den drei Seiten des Dreiecks H, J, K, alsdann ist: $AH : AJ = AF : AE$. Es ist aber, da $\triangle AEB \sim \triangle AFC$: $AF : AE = AC : AB$, mithin: $AH : AJ = AC : AB$, folglich $HJ \parallel BC$. Eben so läßt sich nachweisen, daß $JK \parallel AC$ und $HK \parallel AB$, und hieraus leicht, daß $AJ = JB$, $BK = KC$, $AH = HC$. Verbindet man nun H mit G, so läßt sich wie oben darthun, daß $HG \parallel AO$, also daß $OG = GC$ ist.

59. Satz. Fällt man von den drei Spitzen eines Dreiecks Senkrechte auf die drei Seiten, und von dem Fußpunkte eines der Perpendikel auf die beiden anderen Höhenperpendikel sowohl als auf die zu denselben gehörigen Seiten ebenfalls Senkrechte, so liegen die Fußpunkte dieser vier Perpendikel in einer geraden Linie.

Der Beweis ist mit Hülfe von III. 20 und I. 14, Zusatz 1, zu führen.

60. Mit Hülfe der Sätze über Proportionen den Satz II. 53 über die Mittellinien eines Dreiecks zu beweisen.

Man ziehe zwei Mittellinien AD, BE (s. Figur 71 Seite 47), verbinde E mit D und zeige, daß $ES : SB = 1 : 2$ u. s. w.

61. Satz. Zieht man durch den Punkt S eines Dreiecks ABC, in welchem sich drei Mittellinien treffen (Schwerpunkt genannt), eine beliebige gerade Linie, legt alsdann durch die Spitzen A, B, C drei Parallelen bis an diese Linie, so ist die Summe der beiden auf einerlei Seite der Linie liegenden Parallelen der dritten Parallele gleich.

Man ziehe durch den Fußpunkt einer der Mittellinien mit den drei Parallelen eine vierte Parallele bis zu der durch den Schwerpunkt gezogenen Linie, wodurch sich der Beweis leicht ergiebt.

62. Satz. Zieht man durch die drei Spitzen eines Dreiecks ABC sowohl als durch den Schwerpunkt vier Parallelen bis zu einer beliebigen außerhalb des Dreiecks gegebenen Linie, so ist die durch den Schwerpunkt gehende Parallele ein Drittel der Summe der durch die drei Punkte gehenden Parallelen.

Leicht durch Berufung auf 60.

63. Satz. Die gerade Linie, welche einen Dreieckswinkel halbirt, schneidet die gegenüber stehende Seite in zwei Segmente, deren Rechteck dem Rechtecke aus den zwei übrigen Seiten des Dreiecks, vermindert um das Quadrat der Halbirungslinie, gleich ist.

Zum Beweise beschreibe man um die Ecken des Dreiecks einen Kreis, verlängere die Halbirungslinie des Winkels bis zur Peripherie des Kreises und wende IV. 31, Zusatz, und V. 42 an.

Wie heißt der Satz, wenn statt des Innenwinkels der Außenwinkel halbirt wird?

Zusatz. Aufg. Aus den drei in Zahlen gegebenen Seiten *a*, *b*, *c* eines Dreiecks die Halbirungslinien der Winkel zu berechnen.

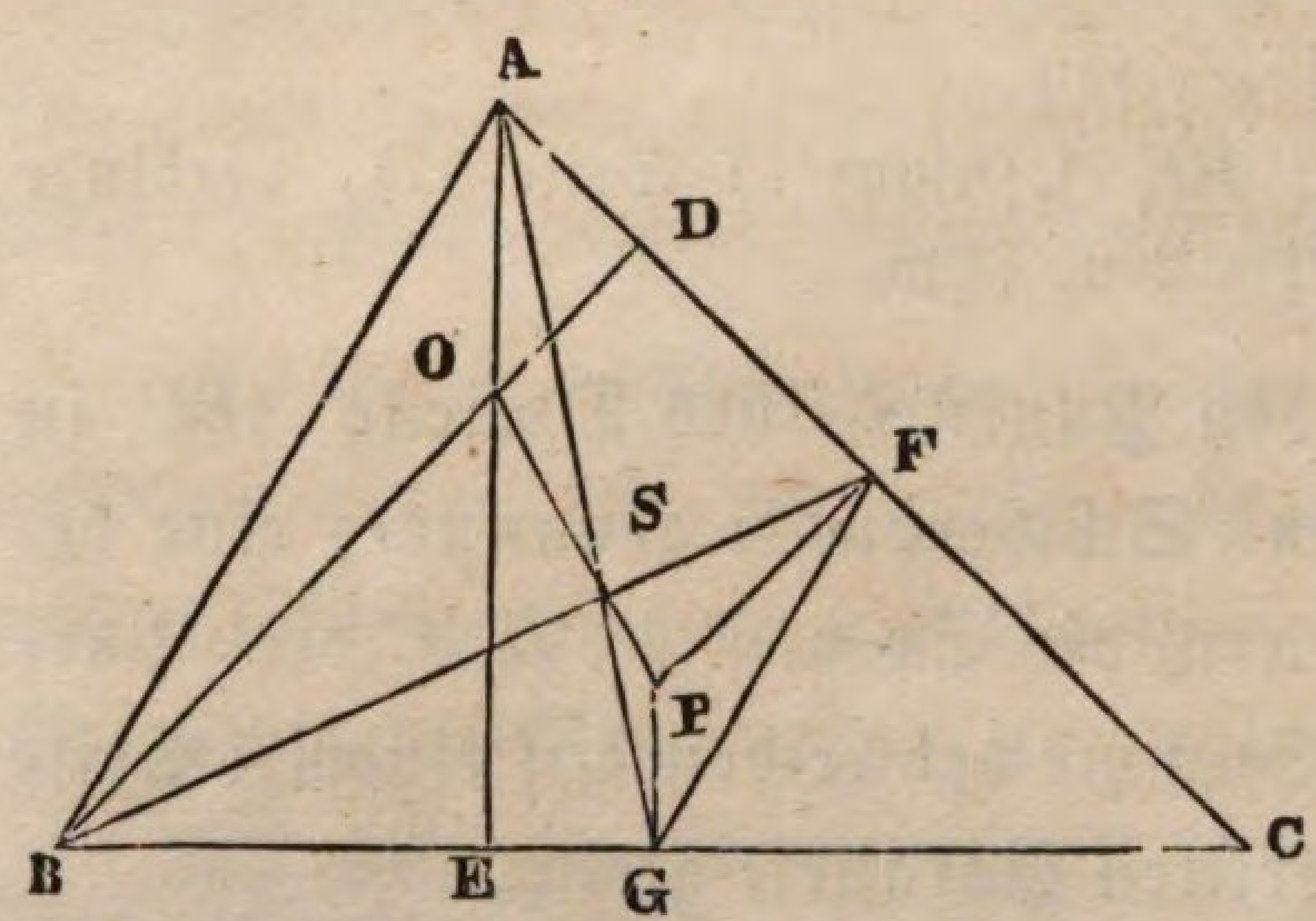
Man benutze den vorhergehenden Satz und V. 49, Zusatz 2.

64. Satz. Werden in einem Dreiecke *ABC* von der Spitze *A* aus die beiden Linien *AD* und *AE* nach den Punkten *D* und *E* der Grundlinie so gezogen, daß $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$, so ist: $AB^2 : AC^2 = DB \cdot BE : EC \cdot CD$.

Man beschreibe um *ADE* einen Kreis, welcher die *AB* und *AC* schneidet, und setze an die Stelle der Rechtecke $DB \cdot BE$ und $EC \cdot CD$ die ihnen gleichen, u. s. w.

* 65ª. Satz. Diejenigen drei merkwürdigen Punkte *P*, *S*, *O* eines Dreiecks, in welchem sich 1) nach II. 50 drei auf den Seiten in ihren Mitten errichteten Senkrechte treffen, 2) nach II. 53 die drei Mittellinien, 3) nach II. 52 die drei Höhenperpendikel treffen, liegen in einer geraden Linie, und zwar so, daß der zweite Punkt zwischen den beiden anderen liegt und von dem dritten noch einmal so weit entfernt ist als von dem ersten.

Fig. 243.



Zum Beweise verbinde man *O* mit *S* und *S* mit *P*. Zieht man *FG*, so läßt sich mit Hülfe der ähnlichen Dreiecke *PFG* und *AOB* zeigen, daß $AO = 2PG$ sei. Da nun auch $AS = 2SG$ (II. 53), so wird $\triangle AOS \sim GSP$, also $\sphericalangle ASO = PSG$, und somit *OSP* eine gerade Linie sein.

Zusatz. Auf denselben Geraden liegt auch der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die Mitten der Seiten oder durch die Fußpunkte der Höhen des Dreiecks gelegt ist und zwar in der Mitte zwischen dem Durchschnitte der 3 Höhenperpendikel und dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises.

65ᵇ. Satz. Sind zwei rechtwinkelige Dreiecke ähnlich und sind Hypotenuse und Kathete des einen *A*, *B*, *C*, Hypotenuse und Kathete des andern *a*, *b*, *c*, so ist: $Aa = Bb + Cc$.

Der Beweis ist auf den pythagoräischen Lehrsatz zu stützen.

Vierter Abschnitt.

Aufgaben und Sätze über Vierecke und Vielecke.

66. Aufg. Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus von gegebener Seite zu construiren.

Man ziehe zuerst zwei parallele Tangenten und suche zwischen dieselben eine Linie zu legen gleich der gegebenen Seite des Rhombus u. s. w.

67. Aufg. Durch vier gegebene Punkte ein Rechteck von gegebener Grundlinie zu legen.

Leicht.

68. Aufg. Aus vier gegebenen Linien m, n, o, p ein Trapez zu construiren.

Zieht man durch eine Ecke des Trapezes eine Parallele mit der gegenüber stehenden nicht parallelen Seite, so läßt sich das hierdurch entstehende Dreieck construiren und hieraus das verlangte Trapez. — Determination.

69. Satz. Theilt man eine der nicht parallelen Seiten AD eines Trapezes $ABCD$ in zwei Theile AE und ED, die sich wie $1:2$ verhalten und zieht durch den Theilungspunkt E mit der Grundlinie eine Parallele EG bis zum Durchschnitte G mit der gegenüber stehenden Seite, so ist $EG = \frac{1}{3}(2AB+CD)$.

Der Beweis ist auf II. 48 zu stützen.

70. Satz. Schneiden sich die Diagonalen eines Kreisvierecks unter rechten Winkeln, so ist die Summe der Rechtecke aus den gegenüber stehenden Seiten gleich dem doppelten Vierecke.

Auf V. 86 (den ptolemäischen Lehrsatz) zu stützen.

71. Satz. Zieht man durch die vier Ecken eines Vierecks Parallellinien mit den Diagonalen, so bilden diese ein Parallelogramm, doppelt so groß als das Viereck.

Leicht.

72. Satz. Die vier geraden Linien, welche die inneren Winkel eines beliebigen Vierecks, eben so diejenigen, welche die Außenwinkel desselben halbiren, bilden Kreisvierecke.

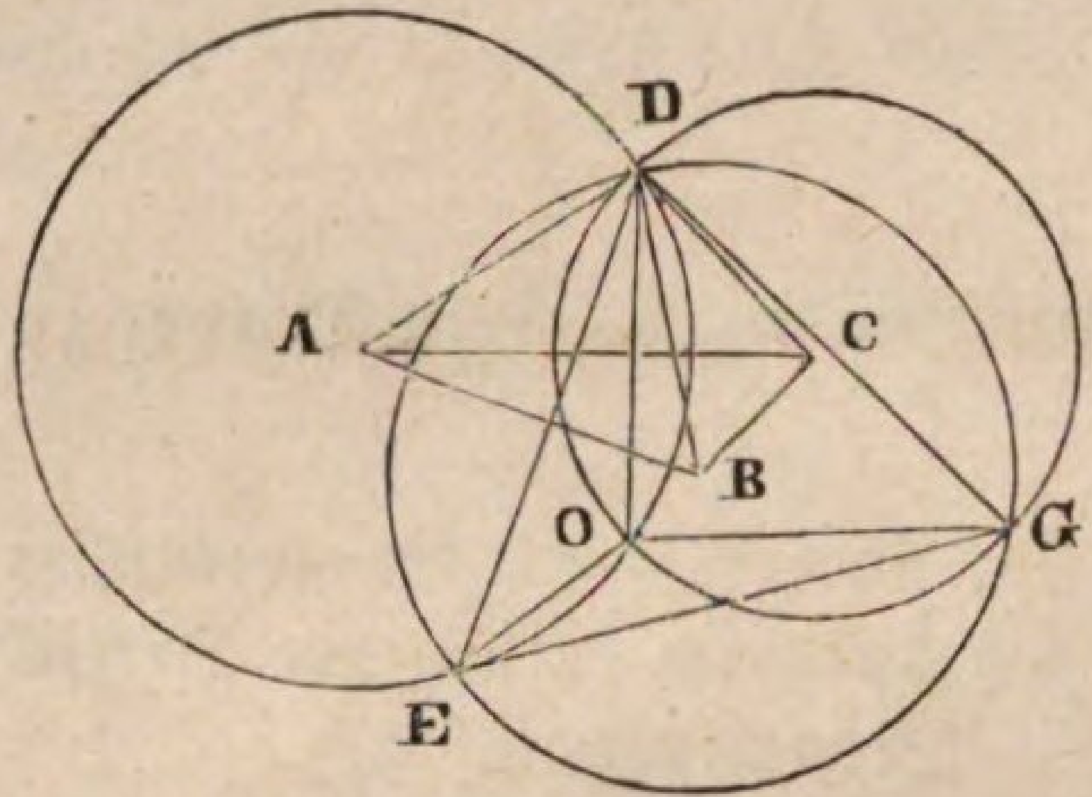
Auf III. 21 zu stützen.

Beide Kreisvierecke haben gegenseitig gleiche Winkel und ihre Diagonalen fallen auf einander.

73. Satz. Beschreibt man um jedes der vier Dreiecke, in welche ein Viereck durch seine beiden Diagonalen getheilt wird, einen Kreis, so bilden die Mittelpunkte derselben die Ecken eines Parallelogramms.

74. Aufg. Von einem Vierecke $ABCD$ sind zwei Seiten AD und DC und die Diagonale BD, außerdem die beiden Winkel, welche die andere Diagonale AC mit den beiden anderen Seiten macht, nämlich $\sphericalangle BAC = \alpha$, und $BCA = \beta$ gegeben; das Viereck zu construiren.

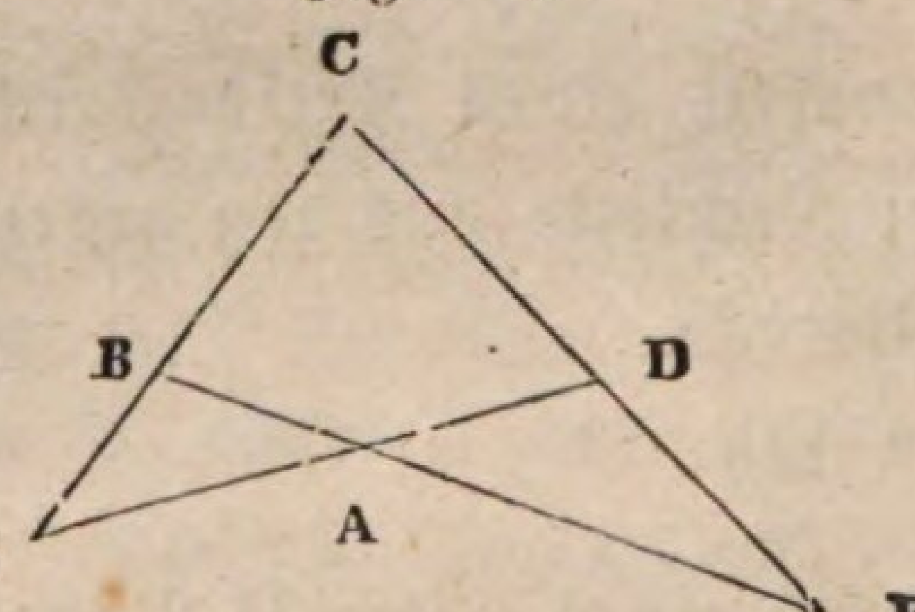
Fig. 242.



Beschreibt man um die drei Punkte A, B, C als Mittelpunkte Kreise mit den Radien AD, BD, CD, die sämmtlich durch D gehen, sich außerdem aber noch je zwei und zwei in den Punkten E, O, G treffen, so stehen die Verbindungslinien dieser drei Punkte mit D, nämlich DE, DO, DG als gemeinschaftliche Sehnen auf den Centralen der Kreise, d. i. auf den Seiten AB, AC, BC des Dreiecks ABC senkrecht, daher ist $\sphericalangle EDO = CAB = \alpha$, $\sphericalangle ODG = \sphericalangle ACB = \beta$, $\sphericalangle EDG = \alpha + \beta$. Aus der Größe dieser drei Peripheriewinkel und aus den Radien der Kreise lassen sich die drei Sehnen EO, GO, EG einzeln, also das Dreieck EOG construiren. Aus dem letzteren Dreiecke erhält man den Punkt D sowohl, als die drei Punkte A, B, C.

75. Satz. Verlängert man die gegenüber stehenden Seiten eines Vierecks $ABCD$ bis zum Durchschnitte in E und F und beschreibt um die vier Dreiecke AFD, BFC, DEC, ABE Kreise, so schneiden sich diese in ein und demselben Punkte.

Fig. 243.



Es ist mit Hülfe der Peripheriewinkel zu zeigen, daß der Durchschnittspunkt der um zwei der Dreiecke beschriebenen Kreise mit je dreien Ecken der anderen Dreiecke in einem Kreise liegt.

Fünfter Abschnitt.

Construction von Dreiecken und Vielecken nach Bedingungen über die Lage der Ecken.

76. Aufg. In ein gegebenes Viereck einen Rhombus einzuschreiben, dessen Seiten den Diagonalen des Vierecks parallel laufen.

Leicht.

77. Aufg. In ein gegebenes Rhomboid ein Quadrat einzuschreiben.

Man zeige zuerst, daß das gesuchte Quadrat und das gegebene Rhomboid einerlei Mitte haben, beschreibe dann einen Halbkreis über einer Seite des Rhomboids und suche den Durchschnitt desselben mit einer der Diagonalen des Quadrats.

78. Aufg. In ein gegebenes Dreieck ein Quadrat so einzuschreiben, daß eine Seite des Quadrats auf die Grundlinie, und die beiden Spitzen des Quadrats auf die Seiten des Dreiecks zu liegen kommen.

Mehrere Constructionen ergeben sich mit Hülfe eines von der Höhe des gegebenen Dreiecks oder über dessen Grundlinie beschriebenen Quadrats. Man suche dabei die Ecken eines solchen Quadrats, die mit den Ecken des gesuchten, und einer der Ecken des gegebenen Dreiecks in gerader Linie liegen.

Eine andere Construction erhält man auf Grund des Satzes VII. 82. Man zeige, daß die Größe des zu suchenden Quadrats allein von Grundlinie und Höhe des gegebenen Dreiecks abhängt. Man löse daher die Aufgabe zuerst für ein rechtwinkeliges Dreieck, welches mit dem gegebenen gleiche Grundlinie und Höhe hat, und trage das Quadrat in das gegebene Dreieck über.

Zusatz. Verallgemeinerung der obigen Aufgabe: In ein gegebenes Dreieck ein Parallelogramm einzuschreiben, ähnlich einem gegebenen.

79. Aufg. In ein gegebenes Kreissegment ein Quadrat oder ein Rechteck, ähnlich einem gegebenen, einzuschreiben.

Leicht.

80. Aufg. In ein gegebenes Dreieck ein Parallelogramm einzuschreiben, das einen Winkel mit ihm gemeinschaftlich hat und dessen einschließende Seiten eine gegebene Summe oder Differenz haben.

Die Auflösung ist auf VII. 12 zu stützen.

81. Aufg. In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck einzuschreiben von gegebenem Umfange.

Leicht.

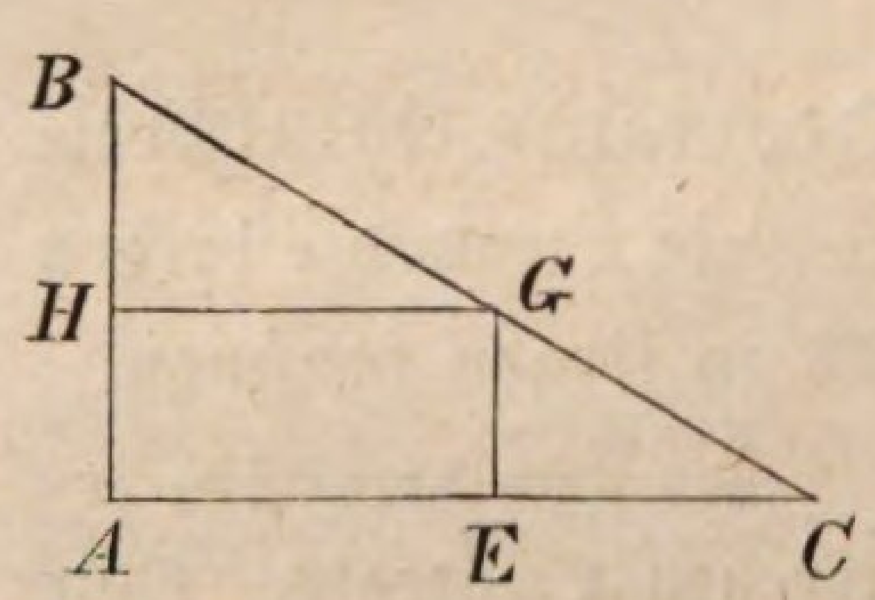
82. Aufg. In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck von gegebener Diagonale einzuschreiben.

Leicht.

83. Aufg. Ein Dreieck zu construiren, das einem gegebenen ähnlich ist, wovon eine Ecke gegeben, die beiden anderen aber in zwei der Lage nach gegebenen geraden Linien liegen sollen.

Man denke sich das Dreieck gebildet, ziehe durch die drei Ecken einen Kreis und suche die zwei Durchschnittspunkte dieses Kreises mit den gegebenen Geraden nach II. 20 zu bestimmen. — Die gegebenen geraden Linien können entweder parallel sein oder nicht. — Als besonderen Fall behandele man den, wo das gesuchte Dreieck gleichseitig sein soll.

Fig. 244.



84. In ein gegebenes rechtwinkeliges Dreieck ABC ein Rechteck $AEGH$ einzuschreiben, welches einem gegebenen Rechtecke $p \,.\, q$ an Inhalt gleich ist.

Anleitung. Man suche zu AC, AB und q eine vierte Proportionale z, alsdann ist:

$$p : GH = HA : q$$
$$HG : HB = AC : AB = q : z, \text{ also:}$$
$$p : HB = HA : z.$$

Die Aufgabe wird also zurückgeführt auf V. 67.

IX. Capitel.

Lehrsätze und Aufgaben über den Kreis.

Erster Abschnitt.

Lehrsätze über den Kreis.

1. Fällt man aus einem beliebigen Punkte im Umfange des einem Dreiecke umschriebenen Kreises Perpendikel auf die Seiten desselben, so liegen die Fußpunkte dieser Perpendikel in gerader Linie.

Mit Hülfe von III. 20 und I. 14, Zusatz 1, zu beweisen.

2. Berühren einander zwei Kreise, deren kleinerer durch das Centrum des größeren geht, so ist der Abstand eines jeden Punktes im Umfange des letzteren von der gemeinschaftlichen Tangente demjenigen Theile eines nach ihm gezogenen Radius gleich, der zwischen beide Kreise fällt.

Durch Congruenz zweier Dreiecke zu beweisen.

3. Fällt man von einem beliebigen Punkte O der Sehne DE eines Kreises eine Senkrechte OP auf den Durchmesser AB, so ist $AP \cdot PB = DO \cdot OE + OP^2$.

Der Beweis stützt sich auf IV. 30 und III. 7, Zusatz.

4. Verlängert man eine Sehne BD eines Kreises über beide Ende hinaus um gleiche Stücke BA, DE, und zieht von den Endpunkten A und E dieser Verlängerungen Tangenten AG, EF zu verschiedenen Seiten der Sehne an den Kreis, so liegen die Berührungspunkte G und F der Tangenten mit dem Mittelpunkte O der Sehne BD in gerader Linie.

Der Beweis ist auf III. 20 und I. 14, Zus. 1, zu stützen. — Umkehrung des Satzes.

5. Verbindet man die Punkte, worin zwei parallele Tangenten von einer dritten Tangente getroffen werden, mit der Mitte des Kreises, so stehen diese Verbindungslinien auf einander senkrecht, und das Rechteck aus den beiden Tangenten ist dem Quadrate des Radius gleich.

Der Beweis ist auf III. 17 und IV. 22 zu stützen.

* 6. Satz. Zieht man durch einen beliebigen Punkt der gemeinschaftlichen Sehne zweier Kreise oder deren Verlängerung a) eine Sehne oder b) eine Secante an jeden, so ist a) das Rechteck aus den Stücken der Sehne in dem einen Kreise, dem Rechtecke aus den Stücken der Sehne in dem anderen Kreise gleich; oder es ist b) das Rechteck aus der ganzen Secante und dem äußeren Abschnitte des einen Kreises, dem Rechtecke aus der ganzen Secante und dem äußeren Abschnitte des anderen Kreises gleich.

Leicht.

1. Zusatz. Derselbe Satz gilt auch, wenn für den Fall, daß beide Kreise einander berühren, statt der gemeinschaftlichen Sehne deren gemeinschaftliche Tangente genommen wird.

2. Zusatz. Zieht man durch den Punkt der gemeinschaftlichen Sehne in jedem der Kreise eine kleinste Sehne (III. 16, Zus.), so sind diese kleinsten Sehnen einander gleich; eben so sind die Tangenten einander gleich, welche von

einem Punkte auf der Verlängerung der gemeinschaftlichen Sehne nach beiden Kreisen gezogen werden.

* 7. Die drei gemeinschaftlichen Sehnen dreier sich durchschneidenden Kreise sind entweder einander parallel oder durchschneiden sich alle in einem Punkte.

Der Beweis für den ersten Fall ist einfach; der Beweis des zweiten Falles stützt sich auf den vorhergehenden Satz.

Zusatz. Derselbe Satz gilt auch, wenn irgend zwei Kreise berührend sind, wo alsdann die gemeinschaftliche Sehne durch die gemeinschaftliche Tangente vertreten wird.

8. Verlängert man die gegenüber stehenden Seiten eines Kreisvierecks bis zu ihren Durchschnittspunkten, so ist das Quadrat des Abstandes dieser Punkte der Summe der Quadrate der von ihnen aus an den Kreis gezogenen Tangenten gleich.

Man suche die Verbindungslinie in zwei Theile zu theilen, die mit der ganzen Linie Rechtecke bilden, welche einzeln den Quadraten der Tangenten gleich sind.

9. Sind über einer gegebenen Linie als Sehne drei Kreisbogen beschrieben, und sind durch die Endpunkte der Sehne zwei Secanten an den Kreis gelegt, so haben die von denselben Kreisbogen begrenzten Stücke dieser Linien einerlei Verhältniß.

Auf Aehnlichkeit der Dreiecke zu stützen.

* 10. Definition. Unter Aehnlichkeitspunkt zweier beliebig gelegenen Kreise versteht man einen Punct auf der Centrale beider Kreise, dessen Abstände von den Mittelpunkten sich wie die Radien verhalten. (Entsprechend der Definition des Aehnlichkeitspunktes der Vielecke, V. 75.) Wie läßt sich dieser Aehnlichkeitnpunkt am einfachsten construiren? (V. 61.) Wie viele Aehnlichkeitspunkte giebt es und wo liegen dieselben, wenn die Kreise a) aus einander, b) in einander liegen, c) sich durchschneiden, d) sich berühren? — Aeußerer und innerer Aehnlichkeitspunkt.

* 11. Satz. Jede durch einen der Aehnlichkeitspunkte gezogene Secante schneidet von den Kreisen ähnliche Segmente ab; die an die Endpunkte der ähnlichen Bogen gezogenen Radien sind paarweise einander parallel.

Leicht.

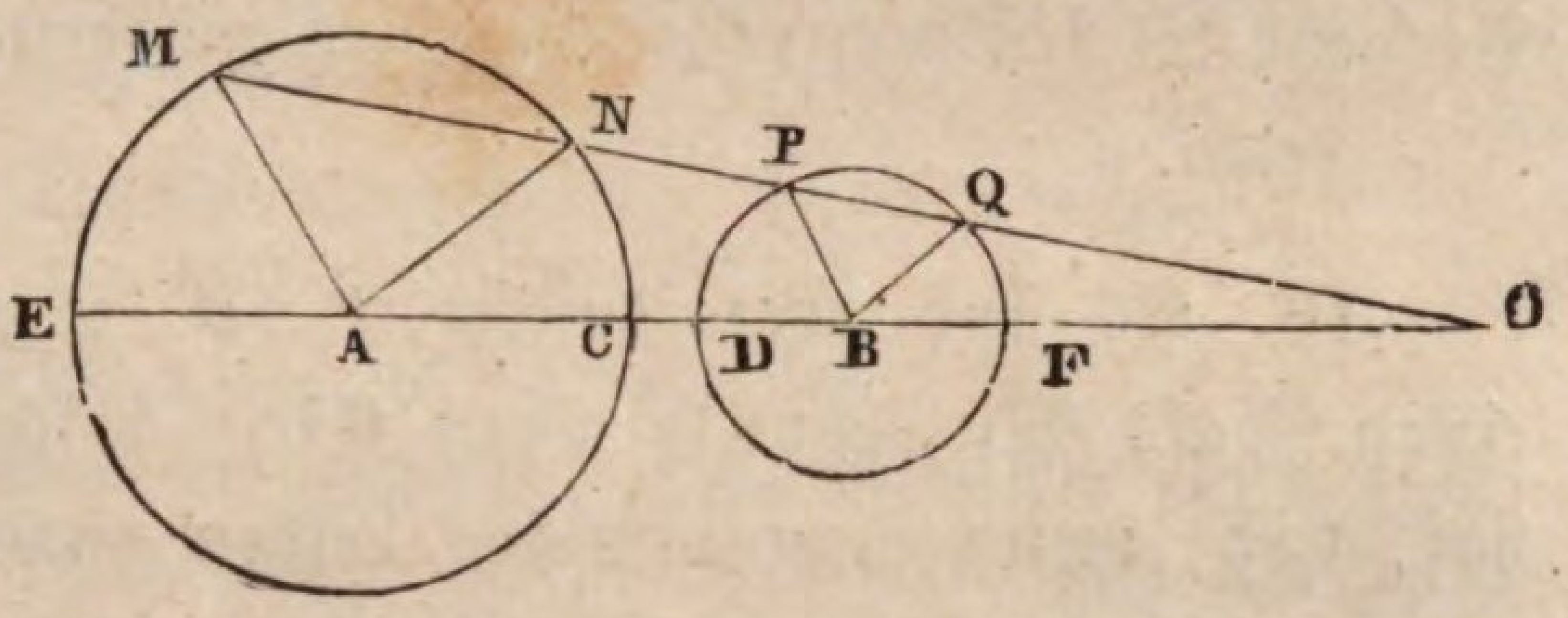
* 12. Satz. Zieht man aus einem außerhalb eines der Kreise

liegenden Aehnlichkeitspunkte eine Tangente an einen Kreis, so ist diese auch Tangente an dem anderen Kreise.

Leicht.

* 13. Satz. Zieht man durch einen Aehnlichkeitspunkt O zweier Kreise eine beliebige Secante, welche den einen Kreis in M, N, den anderen in P, Q trifft, so ist 1) das Verhältniß der Segmente zwischen O und den Endpunkten der parallelen Radien, nämlich $OM : OP$ oder $ON : OQ$ ein constantes, nämlich das der Radien; 2) das Rechteck aus den Segmenten zwischen O und den Endpunkten der nicht parallelen Radien $OM \cdot OQ$ oder $ON \cdot OP$ constant, und zwar dem Rechtecke aus den Segmenten auf der Centrale $OC \cdot OD$ oder $OF \cdot OE$ gleich.

Fig. 245.



Der Beweis der ersten Behauptung ist leicht, der der zweiten Behauptung stützt sich darauf, daß gezeigt wird, daß $NCDP$ und $EMQF$ Kreisvierecke sind.

Zweiter Abschnitt.

Aufgaben über den Kreis.

14. An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

1. Lösung. Man denke sich die Aufgabe gelöst, die Mittelpunkte mit einander und mit den Berührungspunkten der gemeinschaftlichen Tangente verbunden, dann durch den einen der Mittelpunkte eine Parallele mit der gemeinschaftlichen Tangente gezogen. Es entsteht hierdurch ein rechtwinkeliges Dreieck, welches sich leicht construiren läßt. Zu derselben Lösung gelangt man, wenn man sich die Radien beider Kreise um den kleineren Radius vermindert oder vermehrt denkt und die Aufgabe auf III. 34 zurückführt.

Eine zweite Lösung mit Hülfe des Aehnlichkeitspunktes erhält man durch Anwendung des Satzes 12 dieses Capitels.

15. Eine Linie zu ziehen, welche zwei der Lage nach gegebene Kreise so schneidet, daß die innerhalb der Kreise fallenden Stücke von gegebener Größe werden.

Auf III. 15 und auf die vorhergehende Aufgabe zu stützen.

16. In einen Kreis eine Sehne zu ziehen, welche durch zwei der Lage nach gegebene Radien in drei gleiche Theile getheilt wird.

Auf V. 40 zu stützen.

17. Auf Grund des Satzes 1 dieses Capitels (Seite 212) denjenigen Punkt des Kreises zu finden, für welchen die durch die Fußpunkte der Perpendikel bestimmte Gerade einer gegebenen geraden Linie parallel ist.

Leicht.

18. Es sind drei Punkte A, B, C gegeben. Man soll um den einen C als Mittelpunkt einen Kreis beschreiben, der die Eigenschaft hat, daß, wenn man von den beiden anderen Punkten A und B Tangenten AX und BY an denselben zieht, diese sich unter einem gegebenen Winkel α schneiden.

Auf III. 36 und 17 zu stützen.

19. Ein Kreis und zwei Tangenten seien gegeben; eine dritte Tangente an den Kreis zu ziehen, deren zwischen die beiden ersten fallendes Stück von gegebener Länge sei.

Man denke sich die Aufgabe gelöst und construire einen zweiten Kreis, der sowohl die gesuchte Linie als die beiden gegebenen Linien, und zwar innerhalb desselben Winkels berührt, worin der gegebene Kreis liegt, und suche mit Hülfe von III. 17 diesen Kreis aus den gegebenen Linien zu bestimmen. Die Aufgabe ist hierdurch auf 14 dieses Capitels zurückgeführt.

* 20. Durch zwei gegebene Punkte A, B einen Kreis zu ziehen, welcher eine gegebene gerade Linie MN berührt.

Verlängert man AB bis zum Durchschnitte C mit MN, so läßt sich, wenn der Berührungspunkt X genannt wird, die Linie CX finden (IV. 32). Die Aufgabe ist hierdurch auf IV. 32, Zusatz 2, zurückgeführt.

Wie viele Kreise giebt es von verlangter Eigenschaft? — Determination.

Eine zweite Lösung ergiebt sich, wenn man unmittelbar darauf ausgeht, den Mittelpunkt zu finden. Man errichte deßhalb auf AB in der Mitte eine Senkrechte, welche die gegebene Gerade in D treffe; dieselbe enthält den Mittelpunkt Y. Im Dreiecke BYD kann nun das Verhältniß $BY : YD$ gefunden werden, woraus sich die Lage des Punktes Y ergiebt.

* 21. Gegeben zwei gerade Linien und ein Punkt; durch den letzteren einen Kreis zu ziehen, der die beiden Linien berührt.

Die Halbirungslinie des Winkels der beiden Geraden geht durch den Mittelpunkt des gesuchten Kreises und giebt zu dem gegebenen Punkte leicht einen zweiten, durch welchen der gesuchte Kreis gehen muß. Die Aufgabe ist somit auf die vorhergehende zurückgeführt.

22. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu ziehen, welcher von einer gegebenen geraden Linie ein Stück *XY* abschneidet gleich einer gegebenen Linie *p*.

Auf IV. 32, Zusatz 1, und auf V. 67 zu stützen. — Determination.

* 23. Durch zwei gegebene Punkte *B* und *D* einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis berührt.

Auf S. 7, Zusatz, dieses Capitels zu stützen. — Determination.
Wie viele Kreise giebt es von verlangter Eigenschaft?

Eine zweite Lösung erhält man, wenn man sich auf V. 59, Zusatz, stützt. *AEC* sei der gegebene Kreis, *BDA* der gesuchte. Man denke sich die Aufgabe gelöst, ziehe am Endpunkte *C* (siehe Figur zu V. 59) der mit *BD* parallelen Sehne eine Tangente bis zum Durchschnitte *F* mit der *BD*, und suche die *BF* durch eine vierte Proportionale zu bestimmen.

24. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu beschreiben, der a) einen gegebenen Kreis halbirt, oder b) einen gegebenen Kreis so in zwei Punkten schneidet, daß die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise von gegebener Größe wird.

Auf IX. 7, und bei b) noch auf V. 67 zu stützen.

25. Aufg. Durch zwei gegebene Punkte *A* und *B* einen Kreis zu beschreiben, der von einer der Lage nach gegebenen Secante *DE* in zwei eines gegebenen Winkels fähige Segmente getheilt wird.

Der Mittelpunkt des verlangten Kreises sei *C*; der gesuchte Kreis schneide *DE* in *X*, *Y*. *C* liegt demnach in dem auf *AB* in der Mitte errichteten Lothe. Dieses Loth treffe *DE* in *G*. Zieht man *CY*, *CG*, so sind vom Dreiecke *CGY* die Winkel *CGY* und *CYG* gegeben, daher auch das Verhältniß von *CG* zu *CY* und, da $CY = CB$, auch das Verhältniß von *CG* zu *CB*. Hierdurch läßt sich die Lage von *C* bestimmen.

26. Es seien gegeben zwei Kreise und ein Punkt *A* auf einem derselben. Durch den Punkt *A* eine gerade Linie *XY* zu ziehen, welche den einen Kreis in *X*, den anderen in *Y* so schneidet, daß das Rechteck $XA \cdot AY$ einem gegebenen Quadrate gleich werde.

Man fällt von *Y* eine Senkrechte auf den durch *A* gehenden Durchmesser und suche den Fußpunkt dieser Senkrechten zu bestimmen.

27. Durch einen gegebenen Punkt *A* eine gerade Linie zu ziehen, die eine gegebene Kreisperipherie in den Punkten *X* und *Y* so trifft, daß das Rechteck $AX \cdot XY$ einem gegebenen Quadrate m^2 gleich werde.

Leicht mit Hülfe von IV. 32 zu lösen.

28. Von zwei Punkten in der Peripherie eines Kreises nach einem dritten zwei gerade Linien so zu ziehen, daß sie von einer der Lage nach gegebenen Geraden ein Stück von gegebener Größe *m* abschneiden.

Man denke sich die Aufgabe gelöst und lege durch einen der Punkte mit der der Lage nach gegebenen Linie eine Parallele gleich der Linie *m*, vollende aus diesen gleichen und parallelen Linien das Parallelogramm, wodurch sich die Auflösung leicht ergiebt.

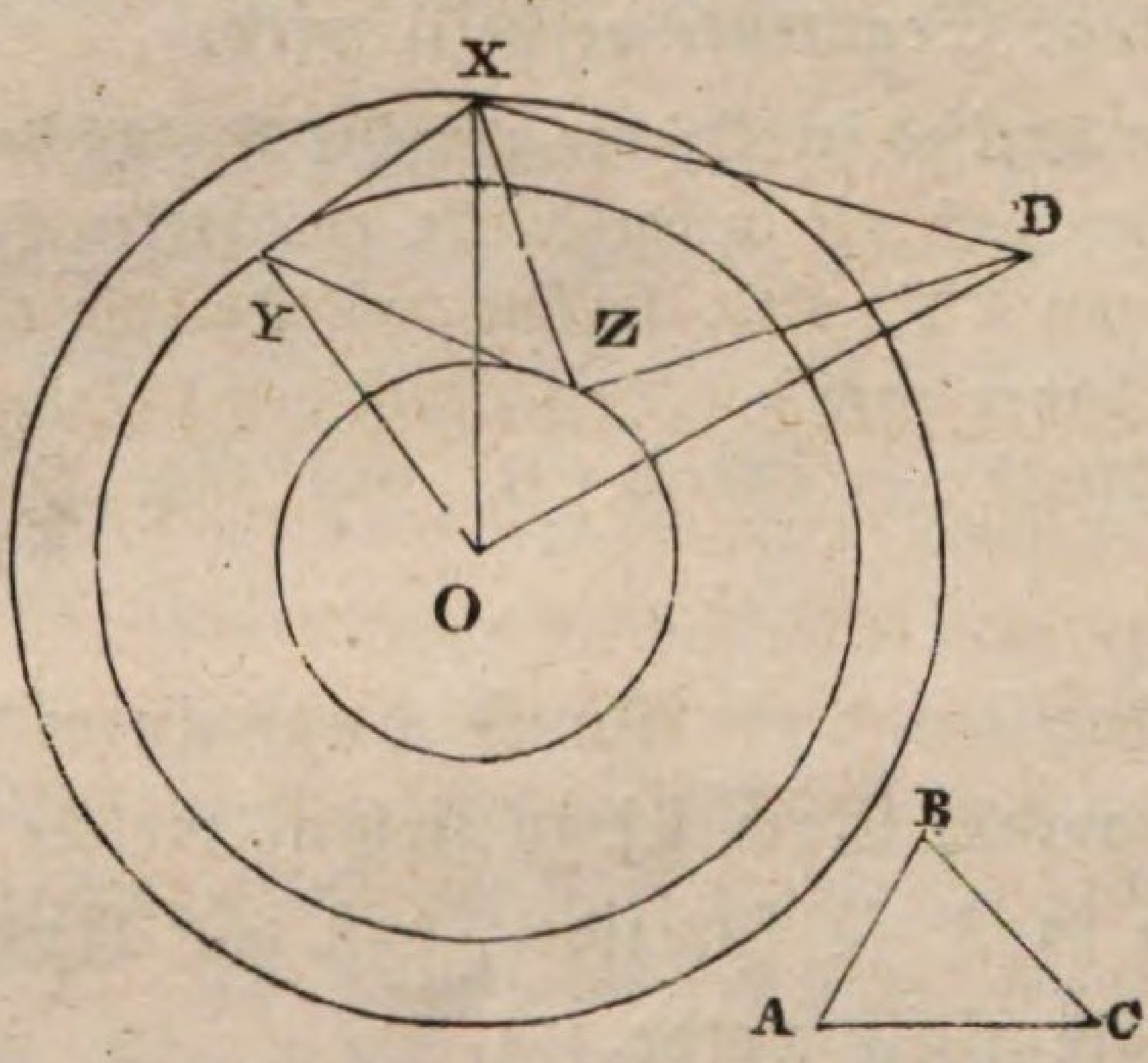
29. In einem Kreise ist eine Sehne *AB* gegeben. Man soll einen Punkt *X* der Peripherie so bestimmen, daß, verbindet man ihn mit *A* und *B*, $AX \cdot XB = (AX - XB)^2$ werde.

Halbirt man den Winkel *AXB* durch *XD*, so wird man durch Anwendung von V. 49, in Verbindung mit der Bedingung der Aufgabe, nach einigen Schlüssen dahin geführt, daß, wenn *E* die Mitte von *AB*, $ED^2 = \frac{1}{2}AE^2$, wodurch der Punkt *D* bestimmt ist.

30. In dem Bogen *AB* eines Kreisquadranten einen Punkt *X* so zu finden, daß die an ihn gezogene und von den verlängerten Radien *CA* und *CB* begrenzte Tangente *YZ* durch den Berührungspunkt *X* in zwei Theile *YX* und *XZ* getheilt wird, die in einem gegebenen Verhältniß $m : n$ zu einander stehen.

Auf V. 84, b, zu stützen.

Fig. 446.



31. Ein Dreieck *XYZ* zu construiren, ähnlich einem gegebenen *ABC*, dessen Spitzen in drei gegebenen concentrischen Kreisperipherieen liegen.

Es sei *XYZ* das verlangte Dreieck. Man beschreibe über dem Radius *XO* ein Dreieck *XOD*, ähnlich dem gegebenen *ABC*, verbinde *Z* mit *D*, und *Y* mit *O*, und vergleiche △ *XZD* mit △ *XOY*, woraus sich *ZD* ergeben wird.

Determination.

32. Auf dem Halbmesser *AB* eines Kreises zwei gleichschenkelige Dreiecke *AYX* und *XZB* zu beschreiben, die einander ähnlich sind und mit den Spitzen *Y* und *Z* den Kreis berühren.

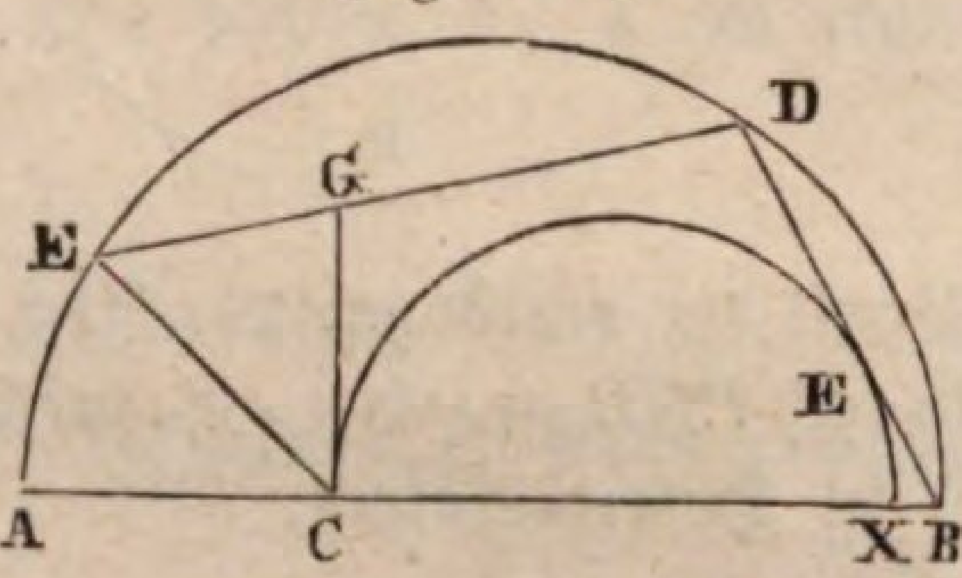
Man suche zu beweisen, daß einer der gleichen Schenkel des kleineren Dreiecks der Grundlinie des größeren Dreiecks gleich ist, und führe die Aufgabe auf V. 68 zurück.

33. Auf dem einen Schenkel BC eines gegebenen Winkels ABC' welcher durch BD halbirt ist, seien zwei Punkte E und F gegeben. Es soll auf dem anderen Schenkel AB ein Punkt X gesucht werden, daß von den Verbindungslinien XE und XF durch die Halbirungslinie BD des Winkels gleiche Stücke XM und XN abgeschnitten werden.

Man lege durch EFX einen Kreis und zeige mit Hülfe von III. 20 3. Umkehrung, daß jener Kreis die Linie BA berührt. Die Aufgabe wird alsdann auf 20 dieses Capitels zurückgeführt.

34. Gegeben ein Halbkreis ADB und ein auf dem Durchmesser AB liegender Punkt C; einen Punkt X zu finden, so daß, wenn man über CX einen zweiten Halbkreis beschreibt und von B aus an ihn eine Tangente BED zieht, das zwischen dem Berührungspunkte E und dem ersten Halbkreise liegende Stück $ED = AC$ werde.

Fig. 247.



1. Lösung. Man denke sich die Aufgabe gelöst, errichte in C auf CA eine Senkrechte $CG = CA$, ziehe DG bis zum Durchschnitte E mit dem Halbkreise, ziehe CE und suche zu beweisen, daß $\angle ACE = \angle ECG$, woraus sich die Construction ergiebt.

2. Lösung. Man ziehe wie oben CG, ziehe AG bis zum Durchschnitte O mit dem Halbkreise, und suche zu beweisen, daß $OD = OG$. Aus dieser Eigenschaft ergiebt sich die Construction leicht.

Wie viele Kreise giebt es von verlangter Eigenschaft?

35. Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt O zwei auf einander senkrecht stehende Sehnen AB, CD zu ziehen, deren Verhältniß ein gegebenes $m : n$ ist.

Anleitung. Aus $AB : CD = m : n$ folgt:

$$AB^2 + CD^2 : CD^2 = m^2 + n^2 : n^2.$$

Zerlegt man AB^2 und CD^2 nach IV. 5 und berücksichtigt den S. VII. 74, so ergiebt sich die Summe $AB^2 + CD^2$ als bekannt; CD läßt sich hiernach aus der Proportion finden, und somit ist die Aufgabe auf III. 35 zurückgeführt. — Determination.

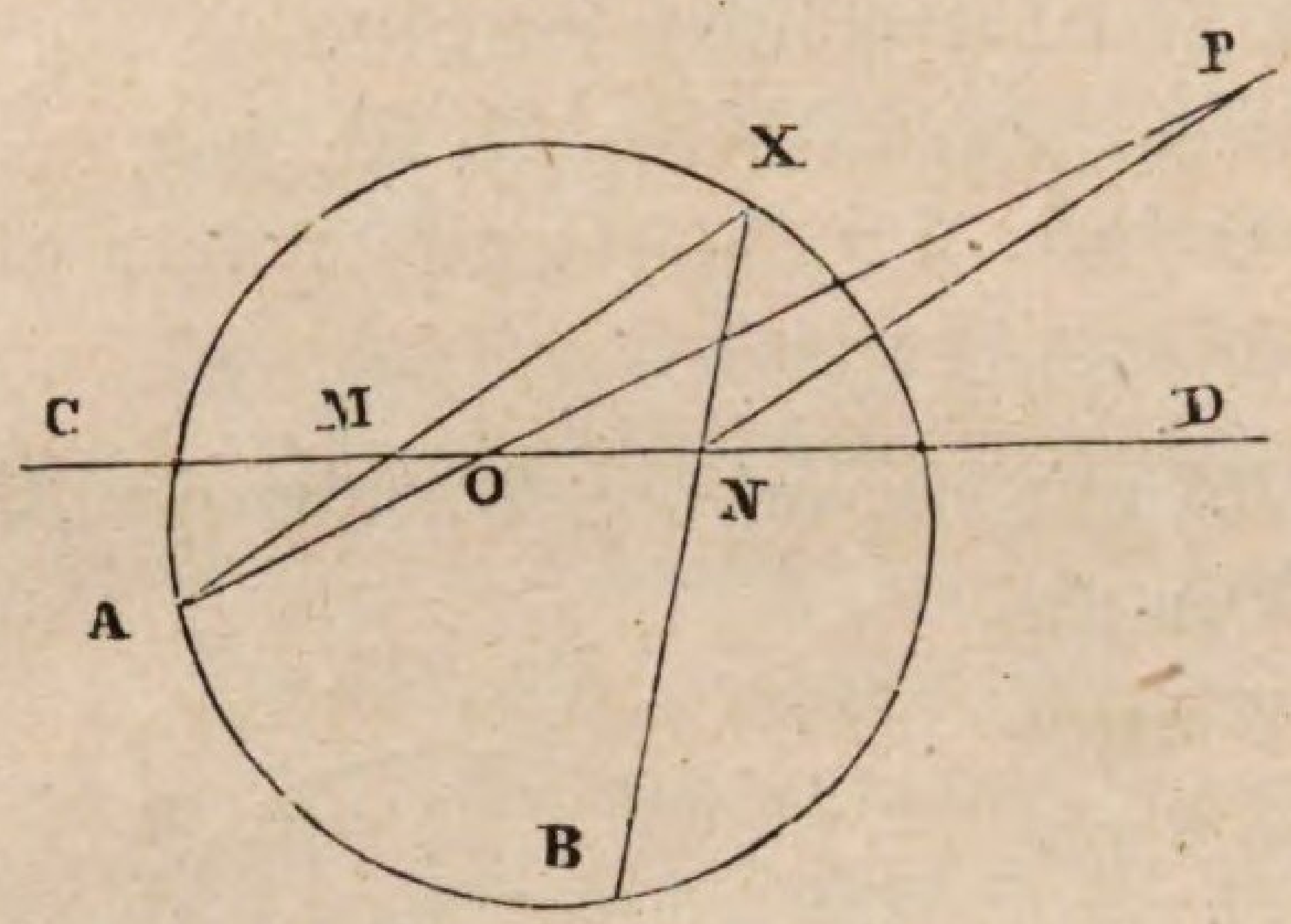
36. Satz. Wenn man in die vier Dreiecke, deren jedes von zwei Seiten eines Kreisvierecks und einer Diagonale gebildet wird, Kreise einschreibt, so sind die Mittelpunkte dieser vier Kreise die Eckpunkte eines Rechtecks.

Es ist zuerst zu zeigen, daß die Mittelpunkte je zweier Kreise, welche die Seiten zweier Dreiecke berühren, die eine Vierecksseite gemeinschaftlich haben,

mit den Endpunkten dieser Viereckseite in einem Kreise liegen. Hieraus ergiebt sich die Richtigkeit der Behauptung.

37. Es seien gegeben ein Kreis, zwei Punkte A, B im Umfange desselben, ferner eine gerade Linie CD und ein Punkt O auf derselben; es soll auf der Peripherie des Kreises ein Punkt X gesucht werden, dessen Verbindungslinien mit A und B auf CD zwei Segmente OM, ON abschneiden, deren Verhältniß gegeben ist.

Fig. 248.



Man ziehe durch N eine Parallele mit AX bis zum Durchschnitte P mit der verlängerten AO; alsdann wird P ein gegebener Punkt sein. Auch ist $\angle PNB$ gegeben, wodurch die Aufgabe auf III. 36 zurückgeführt ist.

Determination.

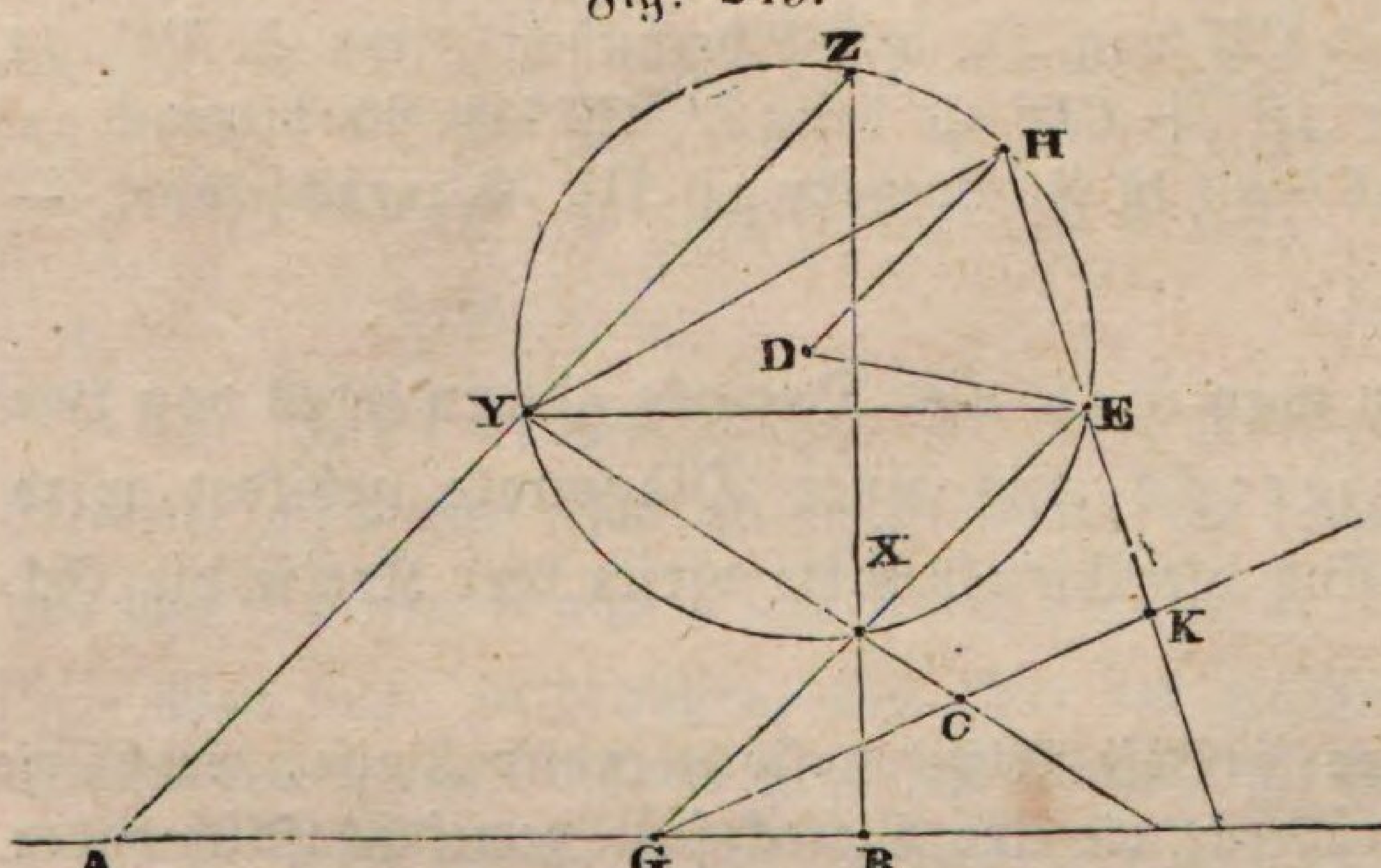
38. Satz. Wenn in einem Vierecke die Summe der Rechtecke aus den gegenüber stehenden Seitenpaaren dem Rechtecke aus den Diagonalen gleich ist, so ist dasselbe ein Kreisviereck (Umkehrung des Ptolemäischen Lehrsatzes V. 86.)

Der Satz ist indirect zu beweisen. Ginge der durch drei Punkte beschriebene Kreis nicht durch den vierten, so läge derselbe entweder außerhalb oder innerhalb des Kreises u. s. w.

39. Satz. Die Kreisfläche ist das geometrische Mittel zwischen der Fläche eines ihr umschriebenen regulären Vielecks und der eines ähnlichen Vielecks, welches mit dem Kreise gleich großen Umfang hat (isoperimetrischen).

Der Beweis gründet sich auf VI. 6 und 26.

Fig. 249.



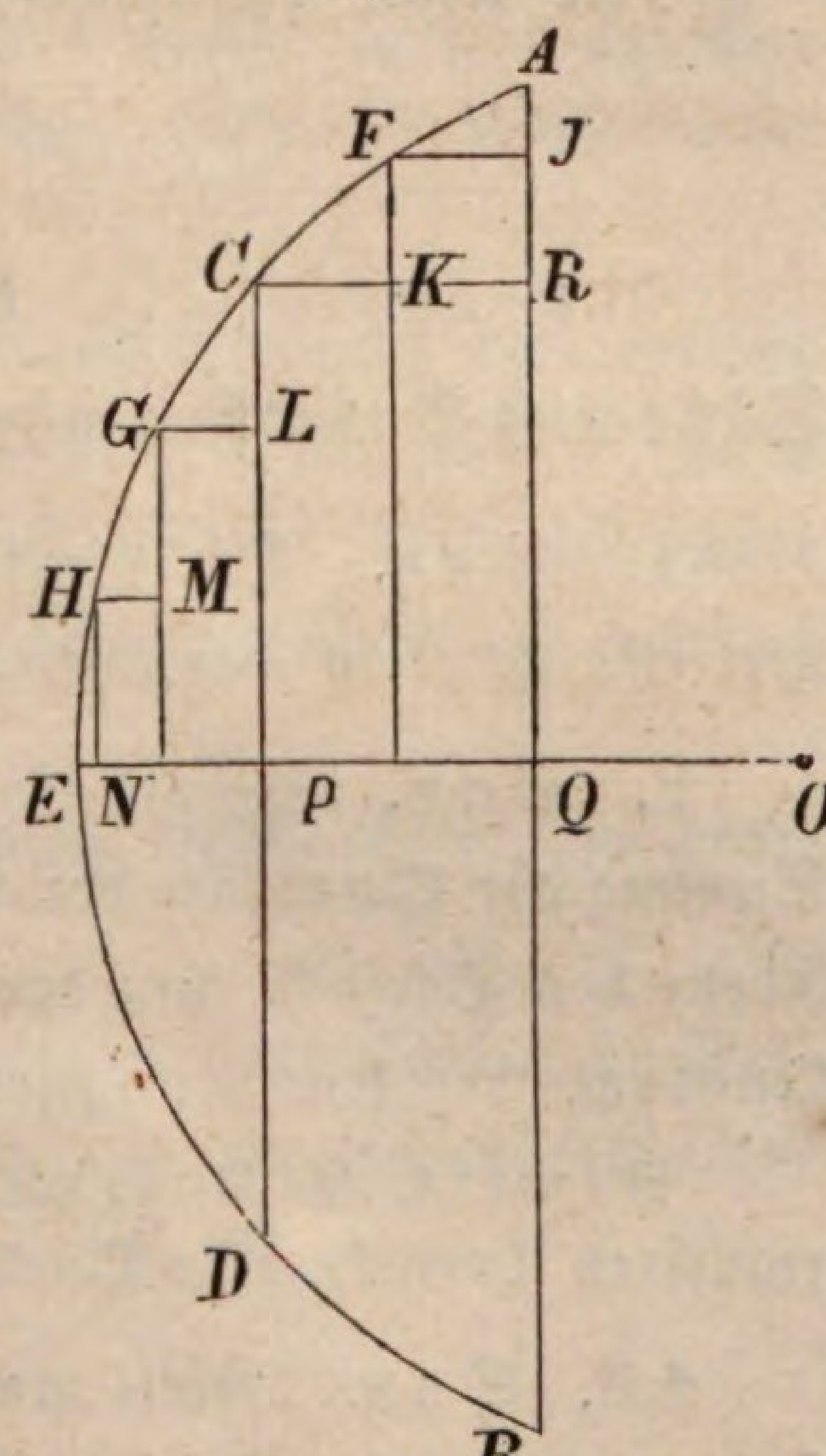
40. Aufg. Es seien ein Kreis gegeben und außerhalb oder innerhalb desselben drei beliebige Punkte; ein Dreieck in den Kreis zu zeichnen, dessen Seiten durch die drei gegebenen Punkte gehen.

Es sei D der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, A, B, C seien die gegebenen Punkte, und XYZ sei das gesuchte Dreieck, dessen Seiten YZ, ZX, YX bezüglich durch die Punkte A, B, C gehen.

Man ziehe durch Y mit AB die parallele Sehne YE, ziehe EX bis zum Durchschnitte G mit AB. Leicht läßt sich mit Hülfe ähnlicher Dreiecke nun nachweisen, daß $GB \cdot BA = XB \cdot BZ$. Der Punkt G der Linie AB ist hiernach gegeben. Man verbinde nun G mit C, ziehe mit GC die parallele Sehne YH, ziehe HE bis zum Durchschnitte K mit GC. In ähnlicher Weise wie oben läßt sich nun zeigen, daß $CG \cdot GK = XG \cdot GE$; der Punkt K wird hiernach also auch gegeben sein. Da der Peripheriewinkel $HYE = \sphericalangle\, KGB$, so ist derselbe bekannt, somit auch der Mittelpunktswinkel HDE. Es ist also auch der Winkel DEK bekannt, und es läßt sich somit, da D und K bekannt sind, mit Hülfe von III. 36 der Punkt E finden. Die Punkte X, Y, Z ergeben sich hieraus leicht.

41. Satz. Das Verhältniß zweier Kreisbogen von gleichem Radius, und zwar eines größeren zu einem kleineren ist stets größer als das Verhältniß ihrer zugehörigen Sehnen.

Fig. 250.



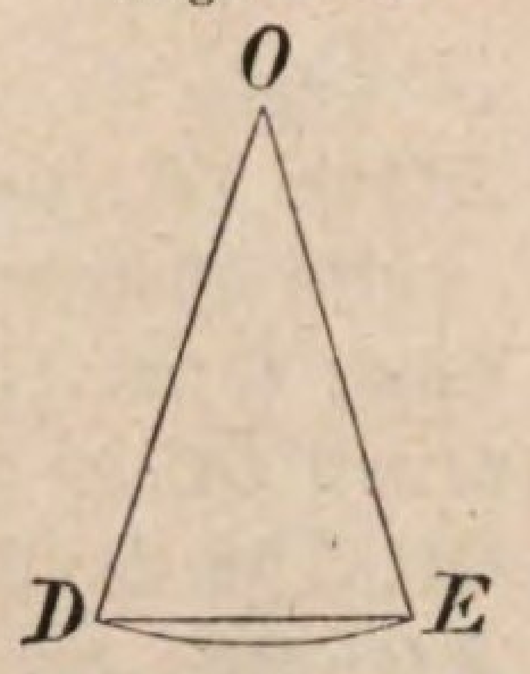
Beweis. Die Bogen seien AEB, CED, die zugehörigen Sehnen AB, CD; E sei die gemeinschaftliche Mitte beider Bogen, daher Radius OE auf AB und CD senkrecht. Sind nun 1) die Bogen AEB, CED oder deren Hälften AE, CE commensurabel und verhalten sie sich wie $m:n$, so theile man AE in m gleiche Theile, n derselben gehen auf CE, $m-n$ derselben auf AC. Aus den Theilpunkten F, G, H .. ziehe man Perpendikel auf OE, auch Parallelen mit OE und die Sehnen AF, FC, CG ... Da diese unter einander gleich sind, dagegen $\sphericalangle\, AFJ < FCK < CGL$ ... so ist auch $AJ < FK$, $< CL < GM < HN$. Daraus folgt: $CP > n.\, CL$, $AR < (m-n)\, CL$, hieraus $n.AR < (m-n)\, n\, CL < (m-n)\, CP$, $n\,(AR + CP) = n.\, AQ < m.CP$. Es ist also: $AQ : CP$ der $AB : CD < m : n$, d. i. $AB : CD < AEB : CED$, oder umgekehrt Bogen $AEB : CED > AB : CD$. Der Beweis für den Fall der Incommensurabilität der Bogen ist indirect zu führen.

42. Satz. Von zwei Bogen, welche eine gleiche Sehne haben, ist derjenige der größere, welcher mit einem kleineren Radius beschrieben ist.

Fig. 251.



Fig. 252.



Beweis. Die Bogen seien AB und DE, C und O die Mittelpunkte der Kreise, wozu beide gehören, Sehne AB sei ferner gleich Sehne DE. Ist $DO < AC$, so wird Bogen $DE >$ Bogen AB sein.

Es ist, wenn man aus C mit OD als Radius einen Kreis MN beschreibt, der AC und CB in M und N schneidet und wenn man Sehne MN zieht:

Bogen DE : Bogen $MN >$ Sehne DE : Sehne MN (41)
$>$ {Sehne AB : Sehne MN
{Bogen AB : Bogen MN

Es ist somit Bogen $DE >$ Bogen AB.

X. Capitel.

Sätze und Aufgaben über den Inhalt der Figuren.

Erster Abschnitt.

Sätze und Aufgaben über Summe und Differenz der Quadrate.

1. Satz. Die vierfache Quadratsumme der Mittellinien eines Dreiecks ist gleich der dreifachen der drei Seiten. — Leicht.

2. Satz. Es sei ein reguläres Dreieck gegeben; wie groß ist die Summe der Quadrate der Entfernungen irgend eines Punktes in der Ebene des Dreiecks von den drei Eckpunkten, wie groß die Summe der Quadrate der Entfernungen von den vier Eckpunkten eines Vierecks?

Bemerk. Es werde das Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkte des regulären Drriecks oder Quadrats berücksichtigt.

* 3. Satz. Fällt man aus einem beliebigen Punkte O auf die drei Seiten AB, AC, BC eines Dreiecks ABC die Senkrechten OX, OY, OZ, so ist:
$$AX^2 + BZ^2 + CY^2 = XB^2 + ZC^2 + YA^2.$$

* 4. Wie wird die Umkehrung des vorhergehenden Satzes bewiesen, und wie läßt sich mit Hülfe dieser Umkehrung beweisen, daß die Höhenperpendikel eines Dreiecks in einem Punkte zusammentreffen? (II. 52.)

5. Gilt der Satz 3 auch für irgend ein Vieleck?

6. Satz. Theilt man eine Dreiecksseite AC eines Dreiecks ABC in zwei commensurable Theile AD, DC und verhält sich $AD : DC = m : n$, und verbindet man noch D mit B, so ist:

$$n \cdot AB^2 + m \cdot BC^2 = \frac{mn}{m+n} AC^2 + (m+n) BD^2.$$

Wird auf ähnliche Art, wie IV. 19, von welchem dieser Satz eine Erweiterung ist, bewiesen.

7. Satz. Die Summe der Quadrate über den Diagonalen eines Vierecks ist doppelt so groß, als die Summe der Quadrate über den Verbindungslinien der Halbirungspunkte der Gegenseiten.

Auf IV. 29 zu stützen.

8. Satz. Verbindet man einen beliebigen Punkt des Durchmessers eines Kreises mit den Endpunkten einer dem Durchmesser parallelen Sehne, so ist die Summe der Quadrate der Verbindungslinien der Summe der Quadrate der Stücke des Durchmessers gleich.

Der Satz ist auf IV. 26 oder 27 und auf IV. 21, Zus. 2, zu gründen.

Wie ändert sich der Satz, wenn die parallele Sehne in eine parallele Tangente übergeht? Findet derselbe Satz auch Statt, wenn ein Punkt in der Verlängerung des Durchmessers genommen wird?

9. Satz. Die drei Höhenperpendikel eines Dreiecks ABC theilen sich gegenseitig in zwei Segmente. Das Quadrat eines jeden an einer Ecke liegenden Segmentes macht mit dem Quadrate der gegenüber stehenden Seite des Dreiecks das Quadrat des Durchmessers des um das Dreieck beschriebenen Kreises aus.

Der Beweis ergiebt sich, wenn man das Dreieck GHJ, II. 51, zu Hülfe nimmt.

10. Aufg. Eine gegebene gerade Linie in zwei Theile zu theilen, so daß das Rechteck aus den beiden Theilen dem Unterschiede der Quadrate der beiden Theile gleich werde.

Mit Hülfe von IV. 7 und V. 67 zu lösen.

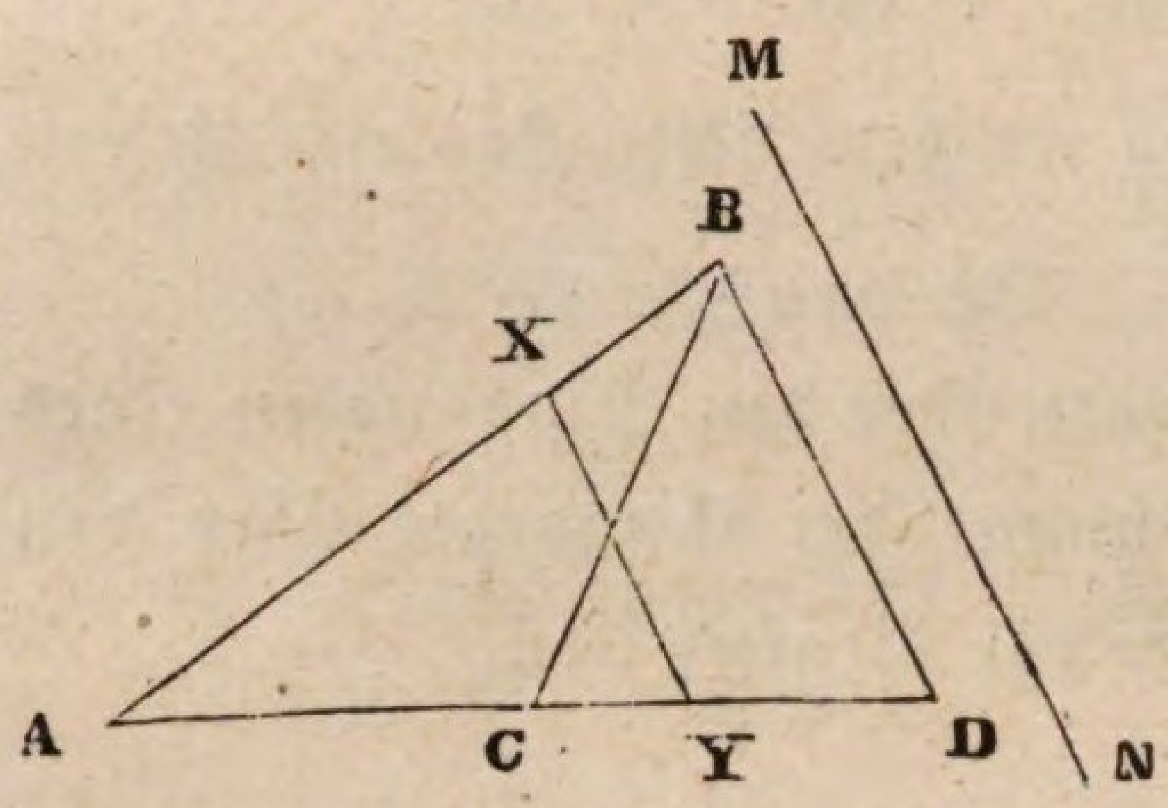
11. Aufg. Eine gegebene gerade Linie AB im Punkte X so zu theilen, daß das Quadrat des einen Theiles dem Rechtecke aus dem anderen Theile und einer gegebenen Linie m gleich werde.

Mit Hülfe von V. 26 und V. 67 zu lösen.

Zweiter Abschnitt.

Aufgaben über Verwandlung und Theilung der Figuren.

Fig. 253.



***12.** Ein Dreieck ABC in ein anderes AXY zu verwandeln, das mit demselben gleichen Winkel A hat und dessen Seite XY parallel einer gegebenen geraden Linie MN ist.

Man lege durch die Spitze B eine Parallele mit MN bis zum Durchschnitte D mit AC, und suche aus AC und AD die AY zu bestimmen.

***13.** Ein beliebiges Dreieck ABC in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Man verwandle zuerst das Dreieck in ein anderes von gleicher Grundlinie und mit einem Winkel an der Grundlinie gleich $\frac{2}{3}$ R, und suche zu den beiden, diesen Winkel einschließenden Seiten die mittlere Proportionale, wodurch man die Seite des verlangten Dreiecks erhält.

Eine zweite Lösung erhält man, wenn man das Dreieck zuerst in ein gleichschenkeliges Dreieck verwandelt von derselben Grundlinie, und über der letzteren ein gleichseitiges Dreieck errichtet. Man suche die Höhe des zu construirenden Dreiecks aus den Höhen der beiden Dreiecke abzuleiten.

14. In einem Dreiecke ABC einen Punkt zu bestimmen, der so liegt, daß die Linien, welche ihn mit den Ecken A, B, C verbinden, das Dreieck in drei gleiche Theile theilen.

Leicht.

***15.** Ein Dreieck ABC durch Linien, welche von einem im Umfange liegenden Punkte O ausgehen, in mehrere, z. B. in vier, gleiche Theile zu theilen.

Von der gegenüber stehenden Spitze zerlege man das Dreieck in vier gleiche Theile. Die obige Aufgabe ist hierdurch auf IV. 18 zurückgeführt.

Die Aufgabe läßt sich allgemein behandeln, wenn das Dreieck in Theile getheilt werden soll, welche in einem gegebenen Verhältnisse $p : q : m : n$ stehen.

***16.** Ein Dreieck ABC durch Linien, welche von einem innerhalb liegenden Punkte ausgehen, in mehrere Theile zu theilen, die in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen.

Die Aufgabe ist unbestimmt, da eine Theilungslinie von O aus willkürlich

gelegt werden kann. Man ziehe daher AO und betrachte diese Linie als Theilungslinie. Die Lösung ist leicht.

Die Aufgabe läßt sich auch dadurch lösen, daß man zuvor das gegebene Dreieck in ein anderes verwandelt, dessen Spitze statt in A, in O liegt u. s. w.

17. Aufg. Ein Dreieck ABC ist durch eine aus der Spitze A gezogene Gerade AD in zwei Theile getheilt. Man soll von B aus eine gerade, die AD in X, die AC in Y so schneidende Linie ziehen, daß $\triangle ABX =$ Viereck $DXYC$ werde.

Leicht.

18. Gegeben sei ein Dreieck ABC und eine Parallele DE mit der Seite BC. Aus A eine Gerade AX nach einem Punkte X der Grundlinie zu ziehen, welche die DE in einem Punkte O so schneidet, daß $\triangle ABX = \triangle AOE$ werde.

Auf V. 80, 82 und VII. 88 zu stützen.

19. Aufg. Ein gegebenes Viereck in ein Trapez zu verwandeln, welches mit demselben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gemeinschaftlich hat.

Auf Aufgabe 12 dieses Capitels zu stützen.

20. Ein Paralleltrapez durch eine Linie senkrecht auf der Grundlinie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Man verwandle das Paralleltrapez in ein ihm gleiches Parallelogramm u. s. w.

21. Ein Paralleltrapez durch Linien parallel mit der Grundlinie in mehrere gleiche oder proportionirte Theile zu theilen.

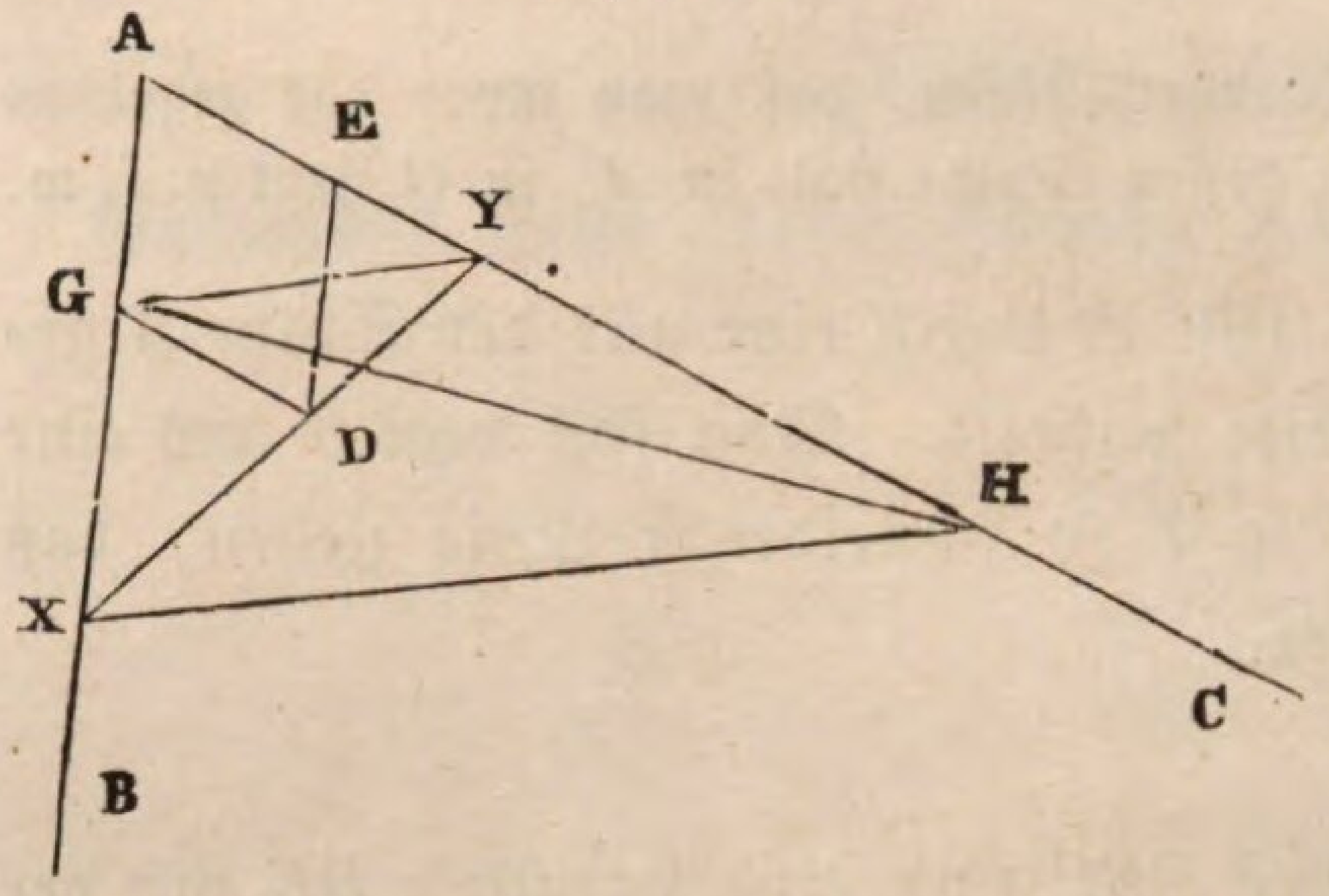
Man verlängere die nicht parallelen Seiten und suche die Aufgabe auf die 12. Aufgabe dieses Capitels zurückzuführen.

22. Ein gegebenes Polygon $ABCDEFG$ durch Linien, die alle von einem gegebenen Punkte O innerhalb desselben ausgehen, in Stücke zu theilen, welche gegebenen Linien m, n, o, p, q, r proportional sind.

Es kommt darauf an: 1) das Polygon in ein Dreieck zu verwandeln, welches O zur Spitze hat und dessen Grundlinie in der Richtung einer der Seiten liegt; hierauf 2) dieses Dreieck durch Linien, die von O ausgehen, in Theile nach dem gegebenen Verhältnisse zu theilen; 3) diese Theile durch successive Verwandlung in das Polygon einzutragen.

23. Durch einen gegebenen Punkt D eine gerade Linie XY zu ziehen, die mit zwei anderen, der Lage nach gegebenen geraden Linien AB und AC ein Dreieck von gegebenem Inhalte bildet.

Fig. 254.



Es sei XAY das verlangte Dreieck. Man ziehe $DE \parallel AX$, $DG \parallel AC$, verwandle die gegebene Figur, welcher AXY gleich werden soll, in ein Dreieck AGH, welches AG zur Seite und den $\sphericalangle A$ zum Winkel hat; dadurch wird $GY \parallel XH$. Es ist nun:

$$AH : HY = AX : XG = AY : GD.$$

Die Aufgabe ist demnach auf V. 67 zurückgeführt.

Im Allgemeinen giebt es zwei Lösungen. Liegt der Punkt D außerhalb des durch die beiden Linien AB, AC gebildeten Winkels, so ist die Auflösung immer möglich; liegt der Punkt D aber innerhalb des Winkels, so ist die Auflösung nur dann möglich, wenn $AE < \frac{1}{4}AH$.

24. Durch einen innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks gegebenen Punkt im ersten Falle in zwei, im zweiten Falle in mehrere Stücke zu theilen, welche mit einander in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Auf die vorhergehende Aufgabe zu stützen.

25. Ein Dreieck ABC durch eine Linie XY in zwei gleiche Theile AXY und $BXYC$ von gleichem Umfange zu theilen.

Aus den Bedingungen folgt bald, daß von den beiden Seiten AX und AY des gesuchten Dreiecks Summe und Rechteck gefunden werden können, wodurch die Aufgabe auf V. 67 zurückgeführt wird. Man untersuche 1) die speciellen Fälle, wenn das Dreieck gleichseitig und gleichschenkelig ist, 2) wie viele und welche Theilungslinien überhaupt im Dreiecke möglich sind, und 3) durch welchen merkwürdigen Punkt im Dreiecke jedesmal die Theilungslinie geht. — Determination.

Wie läßt sich die Theilungslinie algebraisch aus den Seiten a, b, c des Dreiecks ausdrücken?

XI. Capitel.
Geometrische Oerter.

Erster Abschnitt.
Geometrische Oerter im Allgemeinen. Chordale.

1. Definition. Unter einem ebenen geometrischen Orte eines Punktes ist diejenige in einer Ebene liegende Linie zu verstehen, deren sämmtliche Punkte mit Ausschluß aller anderen der Ebene einer gegebenen Bedingung genügen. Wird demnach ein Punkt gesucht, der dieser Bedingung entsprechen soll, so muß er in dieser Linie liegen.

In Zukunft soll, wenn von Ort schlechtweg die Rede ist, hierunter der ebene geometrische Ort verstanden werden.

2. Aufg. Den geometrischen Ort eines Punktes zu finden, wenn gegeben ist: a) die Entfernung desselben von einem gegebenen Punkte, b) die Entfernung von einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, c) die Entfernung von einer gegebenen Kreisperipherie, d) wenn er gleichen Abstand hat von zwei gegebenen Punkten, e) wenn er gleichen Abstand hat von zwei gegebenen geraden Linien.

Leicht.

3. Aufg. Welches ist der Ort der Spitze aller Dreiecke, welche auf einer gegebenen Grundlinie und nach derselben Seite liegen, wenn a) der Winkel an der Spitze, b) der Inhalt des Dreiecks gegeben ist?

Leicht.

4. Satz. Bewegt sich eine gerade Linie mit den beiden Endpunkten auf zweien festen sich rechtwinkelig durchschneidenden Linien, so ist der Ort des Mittelpunktes der Linie ein Kreis.

Auf III. 19, 1 zu stützen.

5. Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen die Differenz der Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten von ge-

gebener Größe (m^2) ist, ist eine gerade Linie, senkrecht auf der Verbindungslinie der beiden Punkte.

Mit Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes zu beweisen.

6. Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen die Summe der Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten von gegebener Größe ist, ist ein Kreis.

Auf IV. 29 zu stützen.

7. Satz. Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen das doppelte Quadrat der Entfernung von einem gegebenen Punkte nebst dem Quadrate der Entfernung von einem anderen gegebenen Punkte von gegebener Größe ist, ist ein Kreis; und allgemein, der Ort eines Punktes, für welchen das $m$fache Quadrat der Entfernung von einem gegebenen Punkte nebst dem $p$fachen Quadrate der Entfernung von einem anderen gegebenen Punkte eine gegebene Summe hat, ist ein Kreis.

Auf X. 6 zu stützen.

Zusatz. Beschreibt man aus dem Punkte eines Dreiecks, in welchem die drei Mittellinien zusammentreffen (dem Schwerpunkte), einen Kreis, so ist die Quadratsumme der Abstände eines beliebigen Punktes des Umfanges von den drei Spitzen des Dreiecks für alle Punkte dieselbe.

8. Aufg. Den Ort eines Punktes zu suchen, für welchen die Entfernungen von zwei gegebenen geraden Linien eine gegebene Summe oder Differenz haben.

Man suche zuerst diejenigen Punkte des Ortes zu bestimmen, welche in den gegebenen geraden Linien liegen, für welche Punkte eine der Entfernungen Null ist, verbinde diese Punkte und zeige, daß jeder Punkt der Verbindungslinie die ausgesprochene Eigenschaft besitzt.

9. Satz. Halbirt man zwei Innen- oder zwei Außenwinkel eines Dreiecks, verbindet die Punkte, worin die Halbirungslinien die gegenüber stehenden Seiten des Dreiecks treffen, durch eine gerade Linie, so ist diese Linie der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstand von einer der drei Seiten des Dreiecks so groß ist, als die Summe der Abstände von den zwei übrigen Seiten. — Leicht.

10. Zwei Ecken eines gleichseitigen Dreiecks liegen in den Schenkeln eines Winkels von $\frac{2}{3} R$; welches ist der geometrische Ort für die dritte Ecke?

Leicht.

11. Aufg. Das Verhältniß der Entfernungen eines Punktes von zwei gegebenen geraden Linien ist gegeben; den geometrischen Ort desselben zu finden.

Leicht. — Sind die beiden gegebenen Linien nicht parallel, so gibt es zwei Linien von verlangter Eigenschaft, welche beide durch den Durchschnittspunkt der gegebenen Linien gehen.

12. Aufg. Auf zwei der Lage und Größe nach gegebenen geraden Linien *AB*, *CD*, als Grundlinien, stehen zwei Dreiecke *AOB* und *COD* gleichen Inhalts und mit gemeinschaftlicher Spitze *O*; den geometrischen Ort dieser Spitze *O* zu finden.

Auf die vorhergehende Aufgabe zu stützen.

*13. Satz. Der Ort eines Punktes, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten ein gegebenes Verhältniß der Ungleichheit haben, ist ein Kreis *).

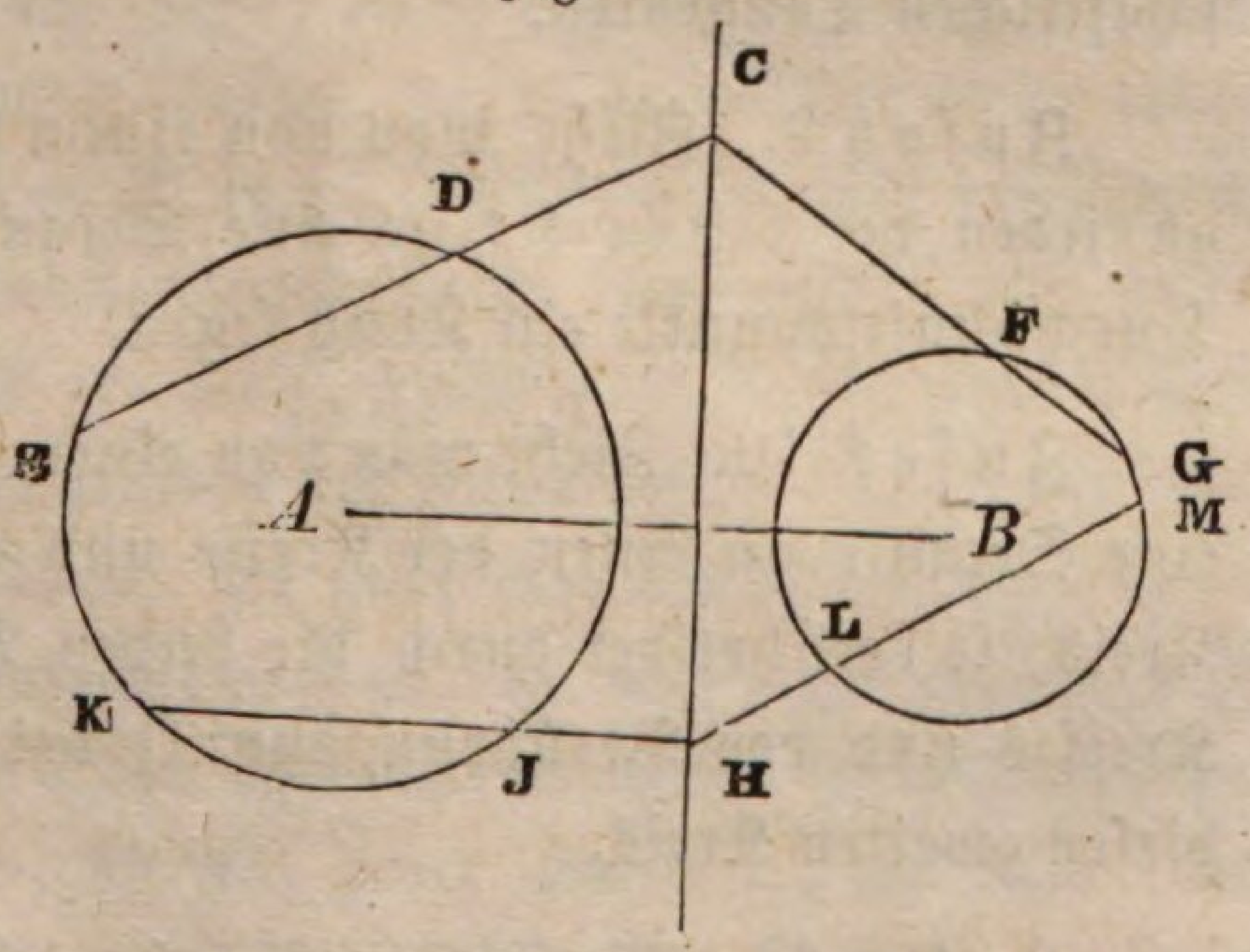
Man halbire die Winkel, welche beide Abstände mit einander bilden, und stütze den Satz auf V. 49, I. 13 und III. 20, 2.

*14. Satz. Legt man von einem Punkte *A* an einen gegebenen Kreis beliebige Secanten *AM*, *AN* u. s. w. und theilt dieselben entweder durch einen inneren oder äußeren Punkt (V. 61) in zwei Theile, die in einem gegebenen Verhältnisse $p : q$ stehen, so liegen sämmtliche innere Theilungspunkte einerseits und sämmtliche äußere Theilungspunkte andererseits auf einer Kreislinie.

Stützt sich auf IX. 13.

*15[a]. Erklärung. Potenz eines Punktes in Beziehung auf einen Kreis oder zu einem Kreise ist das Product oder Rechteck der beiden Segmente jeder durch jenen Punkt gehenden geraden Linie, welche zwischen ihm und dem Kreisumfange liegen.

Fig. 255.



15[b]. Satz. Der geometrische Ort eines Punktes, der in Beziehung auf zwei Kreise gleich große Potenzen hat, ist eine gerade Linie. Diese Linie heißt Linie der

*) Dieser Satz findet sich zuerst bei Apollonius (Conicorum Lib. I.).

gleichen Potenzen, auch die Chordale oder Radical-Achse der beiden Kreise.

Alle Punkte *C*, *H* u. s. w., für welche $CD \cdot CE = CF \cdot CG$ und $HJ \cdot HK = HL \cdot HM$ u. s. w. liegen auf einer geraden Linie *CH*. Zum Beweise drücke man die Potenz jedes der Punkte *C* oder *H* durch die Entfernung des Punktes *C* oder *H* vom Mittelpunkte des Kreises und durch den Radius des Kreises aus. Der Beweis ergiebt sich dann aus Satz 5 dieses Capitels.

Zusatz 1. Die Chordale steht auf der Centrale *AB* der beiden Kreise senkrecht.

Zusatz 2. Durchschneiden sich die beiden Kreise, so geht die Chordale durch die beiden Durchschnittspunkte der Kreise.

Zusatz 3. Berühren sich zwei Kreise, so ist die gemeinschaftliche Tangente der beiden Kreise ihre Chordale.

Zusatz 4. Liegen zwei Kreise ganz aus einander, so liegt die Chordale zwischen denselben.

Zusatz 5. Liegen zwei Kreise ganz in einander, so liegt die Chordale außerhalb derselben, und zwar nach der Seite des kleineren Kreises zu.

Zusatz 6. Die von einem außerhalb der Kreise liegenden Punkte der Chordale an die Kreise gelegten Tangenten sind einander gleich.

Zusatz 7. Die durch einen innerhalb der Kreise liegenden Punkt der Chordale in den beiden Kreisen gelegten kleinsten Sehnen (III. 16, Zusatz) sind einander gleich.

Zusatz 8. Die Chordale halbirt die an die Kreise gelegten gemeinschaftlichen Tangenten.

Zusatz 9. Zieht man von einem beliebigen Punkte der Chordale an jeden der beiden Kreise eine Secante, so läßt sich durch die vier Durchschnittspunkte ein Kreis legen.

Zusatz 10. Zieht man von einem beliebigen Punkte der Chordale eine Secante an einen der Kreise und eine Tangente an den anderen Kreis, so berührt der durch die beiden Durchschnittspunkte des erstern Kreises und den Berührungspunkt des zweiten Kreises gelegte Kreis diesen zweiten Kreis.

Zusatz 11. Mit Hülfe der vorhergehenden Sätze soll zu zwei Kreisen, welche keinen Punkt gemeinschaftlich haben, die Chordale gezogen werden.

Zusatz 12. Die drei Chordalen je zweier von drei Kreisen schneiden sich entweder in ein und demselben Punkte oder sind einander parallel, oder sie fallen in einander. — Der Durchschnittspunkt der drei Chordalen heißt der Chordalpunkt (auch das Radical-Centrum) der drei Kreise.

*16. Satz. Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Potenz zu einem gegebenen Kreise gleich ist dem Quadrate der Entfernung von einem der Lage nach gegebenen Punkte, ist eine gerade Linie, die Chordale für Kreis und Punkt.

Wie läßt sich dieser Satz auf den vorhergehenden zurückführen, und wie heißen die Zusätze des vorhergehenden Satzes in Bezug auf diesen Satz?

*17. Satz. Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise rechtwinkelig durchschneiden (Orthogonal-Kreise genannt), ist eine gerade Linie, nämlich die Chordale beider Kreise; eben so ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und einen gegebenen Kreis rechtwinkelig durchschneiden, eine gerade Linie.

Leicht.

Zweiter Abschnitt.

Aufgaben als Anwendungen der geometrischen Oerter.

18. Die geometrischen Oerter leisten zur Auflösung geometrischer Aufgaben wesentliche Dienste. Soll nämlich ein Punkt bestimmt werden, von dem man weiß, daß er auf irgend einer gegebenen Linie liegt und außerdem eine gewisse Eigenschaft besitzt, vermöge welcher er in einem zu construirenden Orte liegen muß, so ist seine Lage mittels des Durchschnittspunktes, oder der Durchschnittspunkte jener Linie und dieses Ortes bestimmt. Dasselbe ist der Fall, wenn der Punkt zwei Eigenschaften zugleich besitzt, die ihn einzeln auf einen geometrischen Ort verweisen, den man construiren kann. Es wird dem Schüler leicht werden, selbst eine Menge von Aufgaben aufzustellen, die in der genannten Weise mit Hülfe der vorhergehenden Sätze über Oerter gelöst werden können; Aufgaben von folgender Art: 1) Auf einer geraden Linie oder einer Kreislinie einen Punkt zu finden, a) für welchen die Summe der Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten bekannt ist, b) für

welchen die Summe oder Differenz der Entfernungen von zwei gegebenen geraden Linien einer gegebenen Linie gleich ist, c) dessen Entfernungen von zwei gegebenen Punkten in einem gegebenen Verhältnisse stehen, d) dessen beide an zwei gegebene Kreise gelegten Tangenten einander gleich werden u. s. w.; oder 2) einen Punkt zu suchen, a) der von drei gegebenen Punkten oder von drei gegebenen geraden Linien gleichen Abstand hat, oder b) der gleich weit von zwei gegebenen geraden Linien und auch gleich weit von zwei gegebenen Punkten entfernt ist, oder c) so daß die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von drei gegebenen Punkten einem gegebenen Quadrate gleich ist, und dessen Entfernungen von zwei gegebenen geraden Linien in einem gegebenen Verhältnisse stehen u. s. w. Nachfolgende Aufgaben und Sätze mögen berücksichtigt werden:

19. Es soll ein Punkt gesucht werden, dessen Entfernungen von drei gegebenen geraden Linien in den Verhältnissen $m : n : p$ stehen.

Bemerk. Diese Aufgabe ist eine Erweiterung der auf II. 51 sich gründenden leichten Aufgabe: „Einen Punkt zu finden, der von den drei Seiten eines Dreiecks gleich weit absteht". So wie bei dieser besonderen Aufgabe, so giebt es auch bei der allgemeinen im Ganzen vier Punkte von verlangter Eigenschaft, und es liegen wie bei II. 51 je zwei der Punkte mit einer Ecke des durch die drei Linien gebildeten Dreiecks in einer geraden Linie.

20. Aufg. Von einem Dreiecke ABC kennt man zwei Seiten, AB und BC, die von der Spitze B aus nach einem Punkte D der Grundlinie gezogene Gerade BD, und das Verhältniß $AD : DC$ der Segmente der Grundlinie; das Dreieck zu construiren.

Die Aufgabe ist mit Hülfe des Satzes 13 dieses Capitels zu lösen.

Eine zweite Lösung erhält man, wenn man durch A mit der Seite BC eine Parallele bis zum Durchschnitte E mit BD zieht und das Dreieck ABE untersucht.

21. Aufg. Gegeben drei gerade Linien AB, CD, EF der Lage und Größe nach; einen Punkt X zu finden, so daß die Dreiecke XAB, XCD, XEF a) einander gleich werden, b) in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen.

Eine Auflösung in Aufg. 12 dieses Capitels.

Eine zweite Auflösung erhält man mit Anwendung von V. 80, Zus. 1.

22. Aufg. Innerhalb eines gegebenen Vierecks $ABCD$ einen Punkt O zu finden, so daß, wenn man diesen Punkt mit den Eckpunkten A,

B, C, D des Vierecks verbindet, sowohl $\triangle AOB = \triangle COD$, als auch $\triangle AOD = \triangle BOC$ wird.

Auf Aufg. 12 dieses Capitels zu stützen.

23. Zu drei gegebenen Punkten A, B, C einen vierten X zu finden, dessen Entfernungen von diesen Punkten in dem Verhältnisse $m : n : p$ stehen.

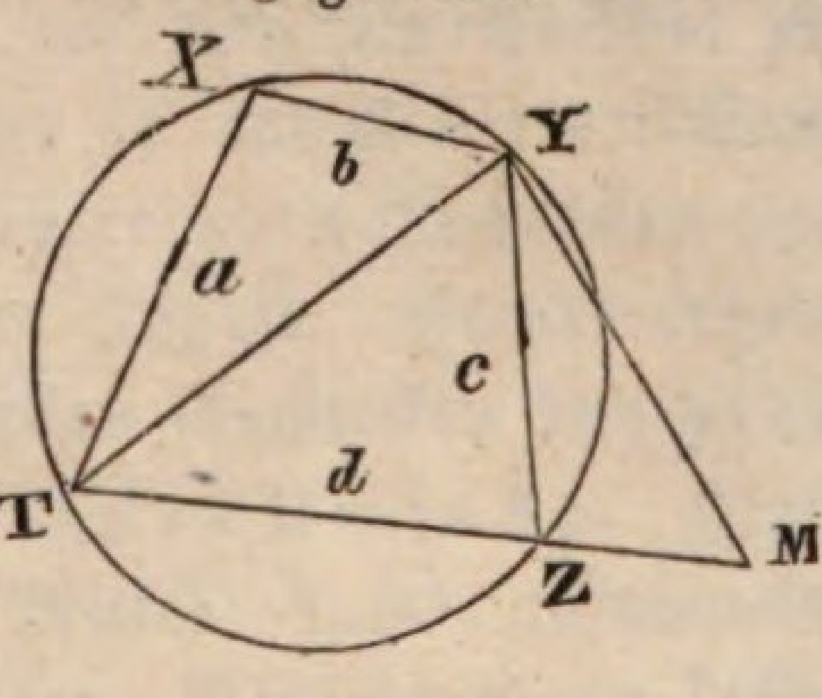
Auf Satz 13 dieses Capitels zu gründen.

24. Aufg. Auf einer geraden Linie sind der Reihe nach die vier Punkte A, B, C, D gegeben. Es soll außerhalb AD ein Punkt X gesucht werden, so daß $\sphericalangle AXB = \sphericalangle BXC = \sphericalangle CXD$ wird.

Mit Hülfe von Satz 13 dieses Capitels zu lösen.

25. Aufg. Die vier Seiten a, b, c, d eines Kreisvierecks sind gegeben; den Kreis zu zeichnen, in welchen sich dieses Viereck legen läßt.

Fig. 256.



Es sei $XYZT$ das verlangte Viereck; zieht man TY und macht $\sphericalangle ZYM = \sphericalangle XTY$, so ist: $TX : XY = YZ : ZM$; der Punkt M ist also bekannt. Da ferner $TY : YM = a : c$, so ist das Verhältniß der Entfernungen des Punktes Y von den beiden Punkten T und M gegeben. Der Punkt Y läßt sich somit nach 13 finden.

Eine zweite Lösung erhält man durch Anwendung der beiden Sätze über das Kreisviereck, nämlich: V. 86 und VII. 101.

26. Von einem Dreiecke kennt man die Grundlinie, das Verhältniß der beiden anderen Seiten und den Inhalt; das Dreieck zu construiren.

Leicht.

27. Aufg. Gegeben zwei Kreise und ein Punkt; durch letzteren eine gerade Linie zu ziehen, so daß die beiden zwischen diesem Punkte und den Kreisen gelegenen Abschnitte in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen.

Auf 14 zu stützen.

28. Den geometrischen Ort für alle Punkte zu finden, von denen aus zwei gegebene Kreise unter demselben Gesichtswinkel erscheinen.

Auf 13 zu reduciren.

29. Gegeben drei Kreise; einen Punkt zu suchen, von dem aus die drei Kreise unter gleichen Gesichtswinkeln erscheinen.

*30. Gegeben drei Kreise der Lage und Größe nach; einen Punkt zu suchen; von dem aus drei an die Kreise gezogene Secanten gleiche Potenzen bilden.

Auf 15 zu reduciren.

1. Zusatz. Gleichbedeutend mit der Aufgabe sind folgende: a) Einen Punkt zu suchen, von dem aus die an drei Kreise gelegten Tangenten einander gleich sind; b) einen Punkt zu suchen, so beschaffen, daß die durch denselben in drei gegebenen sich durchschneidenden Kreisen gelegten kleinsten Sehnen einander gleich werden; c) einen Kreis zu construiren, welcher drei gegebene Kreise rechtwinkelig schneidet, oder zu drei Kreisen einen Orthogonal-Kreis zu construiren.

2. Zusatz. Aehnlich der obigen Aufgabe ist dieselbe Aufgabe, wenn statt der drei Kreise zwei Kreise und ein Punkt, oder ein Kreis und zwei Punkte gegeben sind.

XII. Capitel.

Maxima und Minima.

Erster Abschnitt.

Größte und kleinste Entfernungen.

Obgleich die Bestimmung der größten und kleinsten Ausdehnung, welche eine, einer bestimmten Constructionsweise unterworfene, Größe erlangen kann, in allgemeiner Beziehung Gegenstand der höheren Analysis ist und daher nicht hieher gehört, so giebt es doch viele Fälle, in welchen eine solche Bestimmung schon durch die Mittel der Elementar-Geometrie auf eine meist einfache Weise getroffen werden kann. Solcher Fälle sind schon einige in den ersten Capiteln dieses Lehrbuches vorgekommen; eine Zusammenstellung der wichtigeren unter der großen Menge der übrigen machen den Gegenstand des gegenwärtigen Capitels aus.

Die einfachsten schon vorgekommenen Fälle sind:

a) Die kürzeste Linie, welche zwei Punkte verbinden kann, ist die gerade, wie dieses aus Satz II. 6 in Verbindung mit VI. 18 folgt. Die Entfer-

nung oder der kürzeste Abstand zweier Punkte ist daher gleichbedeutend mit der Länge der sie verbindenden Geraden.

b) Der kürzeste Abstand eines Punktes außerhalb einer geraden Linie von den Punkten in dieser Linie ist die von jenem auf diese gefällte Senkrechte. (II. 14.)

c) Die kürzeste Linie, die man zwischen zwei Parallelen von der einen bis zur anderen ziehen kann, ist die auf beiden Parallelen senkrechte Gerade. (II. 32, Zusatz 2.) Ihre Länge ist daher der eigentliche Abstand der Parallelen.

d) Die größte Sehne eines Kreises ist der Durchmesser. (III. 8.)

e) Die größte Linie, die sich aus einem Punkte der Kreisebene nach der Peripherie ziehen läßt, geht durch die Mitte des Kreises: hinsichtlich der kleinsten Linie gilt dasselbe von der Verlängerung. (III. 9.)

f) Die kleinste aller Sehnen, welche sich durch einen gegebenen Punkt innerhalb des Kreises ziehen lassen, steht auf dem durch diesen Punkt gehenden Diameter senkrecht. (III. 16, Zusatz.)

g) Unter allen Rechtecken, die sich aus zwei Theilen einer geraden Linie bilden lassen, ist das aus den beiden Hälften gebildete, also das Quadrat über einer Hälfte, am größten. Der Beweis ist schon IV. 8, Zusatz, gegeben, läßt sich aber auch leicht aus der Betrachtung eines über der Linie beschriebenen Halbkreises und der bis zu diesem auf dem Durchmesser errichteten Perpendikel ableiten, unter welchen der in der Mitte errichtete der größte ist. Hiermit identisch ist der Satz: Unter allen Rechtecken von gleichem Umfange hat das Quadrat den größten Inhalt. Ferner erhellt aus f) sogleich die Umkehrung hiervon: Unter allen Rechtecken von gleichem Inhalt hat das Quadrat den kleinsten Umfang. Hiermit stelle man auch den Satz vom geometrischen Mittel, V. 30, zusammen.

An diese, hier nur der Uebersicht wegen wiederholten, Bestimmungen lassen sich nun weiter folgende reihen:

***1. Aufg. Auf einer geraden Linie MN den Punkt der kürzesten Entfernung von zwei gegebenen Punkten A, B, d. h. denjenigen Punkt X zu bestimmen, dessen Abstände von zwei gegebenen, auf einer Seite der MN liegenden Punkten A, B die kleinste Summe haben, oder für welchen $AX + XB$ ein Minimum ist.**

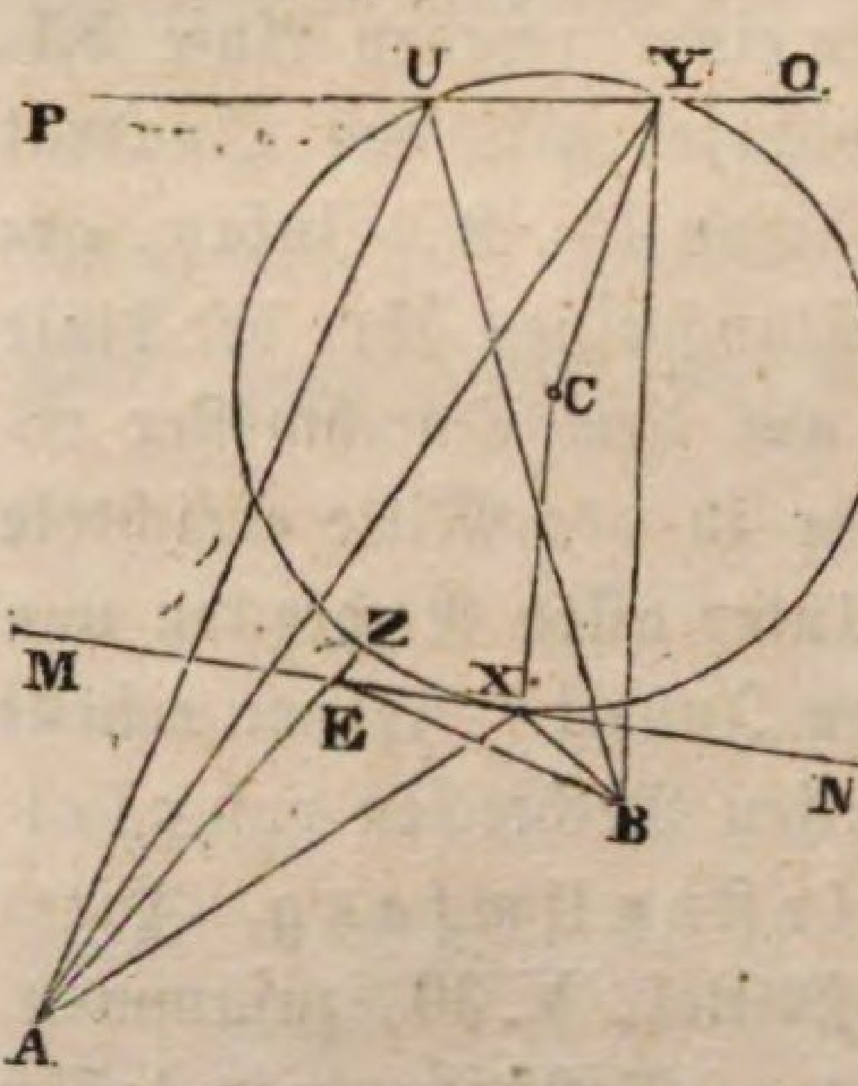
Aufl. Fällt man aus A eine Senkrechte AC auf MN, verlängert sie über C hinaus um $CD = CA$ und verbindet irgend einen Punkt Z der MN mit A, B, D, so ist $AZ = ZD$, daher $AZ + ZB = DZ + ZB$. Da aber D und B gegeben sind, so wird $DZ + ZB$ am kleinsten, wenn DZB eine gerade Linie ist. Zieht man also die Gerade DB, so ist der Durchschnittspunkt X dieser BD mit MN der gesuchte Punkt. Es ist derselbe Punkt, der in VII. 26 bei gleicher Constructionsweise sich als derjenige ergab, für welchen $\measuredangle AXM = BXN$.

1. Zusatz. Je weiter der Punkt Z nach der einen oder anderen Seite hin vom Punkte X absteht, um so größer ist die Summe der Entfernungen $AZ + ZB$, und um so größer zugleich der Unterschied der Winkel AZM und BZN.

2. Zusatz. Macht man dieselbe Construction für den Fall, daß die Punkte A, B zu verschiedenen Seiten von MN liegen, so ergiebt sich ein Punkt auf MN, dessen Entfernungen von A und B die größtmögliche Differenz haben.

2. Aufg. Auf einer Kreislinie $UZXY$ den Punkt der kürzesten Entfernung von zwei gegebenen Punkten A, B, d. h. denjenigen Punkt X zu finden, für welchen $AX + XB$ ein Minimum ist.

Fig. 257.



Aufl. Soll $AX + XB$ ein Minimum sein, so muß X zwischen CA und CB, und dabei so liegen, daß der nach ihm gezogene Radius CX gleiche Winkel mit XA und XB macht. Denn ist $\sphericalangle AXC = BXC$, so ist auch, zieht man an X eine Tangente MN, $\sphericalangle AXM = BXN$. Ein anderer Punkt der Peripherie sei Z, und ZA treffe MN in E, dann ist leicht nachzuweisen, daß $AX + XB < AZ + ZB$, folglich erstere Summe am kleinsten.

Zusatz. Ist statt des Punktes B eine gerade Linie gegeben, so muß, indem XB darauf senkrecht steht, gleichfalls $\sphericalangle AXC = BXC$ sein. Der Beweis ist dem vorigen ähnlich.

3. Aufg. Auf einer Kreislinie den Punkt der größten Entfernung von zwei gegebenen Punkten A, B, d. h. den Punkt Y zu finden, für welchen $AY + YB$ ein Maximum ist.

Aufl. Auch jetzt muß der Punkt Y so liegen, daß der Radius CY mit AY und BY gleiche Winkel macht, jedoch nicht innerhalb des Winkels ACB, sondern innerhalb dessen Scheitelwinkels. Denn es sei $\sphericalangle AYC = BYC$, U aber ein anderer Punkt der Peripherie, verbunden mit Y durch die Gerade PQ. Es ist nun $\sphericalangle AYQ = AUQ + YAU$ und $BYP = BUP - YBU$, daher $AYQ - BYP = AUQ - BUP + (YAU + YBU) > AUQ - BUP$. Hieraus folgt nach 1, Zus. 1, daß $AY + YB > AU + UB$, und dies, U mag auf der einen oder anderen Seite von Y liegen. Es ist daher $AY + YB$ ein Maximum.

Anmerk. Die Punkte X und Y, deren Lage hier nur durch eine damit verbundene Eigenschaft bezeichnet ist, lassen sich nicht durch Kreis und gerade Linie, die einzigen Constructionsmittel der Elementar-Geometrie, finden *). Jene Eigenschaft giebt aber die Grundlage zur Auflösung der folgenden Aufgaben.

4. Aufg. Zu drei gegebenen Punkten A, B, C einen vierten X zu finden, dessen Entfernungen von jenen zusammen genommen die möglich kleinste Summe bilden.

Aufl. Soll $AX + BX + CX$ so klein als möglich sein, so muß, wenn man eine dieser drei Entfernungen als gegeben betrachtet, die Summe der beiden übrigen ein (relatives) Minimum bilden. Hieraus folgt nach 3, daß je zwei der drei Winkel, welche die Linien XA, XB, XC mit einander machen, gleich sein müssen.

Die Auflösung ergiebt sich hiernach leicht mit Anwendung von III. 36.

Wo liegt der verlangte Punkt, wenn einer der Winkel des Dreiecks $ABC = \frac{4}{3}R$? wo, wenn keiner der Winkel dieses Dreiecks = oder > $\frac{4}{3}R$ ist.

5. Aufg. Einen Punkt zu finden, der von zwei gegebenen Punkten A, B und von einer geraden Linie MN zusammen genommen am wenigsten entfernt ist.

Aufl. Ist X der verlangte Punkt, D ein Punkt der Linie MN, so muß nicht allein XD senkrecht auf MN, sondern auch nach (1) $\sphericalangle AXD = BXD$, und nach (2) $\sphericalangle AXD = AXB$ sein. Diese Winkel müssen daher, da ihre Summe $= 4R$, jeder $= \frac{4}{3}R$ betragen.

Die Construction ist hiernach leicht.

Anmerk. Fällt das Perpendikel nicht zwischen die Punkte A, B, oder macht AB, verlängert mit MN, einen Winkel = oder > $\frac{1}{3}R$, so ist der zu MN nähere der beiden Punkte A, B, der Punkt der kürzesten Entfernung.

6. Aufg. Auf einer geraden Linie MN den Punkt O zu bestimmen, in welchem die scheinbare Entfernung zweier außerhalb MN, aber auf einer Seite von ihr gelegenen Punkte A, B, d. i. an welchem der Winkel AOB ein Maximum ist.

Aufl. Beschreibt man durch A und B irgend einen Kreis, der MN

---

*) Die allgemeine Behandlung der Aufgabe findet sich niedergelegt in dem Programme der höhern Bürgerschule zu Köln vom Jahr 1851 „Das Alhazen'sche Problem von T. J. Eschweiler".

in zwei Punkten Z, Z' schneidet, so kann Winkel AZB oder der gleiche $AZ'B$ nicht der größtmögliche sein, weil es nämlich Punkte auf MN zwischen Z und Z' giebt, deren Verbindungslinien mit A und B einen größeren Winkel machen, als AZB es ist. Der durch A, B und den verlangten Punkt O, an welchem $\sphericalangle$ AOB ein Maximum sein soll, gehende Kreis darf also die MN nicht schneiden; er muß mithin MN berühren.

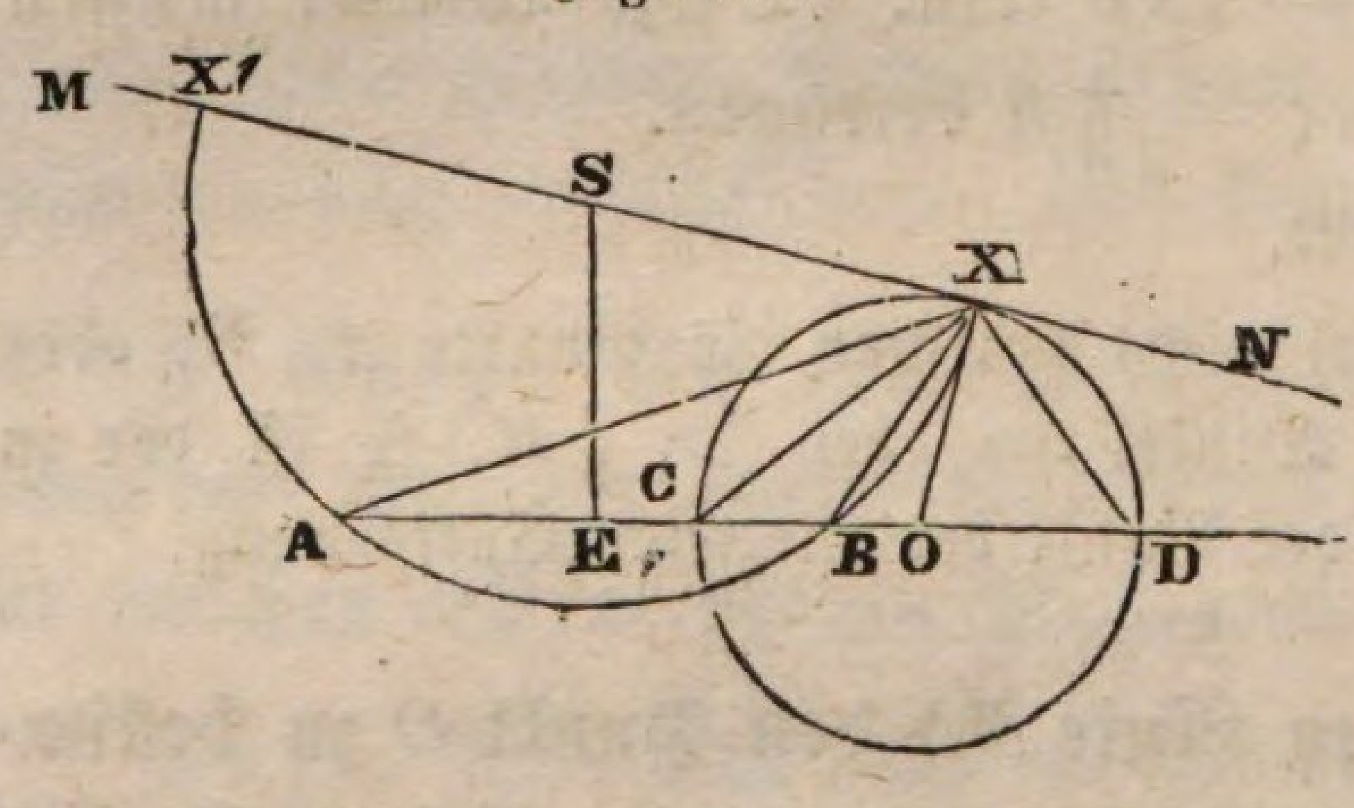
Die Auflösung der Aufgabe ist daher auf IX. 20 zurückgeführt.

7. Aufg. Auf einer Kreislinie den Punkt O zu finden, in welchem die scheinbare Entfernung zweier entweder außerhalb oder innerhalb des Kreises gelegenen Punkte A, B, d. i. an welchem der Winkel AOB am größten oder kleinsten ist.

Eine ganz ähnliche Betrachtung, wie die in 6 angestellte, führt zu dem Schlusse, daß ein durch die gegebenen Punkte A, B und den gesuchten Punkt O gezogener Kreis den gegebenen Kreis berühren müsse. Die Aufgabe reducirt sich demnach auf IX. 23. Liegen A und B außerhalb des gegebenen Kreises, so findet ein Maximum und ein Minimum Statt; liegen sie innerhalb, so giebt es zwei Maxima.

8. Aufg. Auf einer gegebenen geraden Linie MN einen Punkt zu bestimmen, so daß das Verhältniß der Entfernungen desselben von zwei gegebenen Punkten A, B ein Maximum oder Minimum werde.

Fig. 258.



Aufl. Angenommen, der Punkt X auf MN liege so, daß das Verhältniß $AX : XB$ für ihn größer sei, als für jeden anderen Punkt auf MN. Halbirt man den Winkel AXB sowohl als dessen Nebenwinkel, und treffen die Linien, wodurch dies geschieht, die Gerade AB und deren Verlängerung in C, D, so ist (V. 49) auch $AX : XB = AD : DB = AC : CB$. Ueber CD als Durchmesser sei ein Kreis beschrieben, derselbe geht durch X. Bekanntlich ist nun (s. XI. 13) für alle Punkte im Umfange dieses Kreises das Verhältniß der Entfernungen von den Punkten A, B ein constantes, nämlich dem von $AC : CB$ oder $AD : DB$ gleiches, für alle Punkte außerhalb dieses Kreises ist dieses Verhältniß kleiner, für alle innerhalb ist es größer als $AC : CB$. Soll daher $AX : XB$ ein Maximum

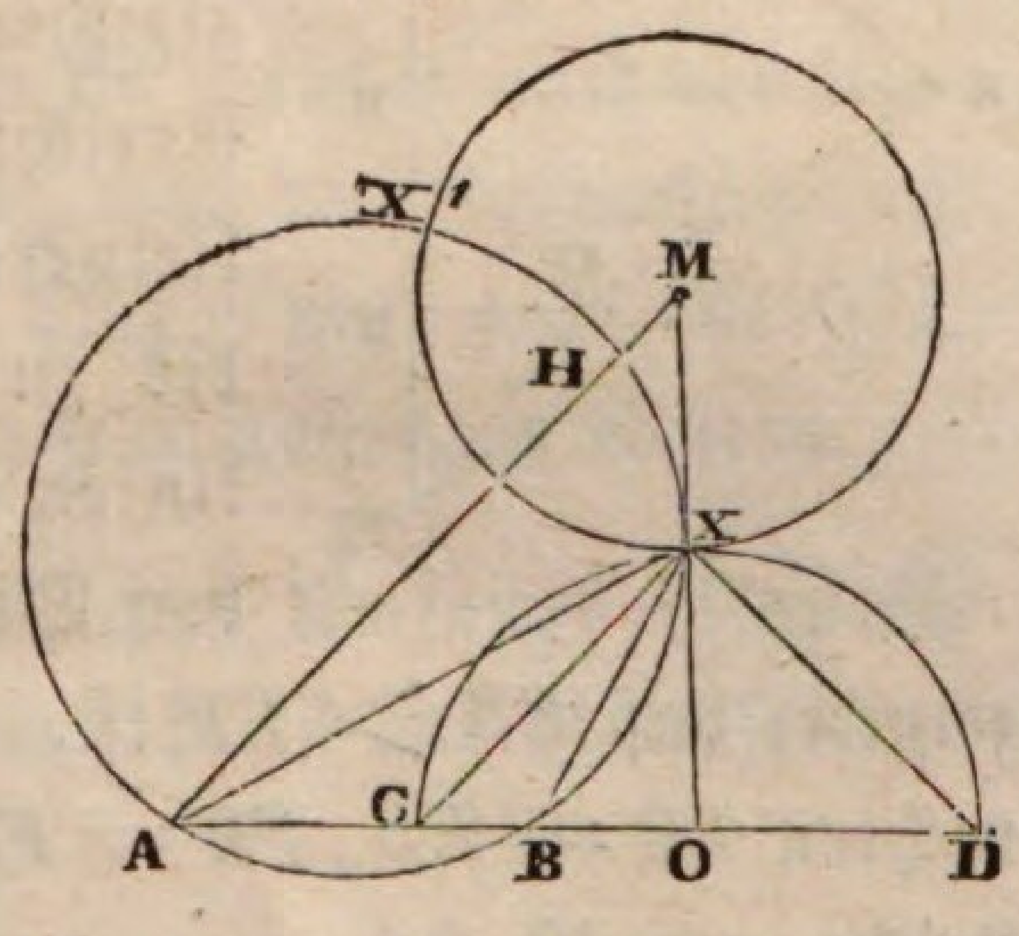
sein, so muß jeder Punkt der MN, mit Ausnahme von X, außerhalb des über CD beschriebenen Kreises liegen; oder es muß dieser Kreis die MN in X berühren und, verbindet man X mit dem Mittelpunkte O dieses Kreises, XO auf MN senkrecht stehen. Es ist aber, da $AC : CB = AD : BD$ und O die Mitte von CD ist, auch (V. 28) $AO : CO = CO : BO$ oder, da $OX = OC$, $AO : OX = OX : BO$, folglich ist (V. 57, 4) OX Tangente eines durch A, B und X beschriebenen Kreises, dessen Mittelpunkt, da $OX \perp MN$ in MN liegen muß. Hieraus fließt folgende einfache

Construction: Man halbire AB und errichte in der Mitte E auf AB eine Senkrechte; beschreibe dann um S, wo dieselbe die gegebene Linie MN trifft, einen durch A und B gehenden Kreis. Derselbe schneidet MN in zwei Punkten X und X'. Im ersten derselben, X, welcher zwischen S und dem Durchschnittspunkte von MN mit AB liegt, ist das fragliche Verhältniß der Entfernungen am größten, im anderen Punkte X' ist dasselbe am kleinsten.

9. Dieselbe Aufgabe wie vorher, mit der Abänderung, daß statt einer geraden Linie MN ein Kreis um M gegeben ist, auf dessen Umfang der gesuchte Punkt liegen soll.

Eine ähnliche Betrachtung, wie die in 8 angewandte, führt zu folgender Construction:

Fig. 259.



Man verbinde den Mitelpunkt M des gegebenen Kreises mit A und nehme auf MA von M aus nach A hin ein Stück MH = der dritten Proportionale zu MA und dem Radius des gegebenen Kreises; beschreibe hierauf durch die drei Punkte A, B, H einen Kreis. Die Durchschnittspunkte dieses Kreises mit dem gegebenen sind die verlangten; in einem derselben X erreicht das fragliche Verhältniß sein Maximum, im anderen X' sein Minimum.

Die Bestätigung dieser Construction durch eine Analyse oder einen synthetischen Beweis wird dem Leser überlassen.

Zweiter Abschnitt.

Sätze über Maxima und Minima des Inhaltes und Umfanges der Figuren.

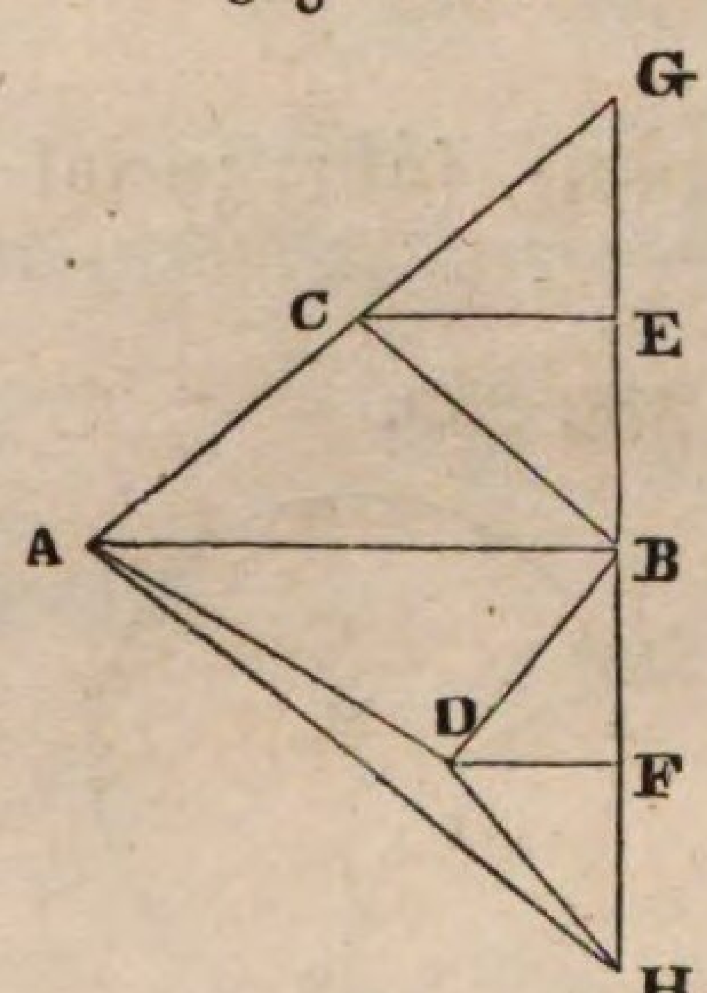
***10. Satz. Von allen Dreiecken, welche gleiche Grundlinie und gleichen Inhalt haben, hat das gleichschenkelige den kleinsten Umfang.**

Beweis. Man gebe zwei Dreiecken dieser Art dieselbe Grundlinie AB. Wegen des gleichen Inhaltes liegen ihre Spitzen C, D in einer mit der Grundlinie AB parallelen Geraden MN. Ist nun das eine dieser Dreiecke, etwa ACB, gleichschenkelig, so ergiebt sich leicht mit Anwendung des in (1) bewiesenen Satzes, daß $AC + CB < AD + DB$; ACB hat daher den kleinsten Umfang.

Zusatz. Unter allen Dreiecken gleichen Inhalts hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

***11. Satz. Unter allen Dreiecken auf gleicher Grundlinie und von gleichem Umfange hat das gleichschenkelige den größten Inhalt.**

Fig. 260.



Beweis. ABC und ABD seien zwei Dreiecke auf derselben Grundlinie AB und zu verschiedenen Seiten derselben liegend. Das erste sei gleichschenkelig, so daß $AC = CB$, das andere ungleichschenkelig, so daß $AD > DB$, beide aber von gleichem Umfange, so daß $AC + CB = AD + DB$. Errichtet man auf AB im Endpunkte B, woran die kleinere Seite BD liegt, eine Senkrechte, und zieht bis zu ihr durch C und D mit AB zwei Parallellinien CE, DF, so sind BE, BF die Höhen der beiden Dreiecke, und es kommt nur darauf an, zu zeigen, daß $EB > BF$ ist. Zu diesem Ende nehme man auf der Senkrechten $EG = EB$, $FH = FB$, und verbinde G mit C, H mit D und A. Leicht erweist sich nun, daß, da $AC = CB$, $\sphericalangle ACB + BCG = 2R$, ACG also eine gerade Linie sei; dagegen daraus, daß $AD > DB$, folge, daß $\sphericalangle ADB + BDH > 2R$, mithin D nicht in gerader Linie mit A und H sei. ADH ist daher ein Dreieck und deßhalb $AD + DH > AH$, also auch, da $DH = DB$ und $AD + DB = AC + CB = AC + CG$, $AG > AH$. Hieraus folgt (II. 14), daß auch $BG > BH$, und somit $BE > BF$.

Der Satz läßt sich auch indirect beweisen.

Zusatz. Unter allen Dreiecken von gleichem Umfange hat das gleichseitige den größten Inhalt.

***12. Satz. Unter allen einem Kreisabschnitte über der Sehne desselben als Basis eingeschriebenen Dreiecken hat das gleichschenkelige den größten Inhalt und größten Umfang.**

Der Beweis für das Maximum des Inhaltes ist leicht, der für das Maximum des Umfanges kann auf Satz 1 zurückgeführt werden; er ergiebt sich aber auch leicht, wenn man die jedesmalige Summe der beiden Seiten dadurch bildet, daß man eine der Seiten des Dreiecks um die andere verlängert und nachweist, daß der nicht in der Grundlinie liegende Endpunkt der Summe in die Peripherie eines gegebenen Kreises fällt.

1. Zusatz. Unter allen einem Kreise eingeschriebenen Dreiecken hat das gleichseitige den größten Umfang und größten Inhalt.

2. Zusatz. Ueberhaupt hat unter allen einem Kreise eingeschriebenen Vielecken von gleicher Seitenzahl das gleichseitige und daher reguläre den größten Umfang und Inhalt.

***13. Satz. Unter allen Vielecken von gleicher Seitenzahl und gleichem Inhalte hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.**

Beweis. Hätte ein ungleichseitiges Vieleck $ABC...F$, worin etwa $AB >$ oder $< BC$, den kleinsten Umfang, so ließe sich über AC ein gleichschenkeliges Dreieck AMC von gleichem Inhalte mit ABC errichten. Es hätte dann auch das Vieleck $AMC...F$ denselben Inhalt wie $ABC...F$. Nach Satz 10 wäre aber $AM + MC < AB + BC$, daher auch der Umfang von $AMC...F$ kleiner als der von $ABC...F$, was der Voraussetzung, daß letzterer der kleinste sein soll, widerspricht. Daher muß $AB = BC$ sein. Dasselbe gilt von jedem anderen Paare aneinander stoßender Seiten.

***14. Satz. Unter allen Vielecken gleichen Umfangs (isoperimetrischen Vielecken) und von derselben Seitenzahl ist das gleichseitige am größten.**

Beweis. Gesetzt, ein ungleichseitiges $ABC...F$, worin etwa $AB >$ oder $< BC$, wäre das größte, so könnte man über AC ein gleichschenkeliges Dreieck AMC errichten von gleichem Umfange mit ABC. Es hätte dann auch das Vieleck $AMC...F$ gleichen Umfang mit $ABC...F$. Nach Satz 11 wäre aber $\triangle AMC > \triangle ABC$, daher auch das Vieleck $AMC...F >$ Vieleck $ABC...F$, was jedoch der Voraussetzung, daß $ABC...F$ das größte sein soll, widerspricht.

***15. Satz. Sind zwei Seiten eines Dreiecks gegeben, so wird dasselbe am größten, wenn diese Seiten einen rechten Winkel bilden.**

Beweis sehr einfach.

***16. Satz. Sind alle Seiten eines Vielecks, mit Ausnahme einer, gegeben, so ist dasselbe am größten, wenn ein über der nicht gegebenen Seite beschriebener Halbkreis durch sämmtliche Ecken des Vielecks geht.**

Beweis. *ABCDE* sei ein Fünfeck, dessen vier Seiten *AB*, *BC*, *CD* *DE* gegeben sind. Soll dasselbe unter allen Fünfecken, welche mit ihm in den vier genannten Seiten übereinstimmen, den größten Inhalt haben, so muß dasselbe durch eine Veränderung der nicht gegebenen Stücke keiner Vergrößerung fähig sein. Dies wird aber nur dann der Fall sein, wenn ein über der fünften Seite *AE* beschriebener Halbkreis durch die Ecken *B*, *C*, *D* geht, oder, was damit gegenseitig zusammenhängt, wenn die Winkel *ABE*, *ACE*, *ADE* rechte sind. Ist nämlich einer dieser Winkel, wie etwa Winkel *ACE*, kein rechter, so kann man mit Beibehaltung der Diagonalen *AC*, *CE* und der außerhalb daran liegenden Theile der Figur *ABC*, *CDE* das Dreieck *ACE* zu einem rechtwinkeligen machen. Dasselbe erhält dadurch einen größeren Inhalt; damit auch das Fünfeck *ABCDE*. Soll also das letztere ein Maximum sein, so muß $ACE = R$; dasselbe läßt sich von den Winkeln *ABE*, *ADE* sagen; daraus folgt aber, daß der Halbkreis über *AE* durch *B*, *C*, *D* geht.

Zusatz. Der Inhalt des größten Vielecks *ABCDE* ändert sich nicht, in welcher Ordnung auch die vier Seiten *AB*, *BC*, *CD*, *DE* desselben an einander liegen.

***17. Satz. Von allen Vielecken, die man aus gegebenen Seiten bilden kann, ist dasjenige am größten, durch dessen sämmtliche Ecken sich ein Kreis beschreiben läßt.**

Fig. 261.

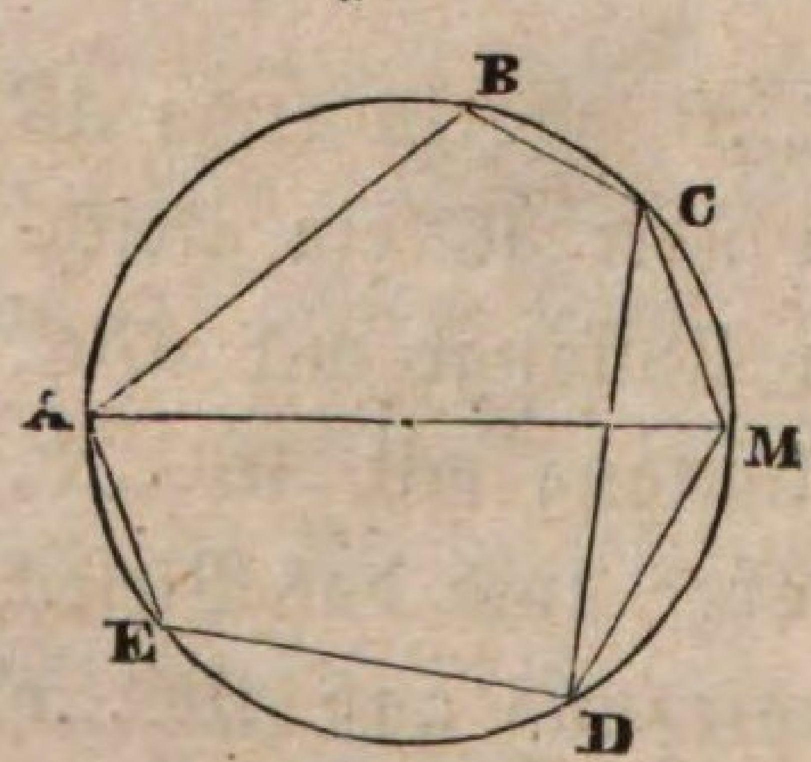
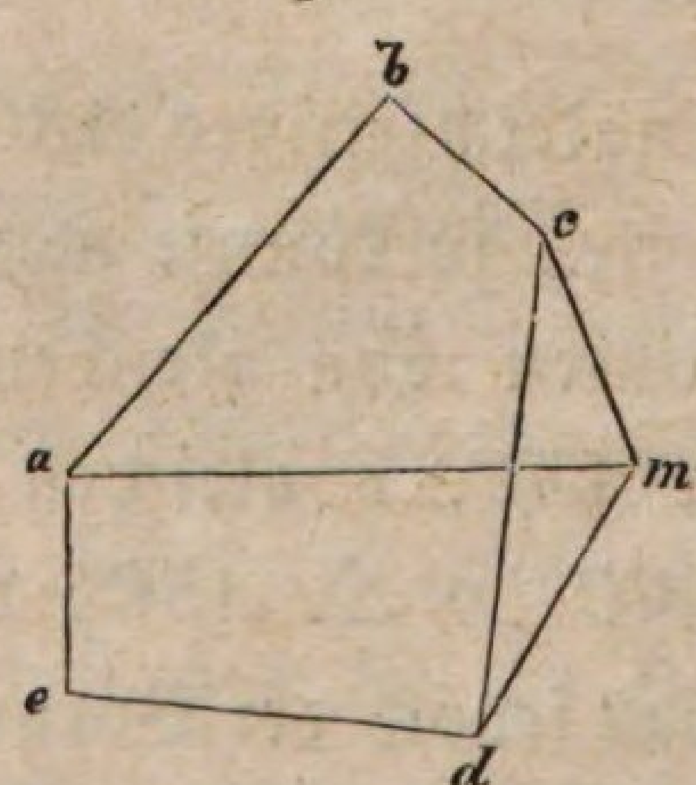


Fig. 262.



Beweis. *ABCDE* und *abcde* seien zwei Vielecke, deren Seiten bezüglich gleich sind, so daß $AB = ab$, $BC = bc$, u. s. w. Durch die Ecken des ersten lasse sich ein Kreis beschreiben, durch die des anderen aber nicht. Es ist nun zu zeigen, daß das

erste *ABCDE* größer sei, als das zweite *abcde*. Zu dem Ende ziehe man durch *A* den Durchmesser *AM*, verbinde *M* mit *C* und *D*, construire über *cd* ein dem Dreieck *CDM* congruentes Dreieck *cdm* und ziehe *am*. Da die Vierecke *ABCM*, *abcm* in der Länge dreier Seiten übereinstimmen, das erste aber ein Halbkreis-Viereck ist, so ist nach (16) $ABCM > abcm$. Aus gleichem Grunde ist $AEDM > aedm$, folglich ist $ABCMDE > abcmde$. Zieht man hiervon die congruenten Dreiecke *CDM*, *cdm* ab, so bleibt $ABCDE > abcde$, w. z. b. w.

*18. **Satz. Unter allen Vielecken von gleichem Umfange und bestimmter Seitenzahl ist das reguläre am größten.**

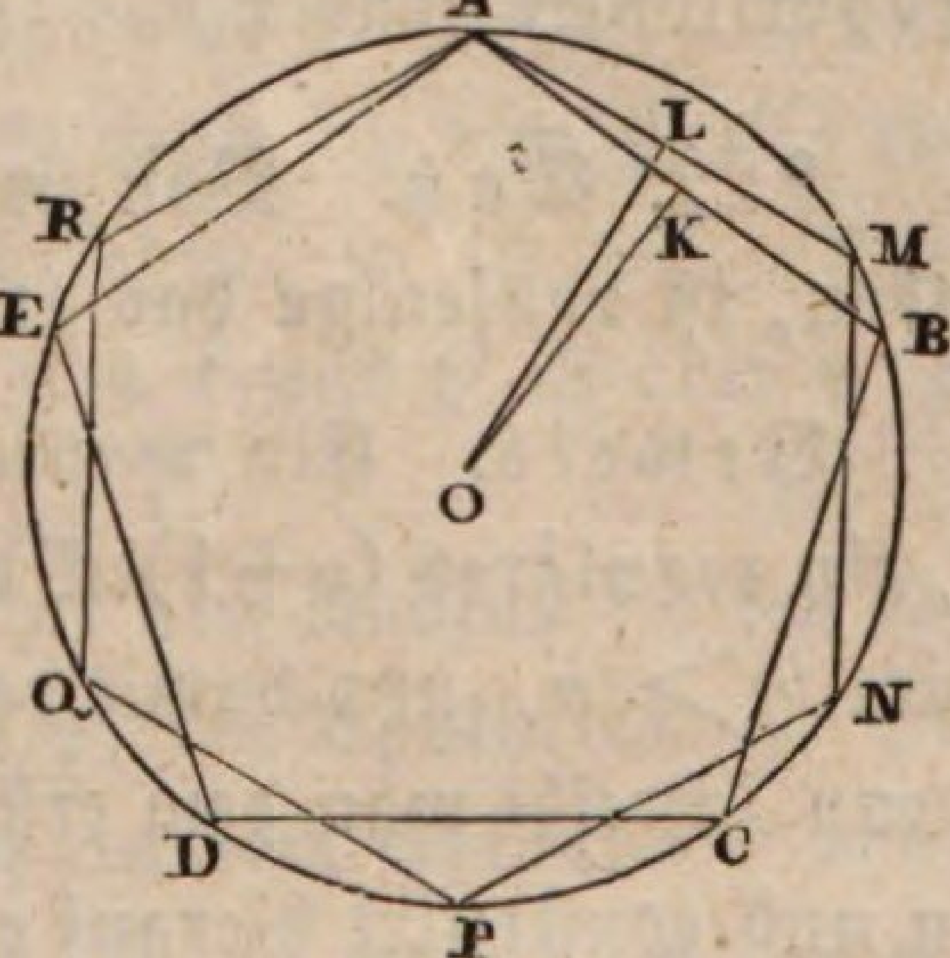
Nach Satz 14 muß das größte Vieleck gleichseitig sein, und nach Satz 17 muß sich durch die Ecken desselben ein Kreis beschreiben lassen. Dasselbe ist also ein reguläres.

*19. **Satz. Unter allen Vielecken von gleichem Inhalte und bestimmter Seitenzahl hat das reguläre den kleinsten Umfang.**

Beweis. *A* und *B* seien zwei Vielecke von derselben Seitenzahl und gleichem Inhalte; das erste *A* regulär, das andere nicht. Der Umfang des ersten sei *a*, der des zweiten *b*. Es wird $a < b$ sein. Denn construirt man ein drittes Vieleck *C* von derselben Seitenzahl und gleichem Umfange mit *B*, dabei regulär, so ist nach (18) $C > B$, folglich, da $B = A$, auch $C > A$. Die Vielecke *C* und *A* sind aber ähnlich, daher hat das kleinere derselben auch den kleineren Umfang, oder es ist $a < b$. Den kleinsten Umfang hat also das reguläre Vieleck *A*.

*20. **Satz. Von zweien einem Kreise eingeschriebenen regulären Vielecken hat dasjenige den größeren Umfang und größeren Inhalt, welches die meisten Seiten hat.**

Fig. 263.



Beweis. *ABCDE* und *AMNPQR* seien zwei dem Kreise eingeschriebene reguläre Polygone, so gelegt, daß sie eine gemeinschaftliche Ecke *A* haben, von welchen jedoch das zweite eine Seite mehr habe, als das erste. Verbindet man *M* mit *B*, so entsteht das Dreieck *AMB*, worin $AM + MB > AB$; folglich ist auch der Umfang des Vielecks *AMBCDE* größer als der des Vielecks *ABCDE*. Nach Satz 12, 2 Zusatz,

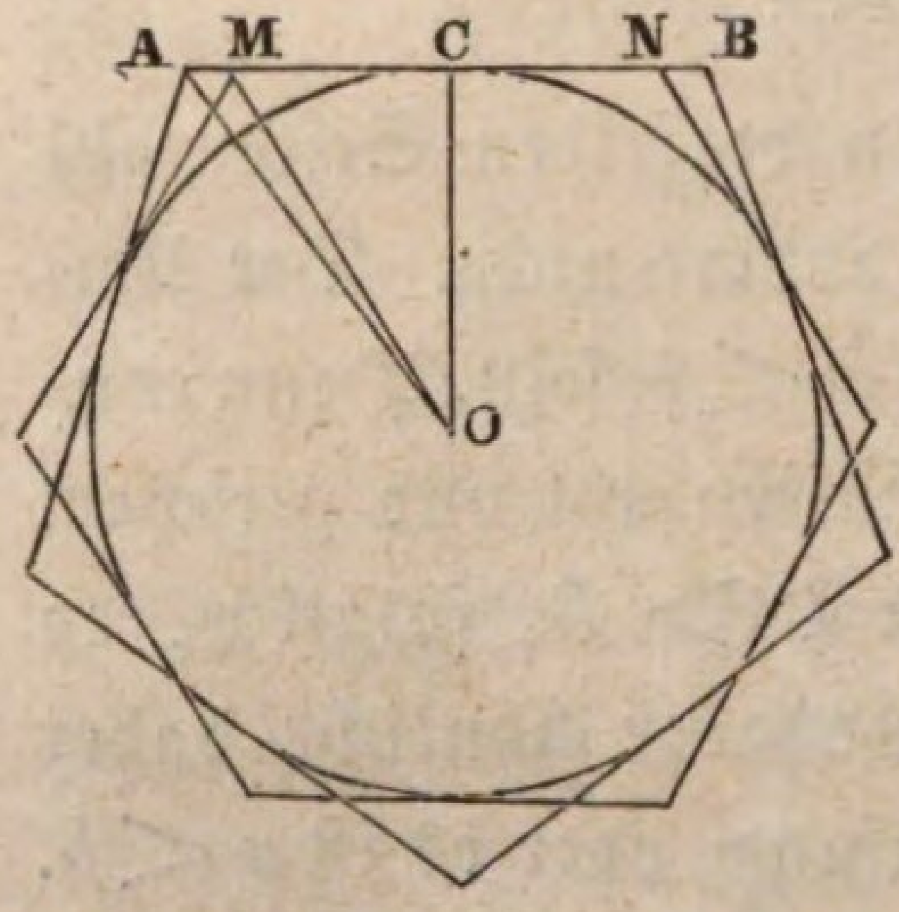
hat aber das Vieleck *AMNPQR*, da es regulär und von gleicher Seitenzahl mit *AMBCDE* ist, einen noch größeren Umfang wie dieses; um so mehr ist der Umfang des Polygons *AMNPQR* größer als der von *ABCDE*.

Um Dasselbe vom Inhalte zu beweisen, ziehe man die Apothemen *OK*, *OL*. Da $AM < AB$, so ist (III. 16) $AL > AK$. Die Polygone sind aber (VI. 6) den Rechtecken aus den Apothemen und halben Umfängen eines jeden gleich. Da nun das Polygon *AMNPQR* nicht allein einen größeren Umfang, sondern auch eine größere Apotheme hat als das andere *ABCDE*, so ist es größer als dieses.

***21. Satz. Von zwei einem Kreise umschriebenen regulären Vielecken hat dasjenige den kleineren Umfang und Inhalt, welches die meisten Seiten hat.**

AB sei die Seite eines dem Kreise umschriebenen regulären $n$ecks, *MN* die eines demselben Kreise umschriebenen $(n+1)$ecks, beide so gelegt, daß sie eine gemeinschaftliche Mitte *C* haben. Bezeichnet *O* den Mittelpunkt des Kreises, so sind *AOC*, *MOC* halbe Centriwinkel, und es verhält sich $\sphericalangle AOC : \sphericalangle MOC = n+1 : n$, daher $AOM : MOC = 1 : n$. Theilt man nun $\sphericalangle MOC$ in n gleiche Theile, so wird jeder derselben $= AOM$. Die Halbseite *AC* wird gleichfalls in $n+1$ Theile getheilt, die aber nicht gleich sind, vielmehr von *A* an nach *C* hin abnehmen (VIII. 53). Der größte derselben ist *AM*, und es ist daher $MC < n \cdot AM$, also $(n+1)\ MC < n \cdot AC$ und $(n+1)\ MN < n \cdot AB$, d. h. der Umfang des umschriebenen $(n+1)$ecks ist kleiner als der des $n$ecks. Was den Inhalt betrifft, so ist dieser, da die Apotheme aller umschriebenen Vielecke gleich groß ist, dem Umfange proportionirt, daher das $(n+1)$eck kleiner als das $n$eck.

Fig. 264.



***22. Satz. Von zwei regulären Vielecken, die gleichen Umfang haben, ist dasjenige das größere, welches die meisten Seiten hat.**

Beweis. Ein reguläres $n$eck habe den Umfang u, die Apotheme a, ein reguläres $(n+1)$eck den gleichen Umfang u, die Apotheme b. Es wird $b > a$, und damit das zweite Vieleck größer als das erste sein. Denn schreibt man dem ersten Vieleck, welches ein $n$eck ist, einen Kreis ein und construirt hierauf ein diesem Kreise umschriebenes $(n+1)$eck, so

ist nach (21) der Umfang desselben $u' < u$. Da aber die beiden $(n+1)$ecke ähnlich sind, so verhalten sich ihre Umfänge wie die Apothemen; es ist also $u' : u = a : b$; da nun $u' < u$, so ist $a < b$ oder $b > a$, w. z. b. w.

***23. Satz. Von zwei regulären Vielecken, welche gleichen Inhalt haben, hat dasjenige den kleinern Umfang, dessen Seitenzahl die größere ist.**

Beweis. Ein reguläres $n$eck P habe den Umfang u, die Apotheme a; ein ihm an Inhalt gleiches $(n+1)$eck Q habe den Umfang v, die Apotheme b. Wegen des gleichen Inhalts wird $u : v = b : a$ sein. Bildet man nun aber ein reguläres $n$eck M, dessen Umfang $= v$, so ist nach (22) $Q > M$: aber $Q = P$, daher auch $P > M$, und da diese ähnlich sind, $u > v$ oder $v < u$.

***24. Satz. Der Kreis hat unter allen Figuren gleichen Umfangs den größten Inhalt, und unter allen Figuren gleichen Inhalts den kleinsten Umfang.**

Da in Satz 18 und 19 schon bewiesen worden, daß unter allen Vielecken von bestimmter Seitenzahl das reguläre bei gleichem Umfange den größten Inhalt und bei gleichem Inhalte den kleinsten Umfang hat, so kommt es nur noch darauf an, zu zeigen, daß der Kreis größer ist als jedes reguläre Polygon von gleichem Umfange, dagegen einen kürzern Umfang habe als jedes reguläre Polygon von gleichem Inhalt. Die Richtigkeit dieser neuen Behauptung ergiebt sich sofort aus Satz 22 und 23, wenn man den Kreis als ein reguläres Polygon von unendlicher Seitenzahl ansieht. Doch ist folgender directe Beweis dafür vorzuziehen:

1) Ein Kreis K habe den Umfang p, den Radius r, ein reguläres Polygon P denselben Umfang p, die Apotheme a. Nach VI. 6 und 26 ist $K = \frac{1}{2}p \cdot r$, $P = \frac{1}{2}p \cdot a$. Denkt man sich dem Kreise ein dem Vieleck P ähnliches Vieleck Q umschrieben, so ist dessen Umfang $u > p$. Wegen der Aehnlichkeit von P und Q ist aber $u : p = r : a$, also $r > a$, mithin auch $K > P$.

2) Ein Kreis K habe wieder den Umfang p, den Radius r, ein reguläres Polygon $P = K$ den Umfang q, die Apotheme a. Es wird $p < q$ sein. Denn bildet man ein dem Polygon P ähnliches Polygon Q, dessen Umfang $= p$, so ist nach 1) $K > Q$;

also ist, da $K = P$, auch $P > Q$. Hieraus und aus der Aehnlichkeit von P und Q folgt aber, daß $q > p$ oder $p < q$.

Dritter Abschnitt.

Uebungs-Aufgaben.

25. **Aufgabe. Von einem Dreiecke ACB ist die Grundlinie AB und die Seite AC gegeben. Wie muß der Winkel ABC sein, wenn $\measuredangle ACB$ ein Maximum werden soll?**

Zur Auflösung beschreibe man um A mit AC einen Kreis, verlängere CA und CB bis zur Peripherie und verbinde die Endpunkte dieser Verlängerungen.

26. **Aufgabe. In einen Quadranten das größte Rechteck einzuschreiben.**

Man führe die Aufgabe auf die Frage zurück: Welches unter den einem Kreise eingeschriebenen Rechtecken ist das größte?

27. **Aufgabe. Durch den Punkt A, worin zwei Kreislinien sich schneiden, eine gerade Linie bis zu diesen zu ziehen, die so groß als möglich ist.**

Verbindet man den zweiten Durchschnittspunkt B der beiden Kreise mit den Endpunkten X, Y der durch A zu ziehenden Linie, so entsteht ein der Art nach gegebenes Dreieck. Wie müssen die Verbindungslinien sein, damit dieses Dreieck und zugleich XY am größten werden?

28. **Aufg. Auf einer geraden Linie MN den Punkt anzugeben, dessen Abstände von einem gegebenen Punkte A und einer zweiten gegebenen Geraden EF zusammen addirt ein Minimum geben.**

Die Auflösung ist nach Anleitung von Aufg. 1 zu suchen und ähnlich zu begründen.

29. **Aufg. Eine gerade Linie AB so zu theilen, daß die Summe der Quadrate über beiden Stücken so klein wie möglich werde.**

Der Theilungspunkt sei X; errichtet man auf AB in X eine Senkrechte $XC = XA$ und verbindet C mit A und B, so ist AC der Lage nach

gegeben und $CB^2 = AX^2 + XB^2$. Hiernach reducirt sich die Frage darauf, wann CB ein Minimum wird.

30. Aufg. Unter allen einem gegebenen Dreiecke ABC so eingeschriebenen Dreiecken, daß eine Spitze D der letzteren in einem gegebenen Punkte der Seite BC, die dieser Spitze gegenüber liegende Seiten EF mit BC parallel liegt, das größte zu bestimmen.

Man suche das Verhältniß eines der in Rede stehenden Dreiecke DEF zum gegebenen Dreiecke ABC, wodurch man auf die Forderung geführt wird, das Rechteck der beiden Stücke, in welche AB oder AC oder AD durch EF getheilt wird, zu einem Maximum zu machen. Die Erledigung dieser Forderung giebt IV. 8.

31. Aufg. In ein gegebenes Dreieck ABC ein Parallelogramm einzuschreiben, von welchem ein Winkel gegeben ist, und dessen Inhalt so groß wie möglich.

Analysis und Resultat dieser Aufgabe sind ganz ähnlich der vorigen.

32ᵃ. Durch einen innerhalb eines Winkels BAC gegebenen Punkt O eine gerade Linie MN bis an die Schenkel dieses Winkels so zu ziehen, daß das dadurch begrenzte Dreieck AMN dem Inhalte nach ein Minimum wird.

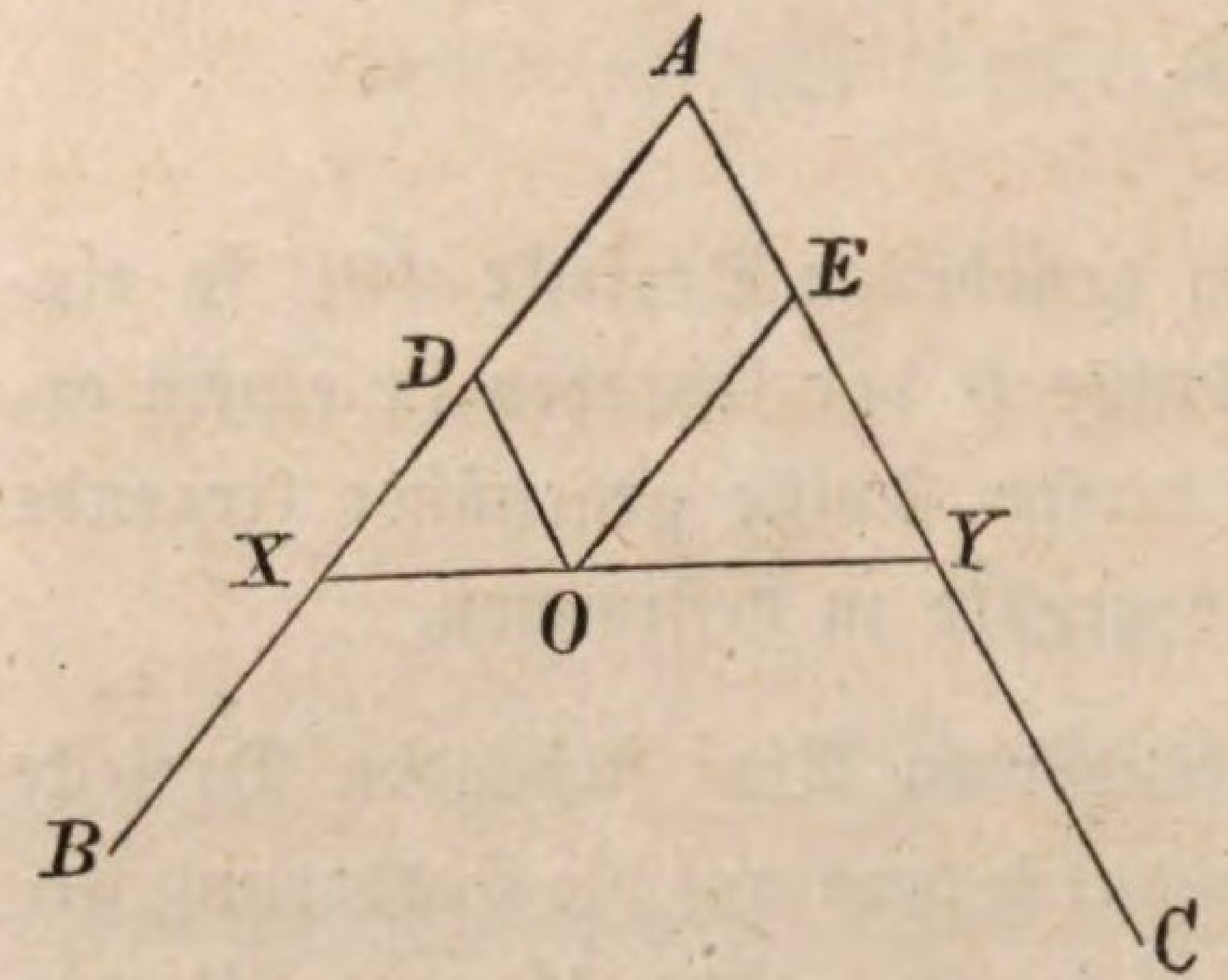
Die Aufgabe ist auf VII. 18 zurückzuführen.

32ᵇ. Dieselbe Aufgabe, mit der geänderten Bedingung, daß der Umfang des Dreiecks AMN ein Minimum werde.

Beschreibt man einen Kreis, der die Linie MN und die Schenkel des Winkels BAC außerhalb des Dreiecks AMN berührt, so ist die Entfernung des Punktes A von den Berührungspunkten dieses Kreises auf AB und AC gleich dem halben Umfange des Dreiecks. Dieser wird also wegen des gegebenen Winkels um so kleiner, je kleiner der Radius des Kreises ist, und dieser wird am kleinsten, wenn er durch O geht. Hieraus ergiebt sich die Construction.

33. Aufg. Durch einen innerhalb des Winkels ABC gegebenen Punkt O eine gerade Linie XY so zu ziehen, daß dadurch $AX + AY$ ein Minimum werde.

Fig. 265.



Aufl. Zieht man $OD \parallel AC$, $OE \parallel AB$, so ist $DX : OE = OD : EY$ oder $DX : DA = AE : EY$ und $DX . EY = DA . AE$. Unter allen Rechtecken von gleichem Inhalte hat aber das Quadrat den kleinsten Umfang, folglich wird $DX + EY$, folglich auch $AX + AY$ ein Minimum, wenn $DX = EY$. Hieraus ergiebt sich leicht die Construction.

34. Aufg. Durch einen auf der Halbirungslinie eines Winkels BAC gegebenen Punkt O eine gerade Linie MN so zu ziehen, daß das von den Schenkeln des Winkels begrenzte Stück derselben ein Minimum wird.

Man fälle aus A auf MN eine Senkrechte AR. Da das Dreieck $AMN = \frac{1}{2} MN \times AR$, so wird MN um so kleiner, je kleiner $\triangle AMN$ und je größer zugleich AR ist. Hieraus folgt alsbald mit Rücksicht auf 32, daß MN am kleinsten wird, wenn $MN \perp AO$. Eine zweite Auflösung ergiebt sich aus der Betrachtung eines dem Dreiecke AMN umschriebenen Kreises.

35. Aufg. Durch einen innerhalb eines Winkels BAC gegebenen Punkt O eine gerade Linie MN bis an die Schenkel des Winkels so zu ziehen, daß das Rechteck aus OM und ON ein Minimum werde.

Man beschreibe durch A, M, N einen Kreis; schneidet derselbe die verlängerte AO in D, so ist $MO \times ON = AO \times OD$, daher OD zugleich mit $MO \times ON$ ein Minimum. Da aber $\angle DMO = OAC$ gegeben, so wird OD am kleinsten, wenn ein durch D, M, O beschriebener Kreis die AB berührt. Hieraus folgt, daß für den Fall des Minimums $\angle AMO = MDO = ANO$ sein müsse. MN ist also die in VII. 17 construirte Linie.

36. Aufg. Zu zwei auf einer Kreislinie gegebenen Punkten A, B einen dritten X zu suchen, so daß das Rechteck aus den Entfernungen dieses Punktes von den beiden gegebenen ein Maximum werde.

Mit Hülfe des Satzes in V. 52 findet man leicht, daß der gesuchte Punkt in der Mitte des Bogens AB liegen muß.

37. Aufg. Das größte aller Dreiecke auf einer gegebenen Grundlinie zu bestimmen, deren Seiten ein gegebenes Verhältniß haben.

Leicht mit Hülfe des geometrischen Ortes (XI. 13), auf welchem der zweiten Bedingung der Aufgabe gemäß die Spitze des Dreiecks liegen muß.

38. Aufg. Unter allen Dreiecken, worin ein Winkel und die Summe der einschließenden Seiten gegeben sind, das größte zu finden.

Durch einfache Construction reducirt sich die Aufgabe auf die schon oft angewandte Bestimmung in IV. 8, welche dahin führt, daß das gesuchte Dreieck gleichschenkelig sein müsse, um ein Maximum zu sein.

39. Aufg. Zwischen die begrenzten Schenkel eines Winkels *BAC* von *A* aus eine gerade Linie so zu ziehen, daß die Summe der Projectionen jener Schenkel auf dieselbe ein Maximum wird.

Aufl. Die verlangte Linie ist die Diagonale des mit *BA* und *AC* als Seiten construirten Parallelogramms. Warum?

40. Aufg. In ein spitzwinkeliges Dreieck *ABC* ein anderes Dreieck *XYZ* einzuschreiben, dessen Umfang ein Minimum werde.

X liege in *AB*, *Y* in *AC*, *Z* in *BC*. Soll $XY + YZ + ZX$ ein Minimum sein, so muß nach (1) $\sphericalangle AXY = BXZ$, $\sphericalangle AYX = CYZ$, $\sphericalangle BZX = CZY$ sein. Hieraus läßt sich durch ein paar Schlüsse bald ableiten, daß die Linien *AZ*, *BY*, *CX* die Winkel des Dreiecks *XYZ* halbiren müssen und in Folge davon resp. auf *BC*, *AC*, *AB* senkrecht stehen.

41. Aufg. Auf einer geraden Linie oder einer Kreislinie einen Punkt so zu bestimmen, daß die Summe der Quadrate der Entfernungen dieses Punktes von zwei gegebenen Punkten ein Minimum ist.

Man hat nur den in IV. 29 aufgestellten Satz heranzuziehen, um sofort die Auflösung zu finden.

42. Aufg. Einen Punkt zu finden, der so liegt, daß die Summe der Quadrate der Entfernungen desselben von drei gegebenen Punkten *A*, *B*, *C* so klein wie möglich ist.

Die Anwendung von IV. 29 und X. 6 führt dahin, den gesuchten Punkt als den Durchschnittspunkt der Mittellinien oder den Schwerpunkt (s. II. 53) des Dreiecks *ABC* erkennen zu lassen.

43. Aufg. Unter allen Vierecken, deren Ecken in den Peripherieen von vier concentrischen Kreisen liegen, das größte anzugeben.

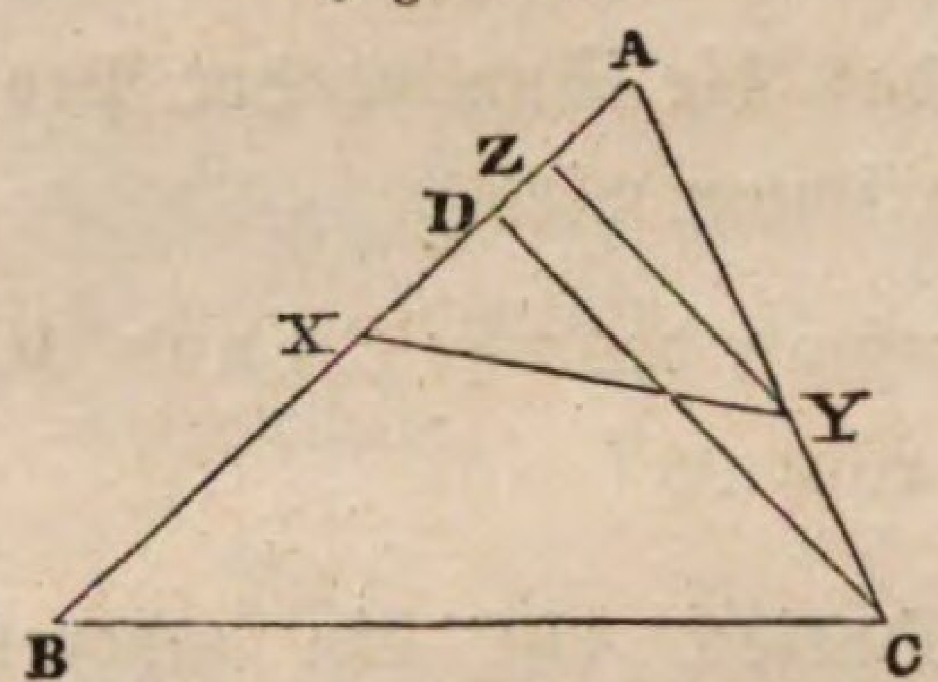
Soll das zu bildende Viereck ein Maximum sein, so müssen 1) seine

Diagonalen auf einander senkrecht stehen, 2) das Rechteck aus ihnen so groß wie möglich sein. Letztere Bedingung wird erfüllt, wenn man die Summe des größten und kleinsten der vier Halbmesser zur einen, die Summe der beiden übrigen Halbmesser zur anderen Diagonale des Vierecks macht. Warum? Hieraus folgt die Construction.

44. Aufg. Ein Dreieck *ABC* durch die möglich kleinste Linie *XY* in zwei Stücke zu theilen, deren Verhältniß gegeben ist.

Da das Verhältniß der Stücke *AXY* und *BXYC* gegeben ist, so ist es auch das der Dreiecke *AXY* und *ABC*, so wie das gleiche Verhältniß der Rechtecke $AX \times AY$ und $AB \times AC$, daher das Rechteck $AX \times AY$ selbst gegeben. Fällt man weiter aus *C* und *Y* auf *AD* die Senkrechten *CD*, *YZ*, so ist $AX \times AY : AB \times AC = AZ \times AX : AD \times AB$, daher auch $AZ \times AX$ gegeben. Das Dreieck *AXY* giebt aber (IV. 26) $\overline{XY}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{AY}^2 - 2AX \cdot AZ = (AX - AY)^2 + 2AX \cdot AY - 2AX \cdot AZ$, mithin wird, da die beiden letzteren Rechtecke gegeben sind, *XY* ein Minimum, wenn $AX = AY$. Das Dreieck *AXY* muß also gleichschenkelig sein.

Fig. 266.



45. Aufg. Zwischen der Verlängerung zweier Radien des Kreises die kleinstmögliche Tangente zu finden.

Die Aufgabe ist mit Hülfe von 32[a] zu lösen.

46. Aufg. Zwischen zwei gegebenen Tangenten eines Kreises eine dritte bis an sie zu ziehen, deren Länge so klein wie möglich.

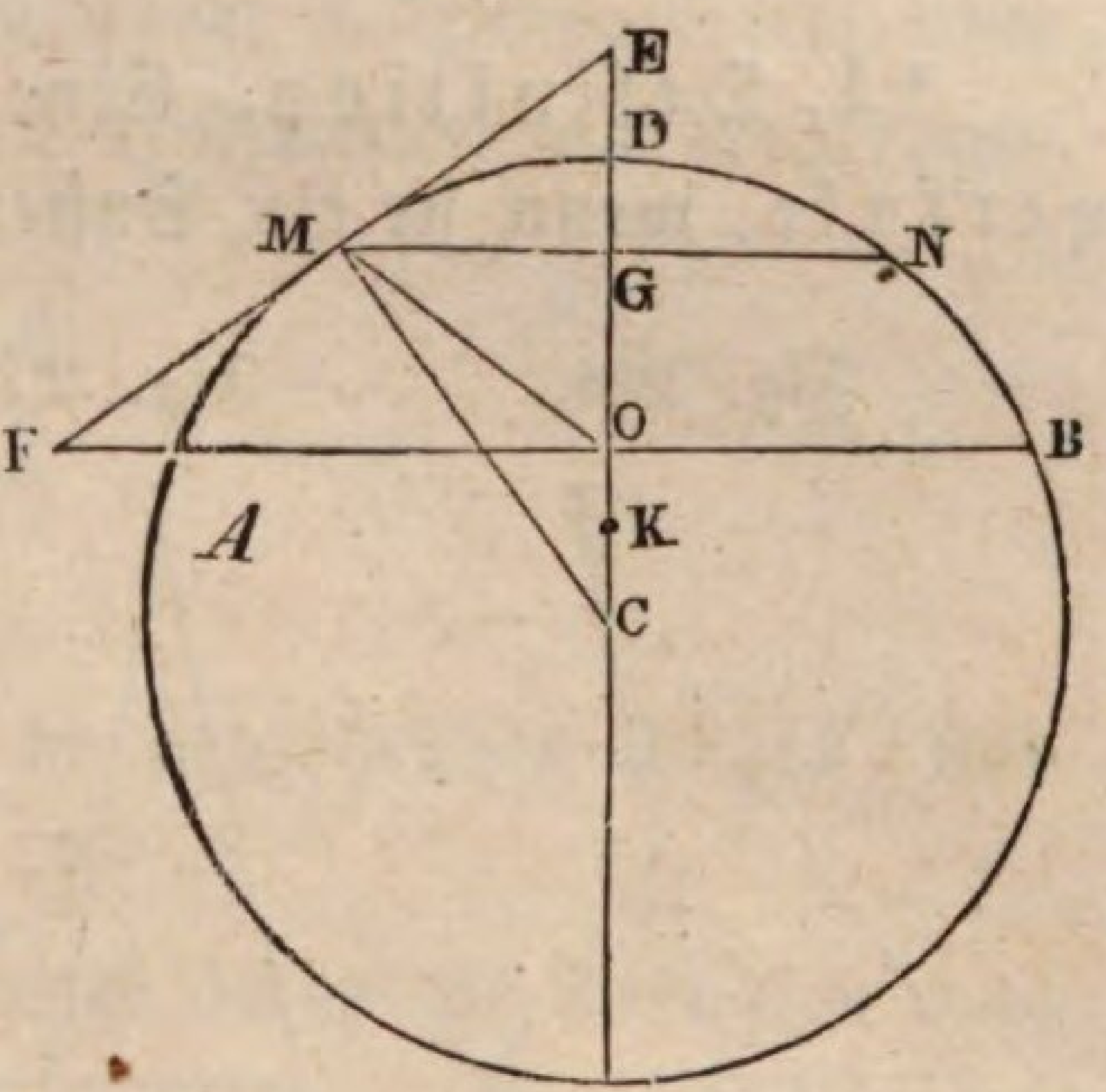
B, *D* seien die Berührungspunkte der gegebenen Tangenten, *A* sei der Punkt, in dem sie sich treffen, *XY* eine dritte Tangente, *O* ihr Berührungspunkt, *C* der Mittelpunkt des Kreises. Zieht man durch *O* eine auf *BD* senkrechte Sehne *OF* (welche *BD* in *E* schneide), und verbindet *F* mit *B* und *D*, so ist $\triangle FBD \sim CXY$, also $EF : BD = CO : XY$. Daraus folgt, daß *XY* am kleinsten wird, wenn *EF* am größten ist. Dies geschieht aber, wenn der Berührungspunkt *O* die Mitte des Bogens *BD* ist.

47. Aufg. In ein gegebenes Kreissegment ein Rechteck einzuschreiben, dessen Umfang ein Maximum ist.

Die der Sehne des Segments parallele Seite des einzuschreibenden Rechtecks muß vier Mal so lang, als ihr Abstand vom Mittelpunkte sein, woraus die Construction des Rechtecks sogleich folgt. Man suche den directen Beweis derselben und die Frage zu entscheiden, wie groß das Segment sein müsse, damit das fragliche Minimum Statt finden könne.

48. **Hülfsaufgabe. An einem gegebenen Kreissegmente eine Tangente EF bis zu den Verlängerungen der dasselbe begrenzenden Sehne AB und des auf dieser senkrechten Halbmessers CD zu ziehen, so aber, daß sie von ihrem Berührungspunkte M halbirt wird.**

Fig. 267.



Auflösung. Zieht man Sehne $MN \parallel AB$ und trifft diese CD in G, CD die AB in O, so muß, da $FM = ME$ sein soll, auch $OG = GE$ sein. Da $EMC = R$, so ist $MG^2 = EG \times GC$, also auch $MG^2 = OG \times GC$. Es ist aber auch $MG^2 = MC^2 - CG^2$, daher $MC^2 = (OG + CG)\ CG$, oder, halbirt man CO in K, $KG \cdot CG = \frac{1}{2} MC^2$. Die Aufgabe ist hierdurch auf die Elementar-Aufgabe V. 67, II., gebracht und findet durch Anwendung der dort gegebenen Auflösung ihre Erledigung.

49. **Aufg. Einem gegebenen Kreissegmente das kleinstmögliche Dreieck zu umschreiben.**

Dieses Dreieck muß 1) gleichschenkelig sein, wie sich leicht direct beweisen läßt; 2) ist unter allen gleichschenkeligen, dem gegebenen Segmente umschriebenen Dreiecken dasjenige, dessen Schenkel vom Berührungspunkte halbirt werden, das kleinste.

Der directe Beweis durch Vergleichung mit den benachbarten Dreiecken wird dem Leser zur Uebung überlassen.

50. **Aufg. Einem gegebenen Kreissegmente das größtmögliche Rechteck einzuschreiben.**

Die im Bogen des Segments liegenden Ecken des größten Rechtecks sind die Berührungspunkte der Seiten des kleinsten umschriebenen Dreiecks. — Beweis!

XIII. Capitel.

Transversalen, harmonische Theilung, Pol und Polare eines Kreises.

Erster Abschnitt.

Sätze über Transversalen.

***1.** Definition. Eine gerade Linie erhält den Namen Transversale, wenn sie ein System anderer Linien durchschneidet.

Fig. 268.

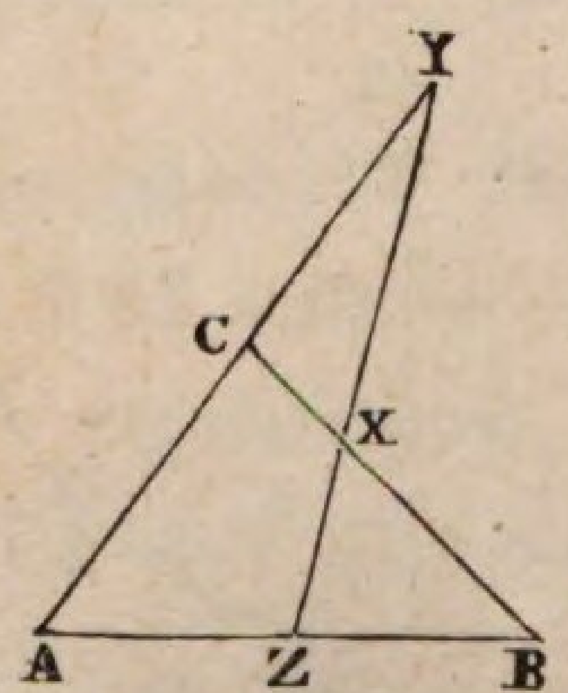
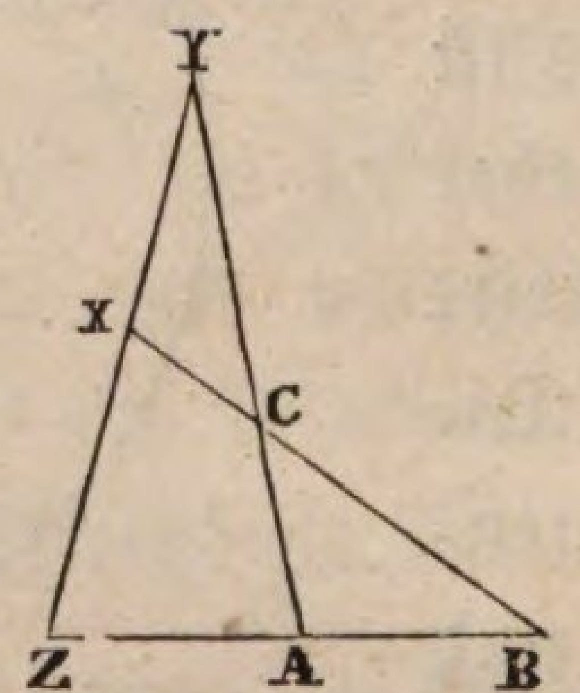


Fig. 269.



Werden die Seiten eines Dreiecks *ABC* oder deren Verlängerungen durch eine Transversale *YZ* in den Punkten *Y*, *X*, *Z* geschnitten, so nennt man die von den Endpunkten *A*, *B*, *C* des Dreiecks bis zu den Durchschnittspunkten *X*, *Y*, *Z* gerechneten Stücke die von der Transversale gebildeten Abschnitte oder Segmente. Dieselbe Bezeichnung gilt für Vielecke. Ein Dreieck hat demnach sechs Abschnitte: *AZ*, *ZB*, *BX*, *XC*, *CY*, *YA*. Geht man diese sechs Segmente in der Ordnung durch, in welcher sie sich mit ihren Endpunkten an einander schließen, so finden sich drei, nämlich das erste, dritte, fünfte, so wie drei andere, nämlich das zweite, vierte, sechste, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben.

Eck-Transversale eines Vielecks ist eine durch die Ecke des Vielecks gehende Transversale; sie kann innerhalb oder außerhalb der Fläche des Vielecks liegen.

Zusatz. Werden die Seiten eines Dreiecks durch eine Transversale geschnitten, so liegen entweder: a) zwei Durchschnittspunkte *X* und *Z* auf den Seiten des Dreiecks selbst, der dritte *Y* auf der Verlängerung, oder b) alle drei Durchschnittspunkte liegen auf den Verlängerungen der Seiten. Ein dritter Fall ist nicht möglich.

***2. Satz. Wenn die drei Seiten eines Dreiecks von einer Transversale geschnitten werden, so ist das Product derjenigen drei Segmente, welche keinen Endpunkt gemeinschaftlich haben (des ersten, dritten, fünften), dem Producte der drei übrigen (des zweiten, vierten, sechsten) gleich. Es ist:**

$AZ \cdot BX \cdot CY =$
$BZ \cdot CX \cdot AY.$

Fig. 270.

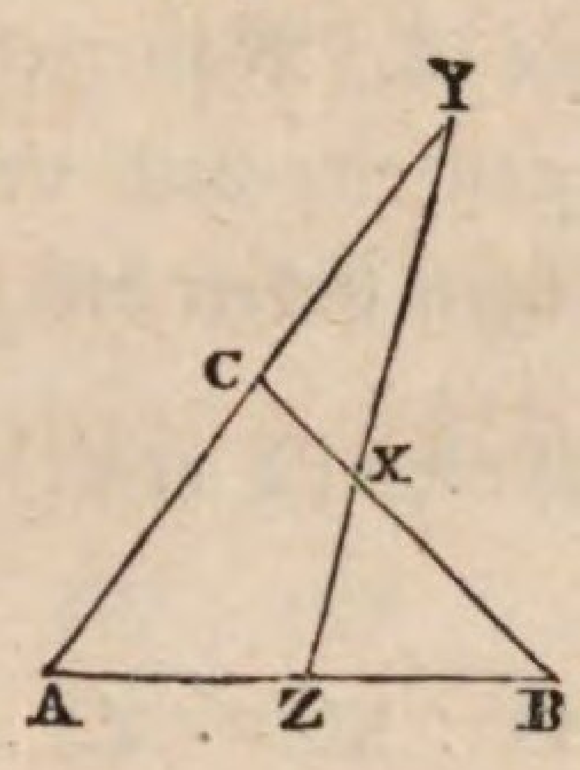
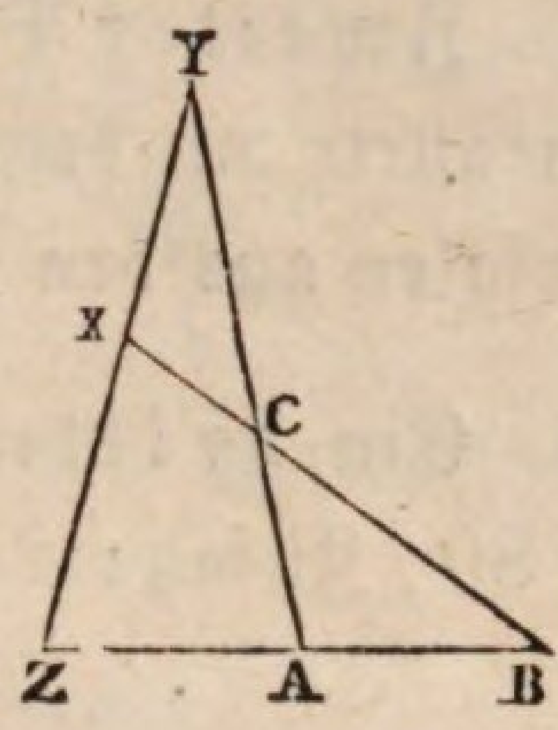


Fig. 271.



Zum Beweise ziehe man durch eine der drei Ecken des Dreiecks eine Parallele mit der Transversale bis zur gegenüber stehenden Seite, oder mit der gegenüber stehenden Seite bis zum Durchschnitte mit der Transversale.

Zusatz. Es ist $YC : YA = \frac{CX}{BX} : \frac{AZ}{BZ}$.

Erweiterung des Satzes V. 39.

***3. Wie heißt die Umkehrung des vorhergehenden Satzes, und wie wird die Umkehrung bewiesen?**

Bemerk. Bei der Umkehrung ist der obige Zusatz zur Definition wohl zu berücksichtigen.

***4. Dieselben Sätze 2 und 3 gelten auch für jedes beliebige Vieleck.**

Man beweise den Satz stufenweise mit Hülfe des 2. Satzes für das Viereck, Fünfeck u. s. w.

***5. Satz. Durchschneiden sich die Eck-Transversalen *AX*, *BY*, *CZ* eines Dreiecks *ABC* in einem Punkte *O* innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks, so ist immer das Product dreier nicht aneinander stoßender Abschnitte der Seiten dem Producte der drei übrigen gleich.**

$AY \cdot CX \cdot BZ =$
$CY \cdot BX \cdot AZ.$

Fig. 272.

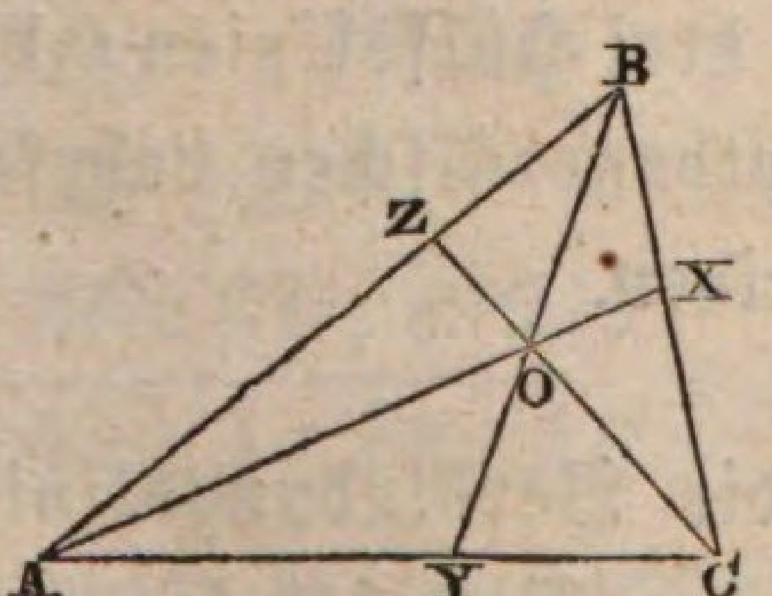
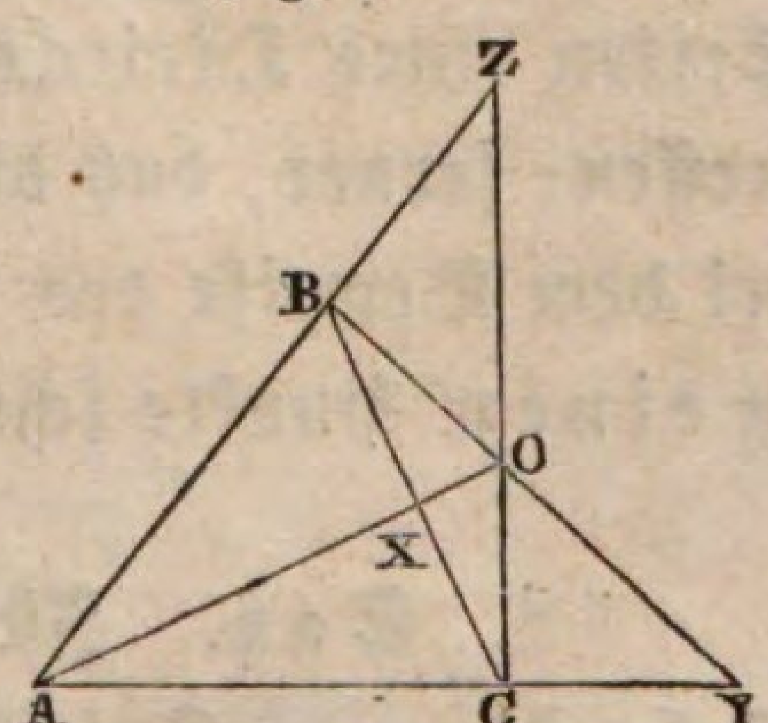


Fig. 273.



Den Beweis kann man auf den vorhergehenden Satz stützen, in=

dem man 1) ZC als Transversale des $\triangle\ ABY$, und 2) AX als Transversale des $\triangle\ BYC$ betrachtet.

Zweiter Beweis. Man ziehe durch eine Ecke des Dreiecks eine Parallele mit der Gegenseite und verlängere nöthigenfalls die Transversalen aus den übrigen Ecken bis zur Parallelen.

Ein dritter Beweis ergiebt sich durch Anwendung von Satz V. 80, Zusatz:

$$AY : YC = \triangle\ AOB : \triangle\ BOC,$$
$$CX : XB = \triangle\ AOC : \triangle\ AOB,$$
$$BZ : ZA = \triangle\ BOC : \triangle\ AOC,$$

woraus sich leicht die Richtigkeit der obigen Behauptung ergiebt.

Zusatz. Es läßt sich, unabhängig von obigem Satze, zeigen, daß das Product aus den abwechselnd liegenden Dreiecken AOY, COX und BOZ dem Producte aus den übrigen Dreiecken COY, BOX und AOZ gleich sei, und hieraus ergiebt sich ein vierter Beweis für den Hauptsatz.

Bemerk. Liegt der Durchschnittspunkt O der Eck-Transversalen innerhalb des Dreiecks, so liegen sämmtliche sechs Segmente innerhalb der Seiten des Dreiecks; liegt O außerhalb des Dreiecks, so liegt ein Paar der Segmente innerhalb, die beiden anderen Paare liegen ganz oder zum Theil außerhalb.

***6. Satz. Wie heißt die Umkehrung des vorhergehenden Satzes? Welche Beschränkung muß in Rücksicht auf die Bemerkung zu dem vorhergehenden Satze über die Lage der Segmente gemacht werden?**

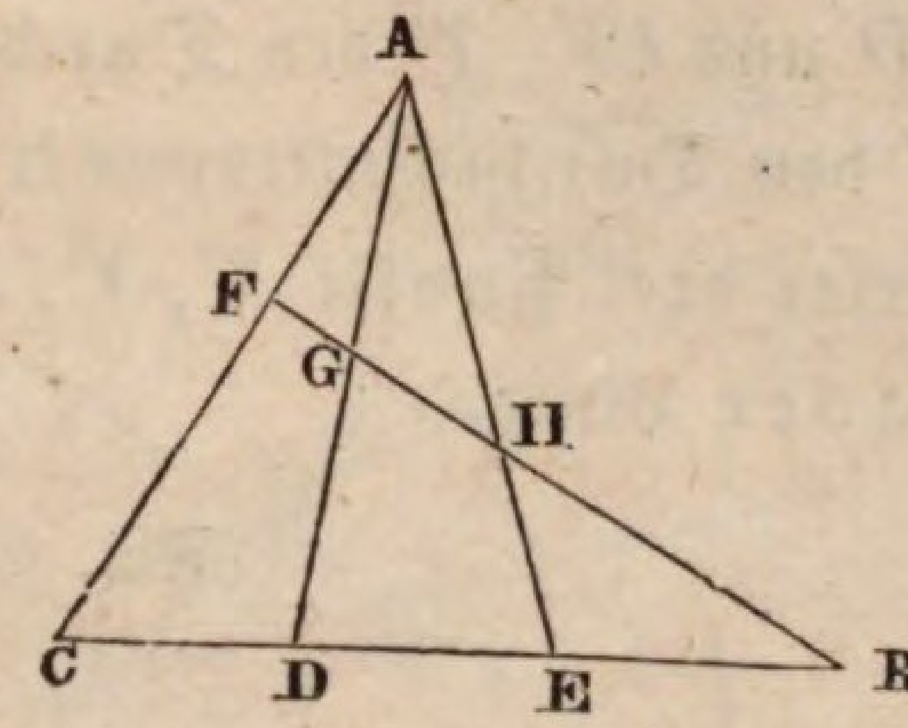
***7. Die Sätze über das Zusammentreffen der drei Mittellinien, der drei Höhen und der Halbirungslinien der Winkel** (II, 51, 52, 53) **sollen mit Hülfe des vorhergehenden Satzes bewiesen werden. Eben so soll bewiesen werden, daß diejenigen Geraden, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Berührungspunkten der Kreise verbinden, welche die Seiten eines Dreiecks berühren** (III. 33), **in einem Punkte zusammentreffen; ferner, daß die drei Hülfslinien** CY, AG, JB (Seite 66), **welche bei dem Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes gebraucht werden, sich in einem Punkte schneiden.**

***8. Satz. Ist die Verbindungslinie zweier Punkte** X **und** Z **(siehe Figur zu Satz 5) der Grundlinie parallel, so wird die Grundlinie durch die dritte Transversale** BY **halbirt.**

***9. Satz. Werden zwei in B sich durchschneidende gerade Linien von drei anderen in einem Punkte A zusammentreffenden AC, AD, AE geschnitten, so ist:**

$$FG \cdot HB : GH \cdot FB = CD \cdot EB : DE \cdot CB.$$

Fig. 274.

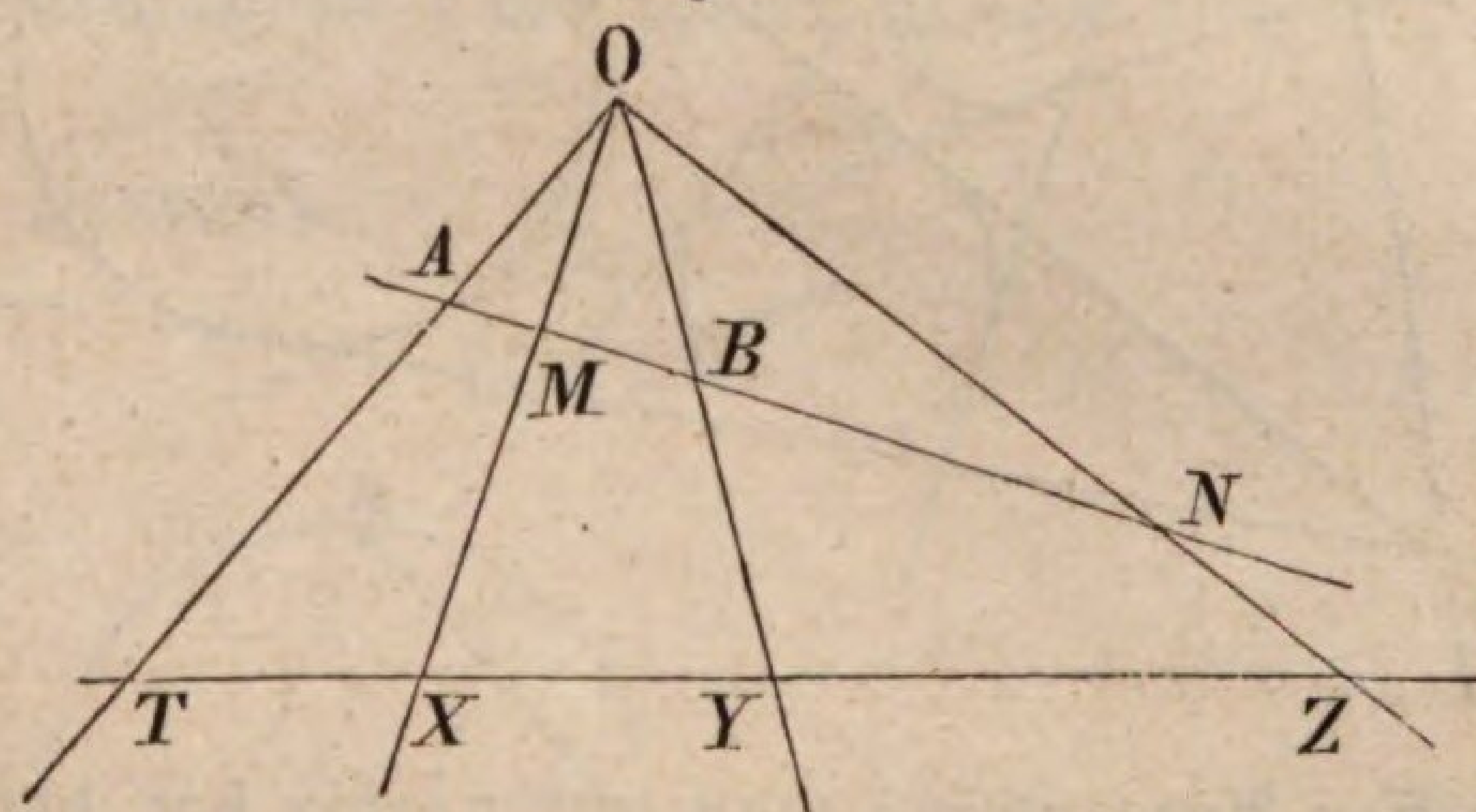


Nach 2, Zusatz ist:

$$AG : AD = \frac{FG}{FB} : \frac{CD}{CB}.$$
$$= \frac{GH}{HB} : \frac{DE}{EB}$$

woraus der Satz sich leicht ergiebt.

Fig. 275.

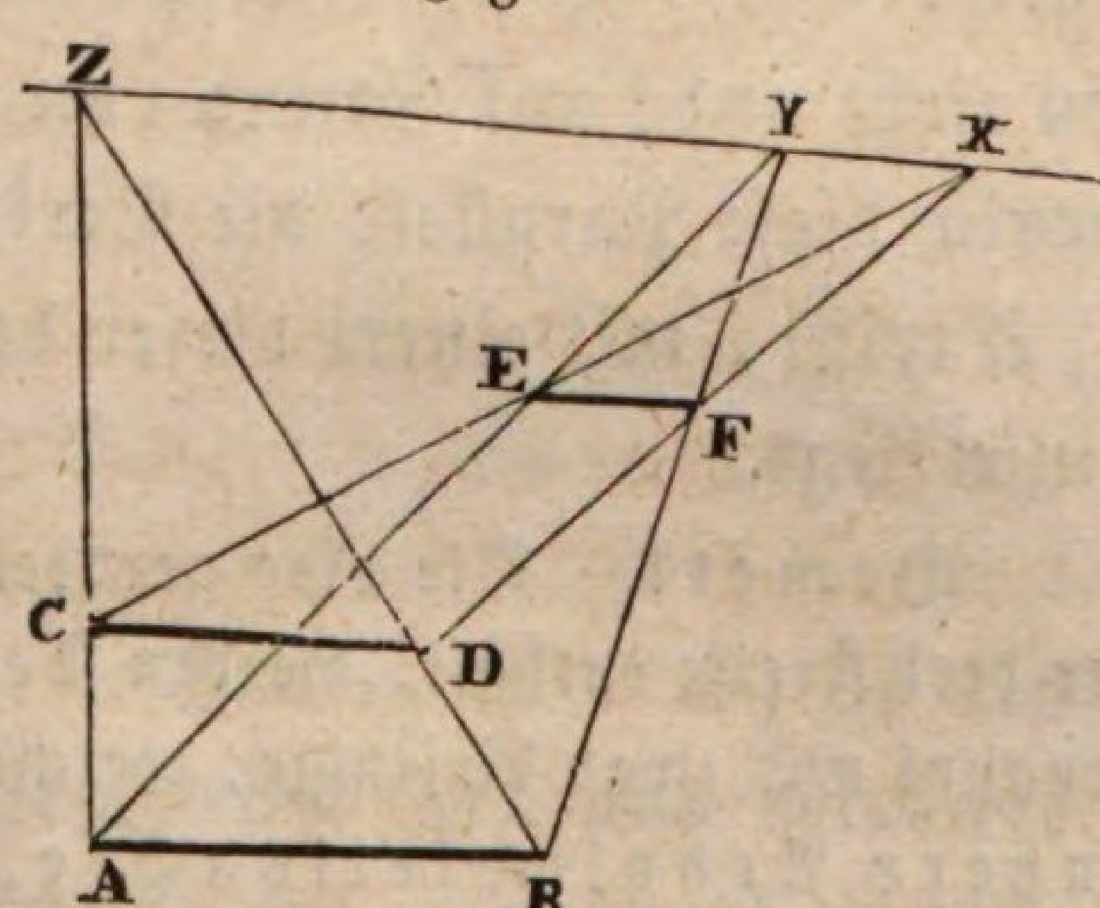


Zusatz. Werden vier in einem Punkte O schneidende gerade Linien von zwei geraden Linien in den Punkten A, M, B, N und T, X, Y, Z geschnitten, so ist:

$$AM \cdot BN : AN \cdot BM = TX \cdot YZ : TZ \cdot XY.$$

Der Beweis führt auf den Hauptsatz zurück, wenn man T mit N verbindet.

Fig. 276.



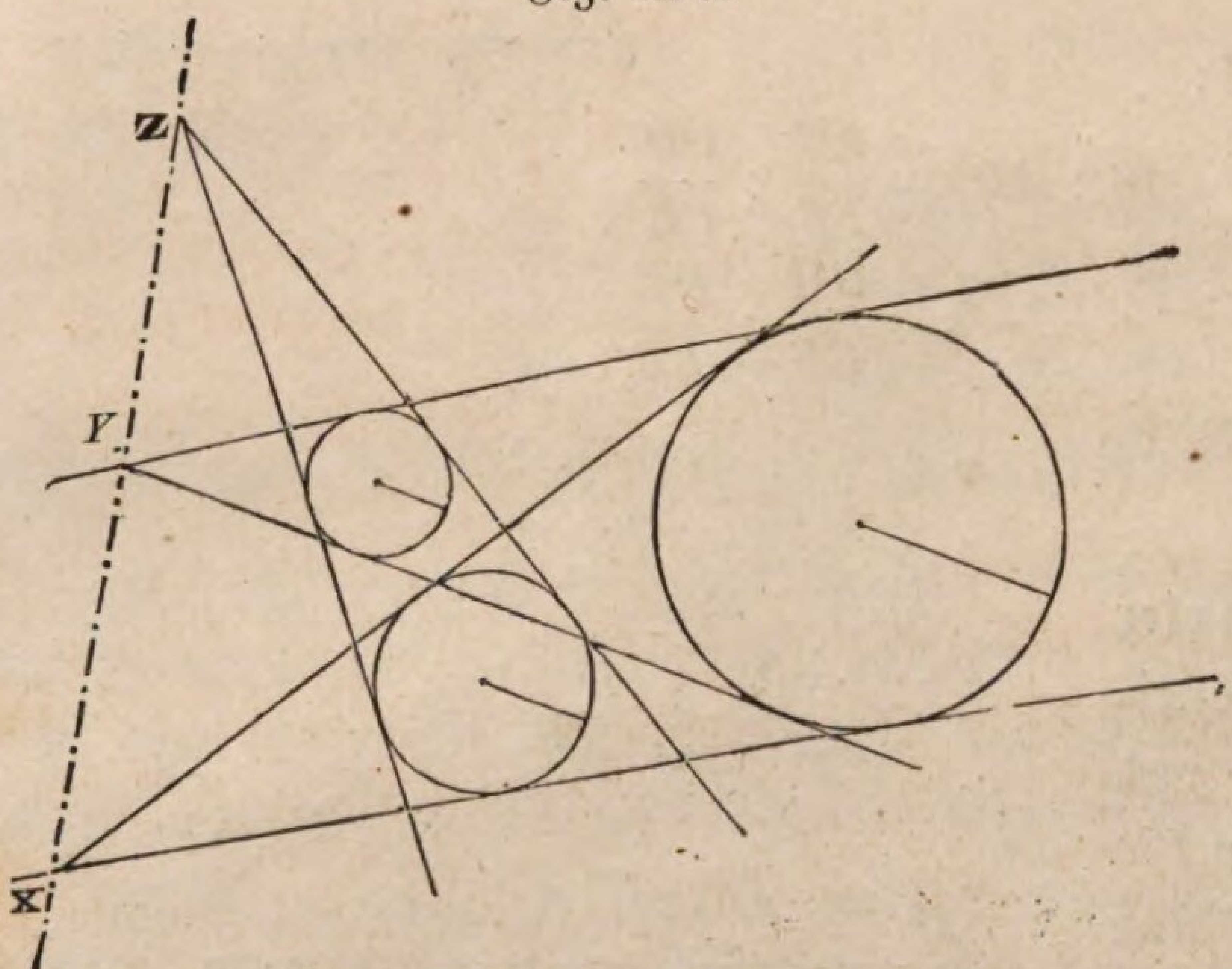
***10. Satz. Zieht man durch die Endpunkte der drei Parallelen AB, CD, EF die sich paarweise in Z, Y, X schneidenden Geraden ZA, ZB, YA, YB, XC, XD, so liegen diese drei Durchschnittspunkte in einer geraden Linie.**

$$ZC : ZA = CD : AB,$$
$$YA : YE = AB : EF,$$
$$XE : XC = EF : CD, \text{ mithin:}$$
$$ZC \cdot YA \cdot XE : ZA \cdot YE \cdot XC = 1 : 1.$$

Die auf den Verlängerungen des Dreiecks ECA liegenden Punkte Z, Y, X müssen also nach S. 3 dieses Capitels in gerader Linie liegen.

Zusatz. Nennt man X' den Durchschnittspunkt der beiden Linien ED und CF, Y' den Durchschnittspunkt der beiden Linien EB, AF, und Z' den Durchschnittspunkt der beiden Linien AD, BC, so liegen je zwei dieser drei Punkte X', Y', Z' mit einem der drei Punkte X, Y, Z in gerader Linie.

Fig. 277.



***11. Satz. Sind drei Kreise gegeben, so liegen 1) die drei äußeren Aehnlichkeitspunkte** (IX. 10) **derselben,** X, Y, Z, **unter sich, 2) auch je zwei innere mit einem äußeren in gerader Linie.**

Der Beweis kann 1) auf den vorhergehenden Satz gegründet werden, zu dessen Anwendung man nur nöthig hat, drei parallele Radien zu ziehen, welche hier die im vorigen Satze mit AB, CD, EF bezeichneten Linien sind; 2) auch dadurch geführt werden, daß man durch das Centrum eines der drei Kreise eine Parallele mit der Centralen der beiden anderen zieht und, auf Grund von V. 39, Zus., nachweist, daß der Punkt, worin diese Parallele die Verbindungslinie zweier der drei Punkte X, Y, Z trifft, mit einem dieser beiden und dem dritten Punkte in gerader Linie liegt.

Bemerk. Die vier geraden Linien, deren jede drei Aehnlichkeitspunkte der drei Kreise enthält, werden Aehnlichkeits- oder Symmetral-Achsen genannt und zwar diejenige, welche die drei äußern Aehnlichkeitspunkte enthält, äußere Aehnlichkeitsachse, die drei übrigen, welche eine äußere und zwei innere der genannten Punkte verbinden, innere Aehnlichkeitsachsen.

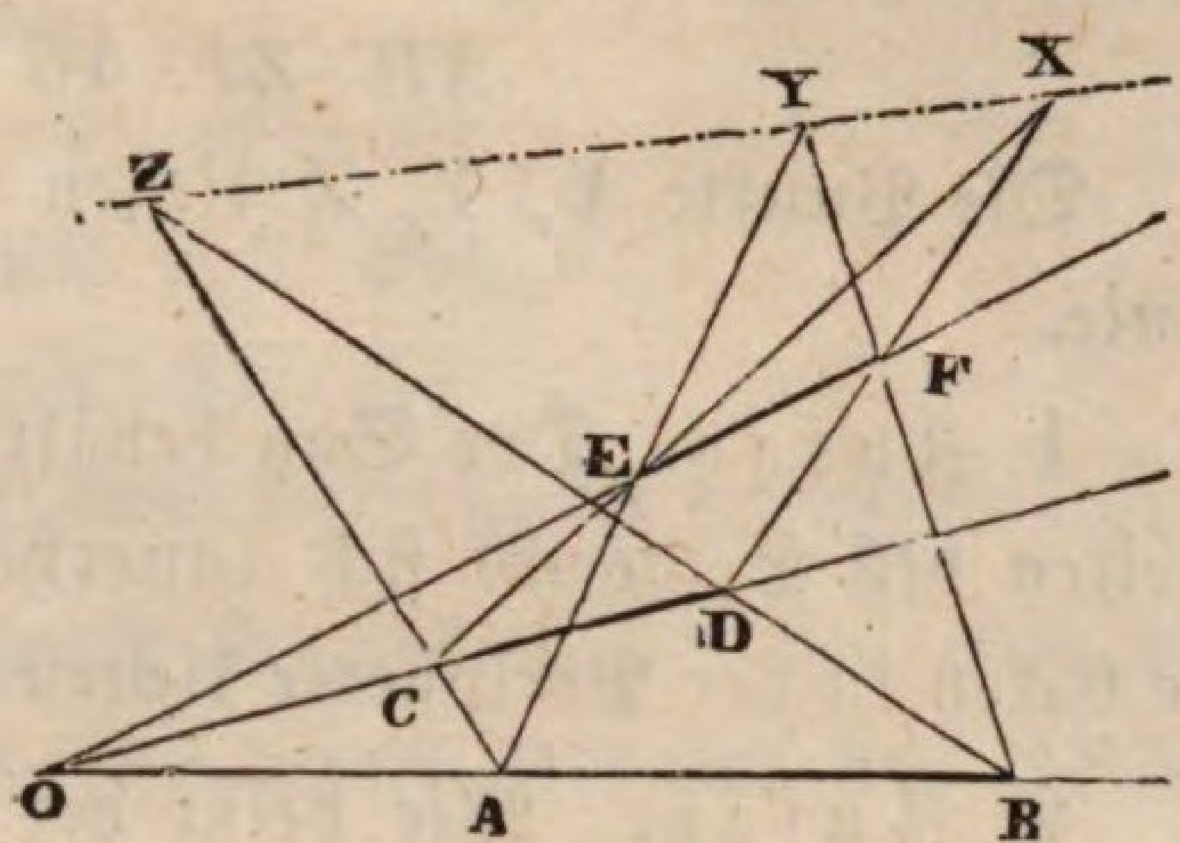
***12. Satz. Der 10. Satz findet auch Statt, wenn die drei Linien** AB, CD, EF **nicht einander parallel sind, sondern sich in einem Punkte** O **schneiden.**

Die Seiten des $\triangle\ OCA$ sind durch die Transversale ZDB in den Punkten Z, D, B geschnitten, also in Folge des Satzes 2:

$$ZC : ZA = CD \cdot OB : AB \cdot OD.$$

Drückt man nun mit Hülfe desselben Satzes die Verhältnisse $YA : YE$ und $XE : XC$ durch ihnen gleiche aus, so erhält man den Beweis des Satzes in ähnlicher Weise wie bei Satz 10.

Fig. 278.



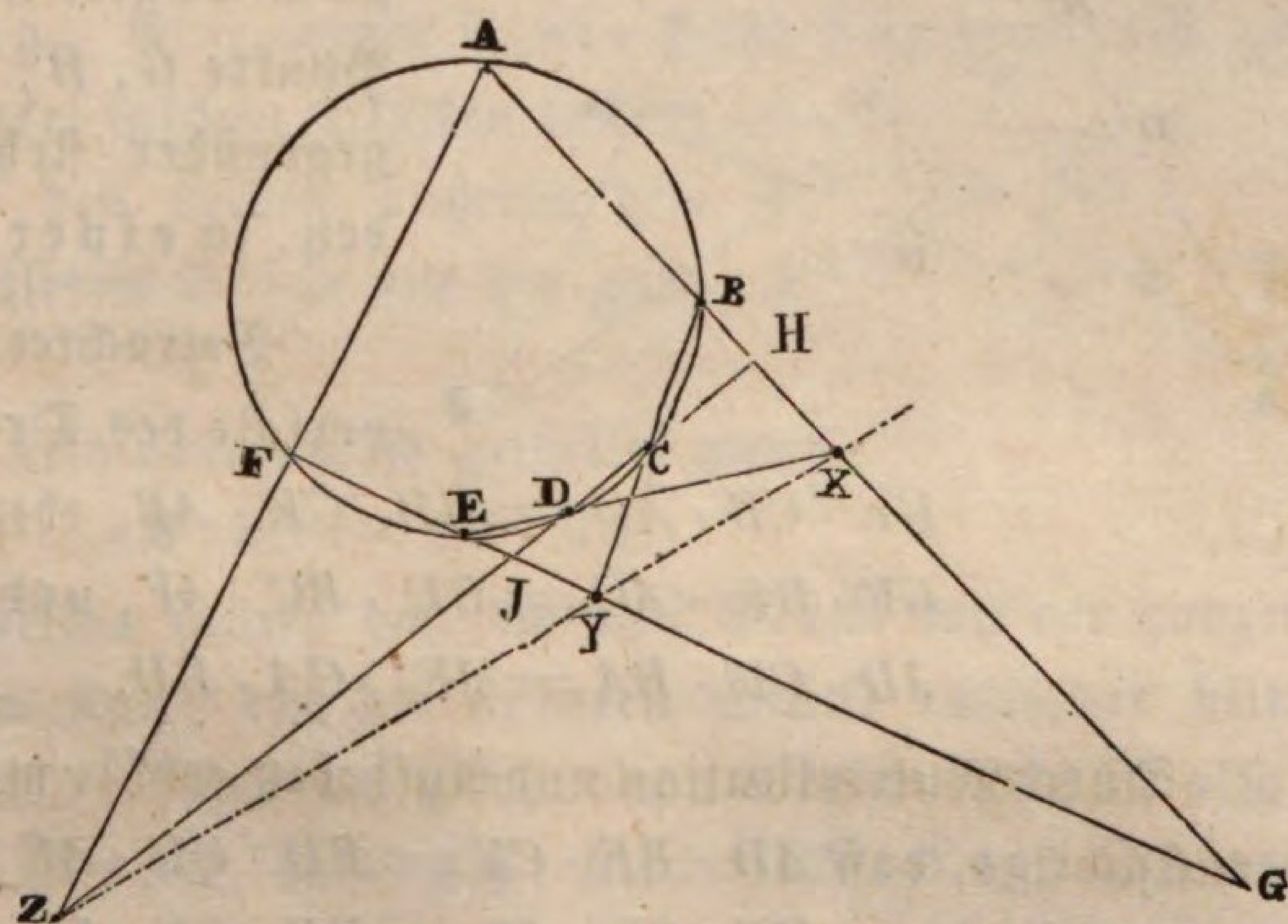
1. Zusatz. Der Zusatz des Satzes 10 gilt auch für diesen Satz.

2. Zusatz. Durchschneiden sich in einem Sechsecke $ADFBCE$ die Diagonalen AB, CD, EF in einem Punkte O, so liegen 1) der Durchschnitt x der beiden Seiten DF, EC, 2) der Durchschnitt y der beiden Seiten AE, BF, 5) der Durchschnitt z der beiden Diagonalen AC, BD in einer geraden Linie.

Der Satz stützt sich auf den Hauptsatz.

13. Satz. Verlängert man in einem Kreissechsecke $ABCDEF$ je zwei gegenüber liegende Seiten AB und DE, BC und EF, CD und FA bis zu den Durchschnittspunkten X, Y, Z, so liegen diese Durchschnitts-Punkte in einer geraden Linie.

Fig. 279.



Man bilde aus den abwechselnd liegenden Seiten AB, CD, EF des Sechsecks durch Verlängerung derselben ein Dreieck GHJ und betrachte die übrigen Seiten des Sechsecks als Transversalen, alsdann ist nach 2:

$$BH \cdot CJ \cdot YG = BG \cdot CH \cdot YJ,$$

$$XH \cdot DJ \cdot EG = XG \cdot DH \cdot EJ,$$

$$AH \cdot ZJ \cdot FG = AG \cdot ZH \cdot FJ.$$

Multiplicirt man die Gleichungen mit einander und berücksichtigt, daß:

$$BH \cdot AH = CH \cdot DH,$$

$$CJ \cdot DJ = EJ \cdot FJ,$$

$$EG \cdot FG = BG \cdot AG,$$

so erhält man:

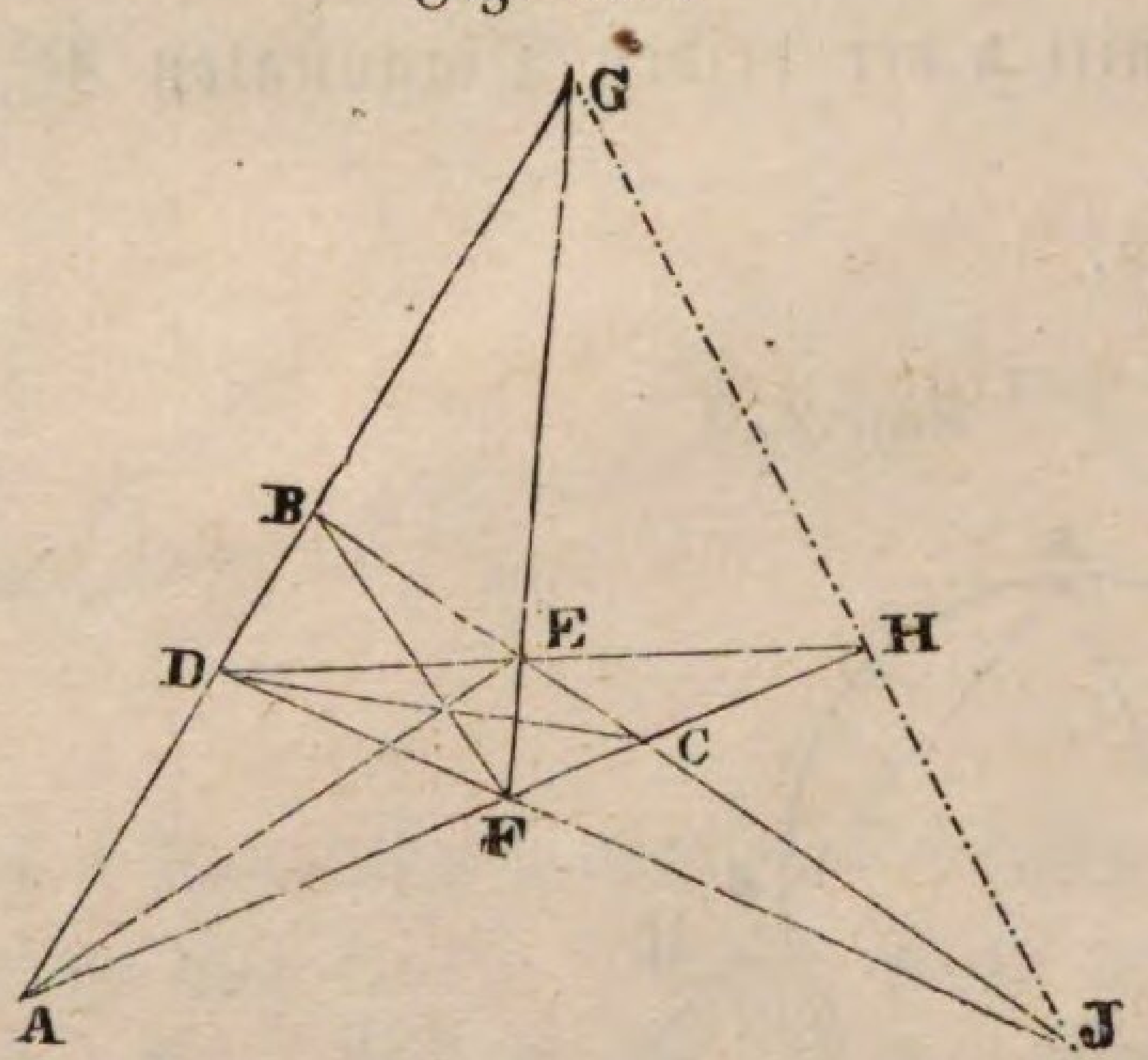
$$XH \cdot ZJ \cdot YG = XG \cdot ZH \cdot YJ.$$

Die Punkte X, Y, Z liegen somit nach Satz 3 in einer geraden Linie.

1. Zusatz. Der Satz behält auch dann seine Gültigkeit, wenn die Seiten des Sechsecks sich innerhalb des Kreises kreuzen, wofern nur die Ecken in der Peripherie liegen.

2. Zusatz. Wie heißt der Satz, wenn irgend zwei Endpunkte sich in einem Punkte vereinigen? Wie heißt der Satz für das dem Kreise eingeschriebene Dreieck?

Fig. 280.



14. Satz. Beschreibt man in einem Dreiecke ABC ein anderes DEF, so daß die drei Geraden, welche die gegenüber stehenden Ecken mit einander verbinden, sich in einem Punkte O schneiden, so sind die Punkte G, H, J, in welchen sich die gegenüber stehenden Seiten schneiden, in einer Geraden enthalten.

Betrachtet man HA als die Transversale des Dreiecks DBE, so ist:

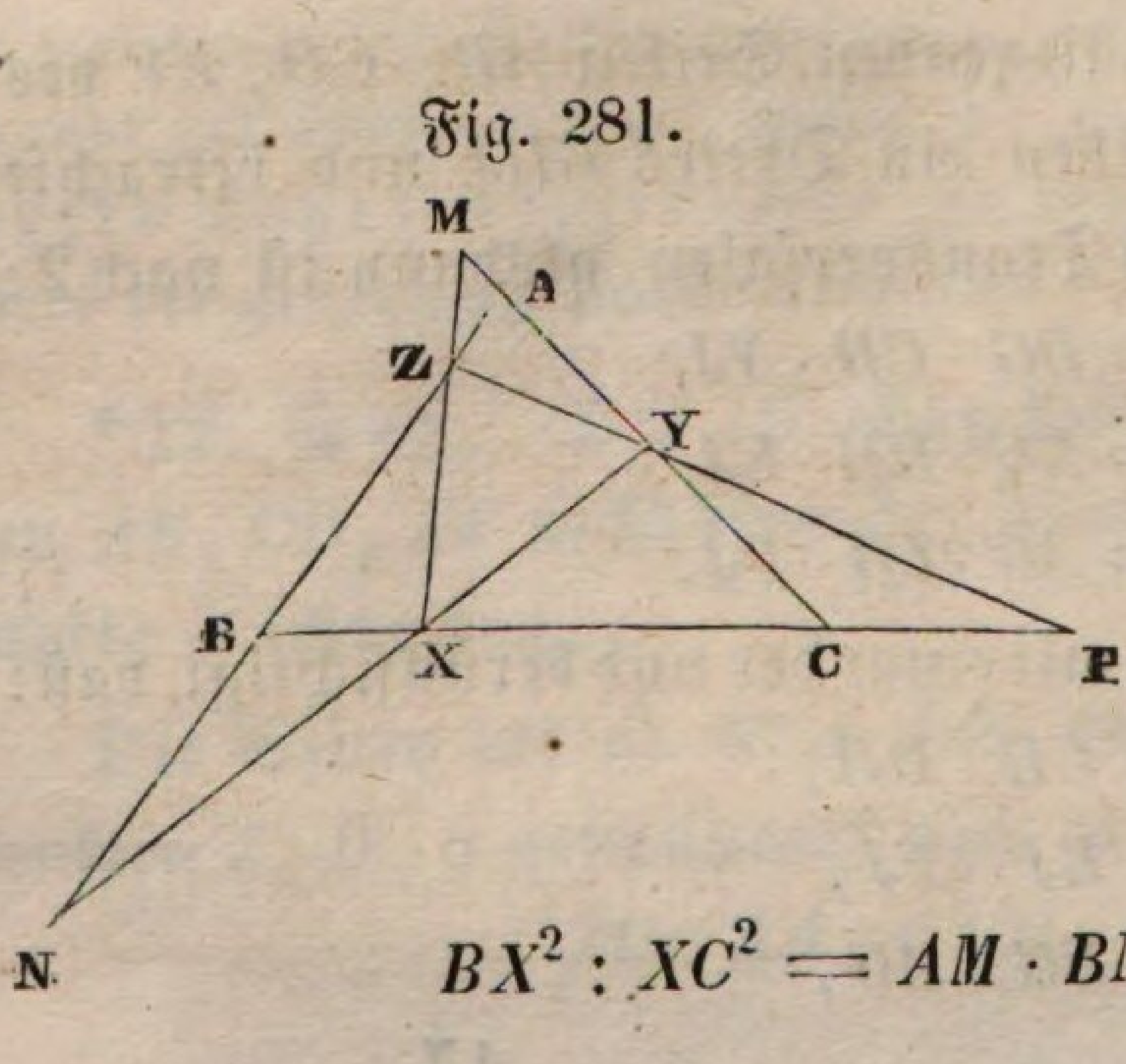
$$HE \cdot CB \cdot AD = HD \cdot CE \cdot AB, \text{ eben so ist:}$$
$$GF \cdot BE \cdot AC = GE \cdot BC \cdot AF, \text{ und}$$
$$JD \cdot CF \cdot BA = JF \cdot CA \cdot BD.$$

Durch Multiplication und Aufheben erhält man, wenn man zugleich berücksichtigt, daß $AD \cdot BE \cdot CF = BD \cdot CE \cdot AF$ ist:

$$HE \cdot GF \cdot JD = HD \cdot GE \cdot JF.$$

Die Punkte G, H, J liegen demnach in einer geraden Linie.

Fig. 281.



15. Satz. Ist XYZ ein beliebiges Dreieck, eingeschrieben einem anderen ABC, und treffen die gegenüber stehenden Seiten beider Dreiecke paarweise einander in M, N, P, so ist:

$$BX^2 : XC^2 = AM \cdot BN \cdot BP : AN \cdot CM \cdot CP.$$

Beweis. Betrachtet man nach einander XY, XZ, YZ als Transversalen des Dreiecks ABC, so hat man:

$$AN \cdot BX \cdot CY = NB \cdot XC \cdot YA,$$
$$AZ \cdot BX \cdot CM = ZB \cdot XC \cdot MA,$$
$$ZB \cdot CP \cdot YA = AZ \cdot BP \cdot CY.$$

Nach vollzogener Multiplication erhält man leicht den oben aufgestellten Satz.

16. **Aufgabe. In ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 281) ein anderes XYZ einzuschreiben, dessen Seiten durch drei auf den Seiten des ersten liegende Punkte M, N, P gehen.**

Mit Hülfe des vorhergehenden Satzes zu lösen.

Zweiter Abschnitt.

Harmonische Theilung und harmonische Strahlen.

17. **Erklärung.** Eine gerade Linie heißt harmonisch getheilt, wenn sie aus drei solchen Stücken besteht, daß das Rechteck aus den beiden äußeren dem Rechtecke aus dem mittleren Stücke und der ganzen Linie gleich ist.

Fig. 282.



Die Linie AN ist also harmonisch getheilt, wenn:

$$AM \cdot BN = MB \cdot AN.$$

Aus dieser Definition folgt, daß die drei Stücke mit der ganzen Linie so proportionirt sind, daß die äußeren Stücke entweder beide äußere, oder beide innere Glieder der Proportion werden. Es ist also:

$$AM : MB = AN : NB, \text{ oder: } BM : MA = BN : NA^{*}).$$

Von vier Punkten einer geraden Linie sagt man, sie seien harmonisch gelegen, wenn der Abstand der beiden äußeren Punkte durch die beiden mittleren harmonisch getheilt ist. Von den vier Punkten werden je zwei, die einen dritten zwischen sich haben, conjugirte (einander zugeordnete) genannt; zu jedem äußeren gehört also der nicht benachbarte innere als conjugirter, und es giebt nur zwei Paar conjugirter Punkte.

---

*) Aus $AN : NB = AM : MB$ folgt $AN : NB = AN - NM : NM - AB$. MN ist also das harmonische Mittel zu AN und NB (s. V. 64). Auf dieser Eigenschaft beruht die Benennung „harmonische Proportion."

Aus der obigen Erklärung der harmonischen Lage von vier Punkten folgt, daß von vier harmonisch gelegenen Punkten zwei conjugirte von den zwei anderen conjugirten Abstände haben, welche paarweise in gleichem Verhältnisse stehen. Es ist also sowohl das Verhältniß $MA : MB$ dem von $NA : NB$, als auch das Verhältniß $BM : BN$ dem von $AM : AN$ gleich. Man nennt daher eine Linie harmonisch getheilt, wenn sie in zwei verschiedenen Punkten nach einem und demselben, übrigens willkürlichen, Verhältnisse getheilt ist.

Das Doppelverhältniß $\frac{AM}{MB} : \frac{AN}{NB}$, dessen Werth gleich 1 ist, heißt das **harmonische Verhältniß**. Ist aber eine Linie so getheilt, daß das Doppelverhältniß $\frac{AM}{MB} : \frac{AN}{NB}$ einen Werth hat, der $\gtrless 1$ ist, so heißt dieses Verhältniß das **anharmonische Verhältniß**.

Vier gerade Linien, welche von vier harmonisch gelegenen Punkten einer Linie ausgehen und entweder einander parallel sind oder sich in ein und demselben Punkte schneiden, heißen **harmonische Strahlen, Harmonikalen**. Die durch zugeordnete Punkte gehenden Harmonikalen heißen **zugeordnete Harmonikalen**.

18. Aufgabe. Von vier harmonisch gelegenen Punkten seien zwei conjugirte Punkte und das Verhältniß der Entfernungen eines der andern conjugirten Punkte von diesen Punkten gegeben; diese beiden anderen Punkte zu construiren.

Leicht nach V. 61.

19. Aufg. Zu drei auf einer geraden Linie gegebenen Punkten einen vierten, harmonisch mit denselben gelegenen, Punkt zu finden.

Leicht.

Zusatz. Liegt einer der drei gegebenen Punkte in der Mitte zwischen den beiden anderen, so hat jener Punkt keinen zugeordneten Punkt, oder der zugeordnete Punkt liegt in unendlicher Entfernung.

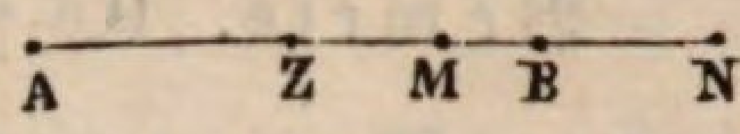
20. Satz. Der mittlere Theil einer harmonisch getheilten Linie muß immer der kleinste der drei Theile der Linie sein, und die Mitte des Abstandes zweier conjugirten Punkte fällt immer in einen äußeren Theil.

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus der Proportion.

Zusatz. Drei der harmonischen Punkte liegen auf einer Seite jener Mitte, und nur einer auf der anderen.

21. Satz. Halbirt man in einer harmonisch getheilten Linie AN **den Abstand** AB **zweier zugeordneten Punkte in** Z**, so sind die Abstände des Halbirungspunktes** Z **von den drei auf einerlei Seite von ihm gelegenen Punkten stetig proportionirt.**

Fig. 283.



$$ZM : ZB = ZB : ZN.$$

Der Beweis ist auf V. 27 zu stützen.

Der Satz gilt auch umgekehrt: ist $ZM : ZB = ZB : ZN$, und $ZA = ZB$, so sind A, M, B, N vier harmonisch gelegene Punkte.

22. Satz. Die Halbirungslinien des Innen- und Außenwinkels eines Dreiecks theilen die gegenüber stehende Seite des Dreiecks harmonisch.

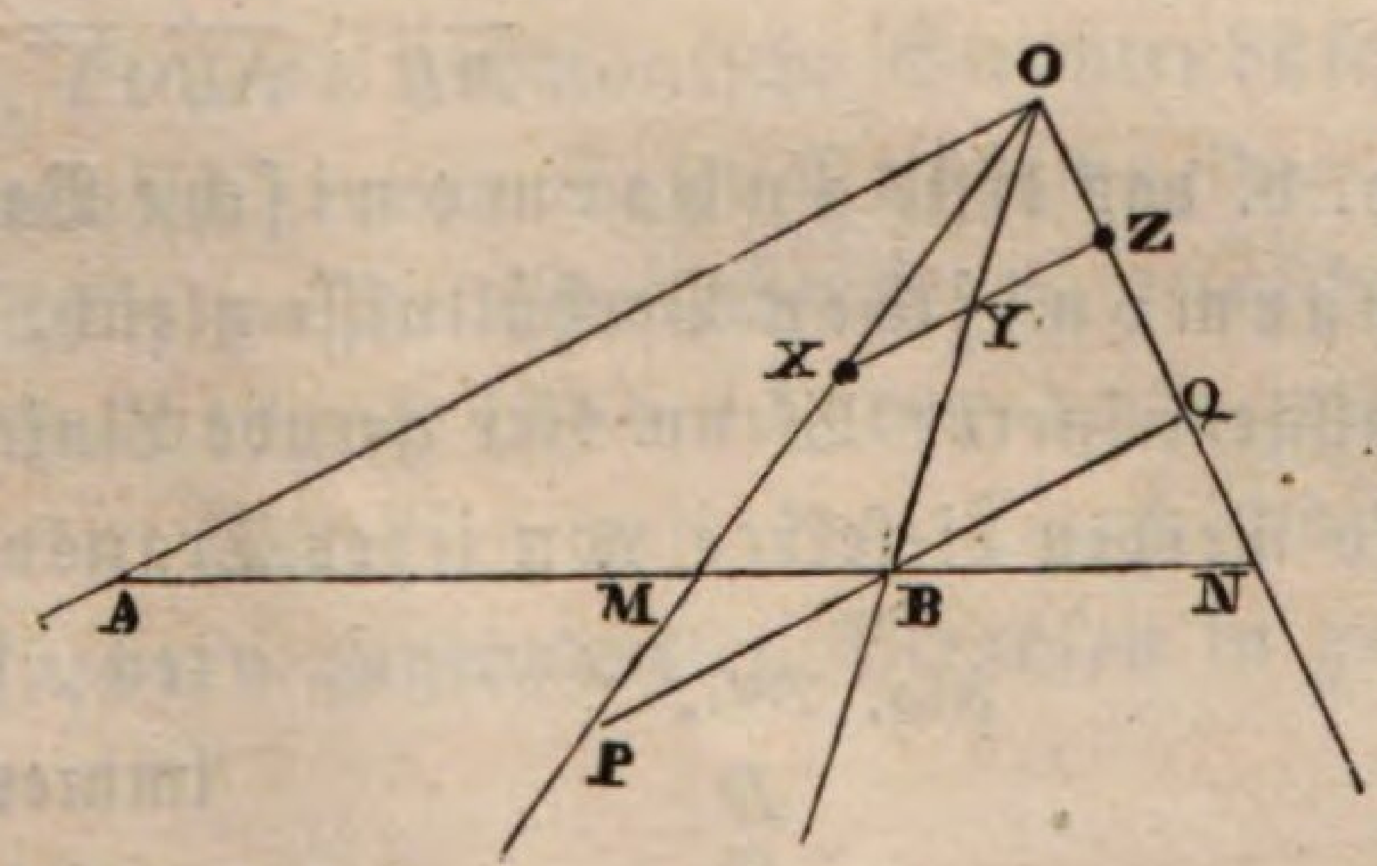
Unmittelbare Folge aus V. 49.

Zusatz. Die auf einander senkrecht stehenden Halbirungslinien der Winkel zweier geraden Linien bilden mit den Schenkeln dieser Winkel harmonische Strahlen; und stehen von vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete auf einander senkrecht, so halbiren diese die Winkel der beiden andern zugeordneten Strahlen.

23. Satz. Ist eine gerade Linie einer von vier harmonischen Strahlen parallel, so werden von den drei übrigen Strahlen gleiche Stücke auf ihr abgeschnitten.

Die harmonischen Strahlen, welche durch die vier harmonischen Punkte A, M, B, N gehen, seien OA, OM, OB, ON, und $XZ \parallel AO$ treffe die übrigen in X, Y, Z. Man ziehe durch B mit XZ eine Parallele und zeige mit Hülfe der Voraussetzung, daß $BP = BQ$, woraus sich der Satz leicht ergiebt.

Fig. 284.

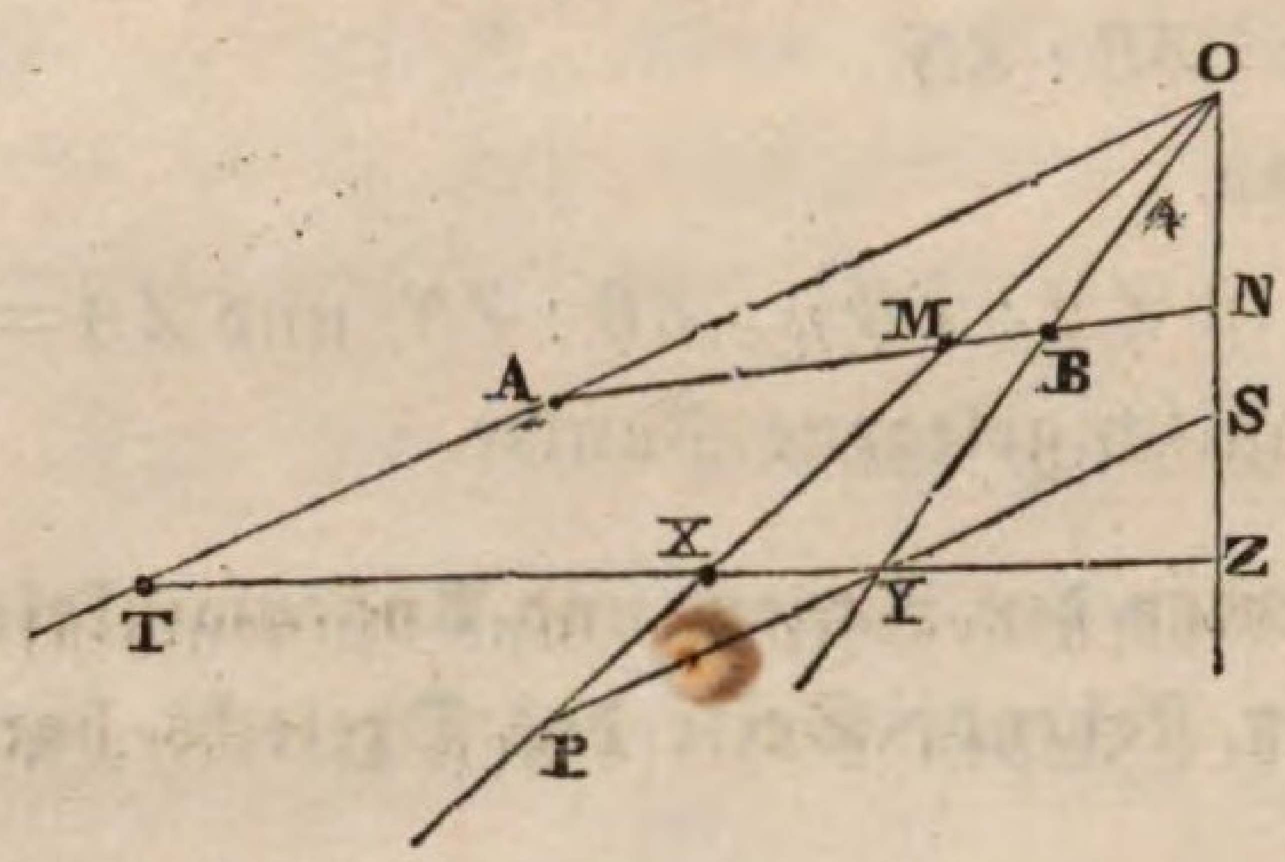


Zusatz. Der Satz gilt auch umgekehrt. Ist $XY = YZ$ und $XZ \parallel AO$, so sind OA, OX, OY, OZ harmonische Strahlen. Es werden also zwei Seiten eines Dreiecks, die zwischen ihnen liegende Mittellinie, und eine durch die Spitze des Dreiecks mit der Grundlinie parallel gezogene Linie harmonische Strahlen sein.

24. Satz. Jede gerade Linie, welche vier harmonische Strahlen schneidet, wird selbst von ihnen harmonisch getheilt.

Beweis. Es seien A', M, B, N vier harmonisch gelegene Punkte; OA, OM, OB, ON also vier harmonische Strahlen. Um zu beweisen, daß die Linie TZ harmonisch in den Punkten X und Y getheilt werde, lege man durch Y mit AO eine Parallele PS, alsdann ist $PY = YS$ (S. 23). Es läßt sich nun hieraus leicht nachweisen, daß das Verhältniß $TX : XY$ dem Verhältnisse $TZ : ZY$ gleich ist.

Fig. 285.



Der Satz läßt sich auch mit Hülfe des Satzes 9, Zusatz von Transversalen Seite 255 beweisen; ist nämlich dort (Fig. 275) $AM \cdot BN = AN \cdot BM$, so ist auch $TX \cdot YZ = XY \cdot TZ$.

1. Zusatz. Sind AN und TZ in M, B und X, Y harmonisch getheilt, und laufen AT, MX, BY in denselben Punkte O zusammen, so geht auch NZ durch diesen Punkt O.

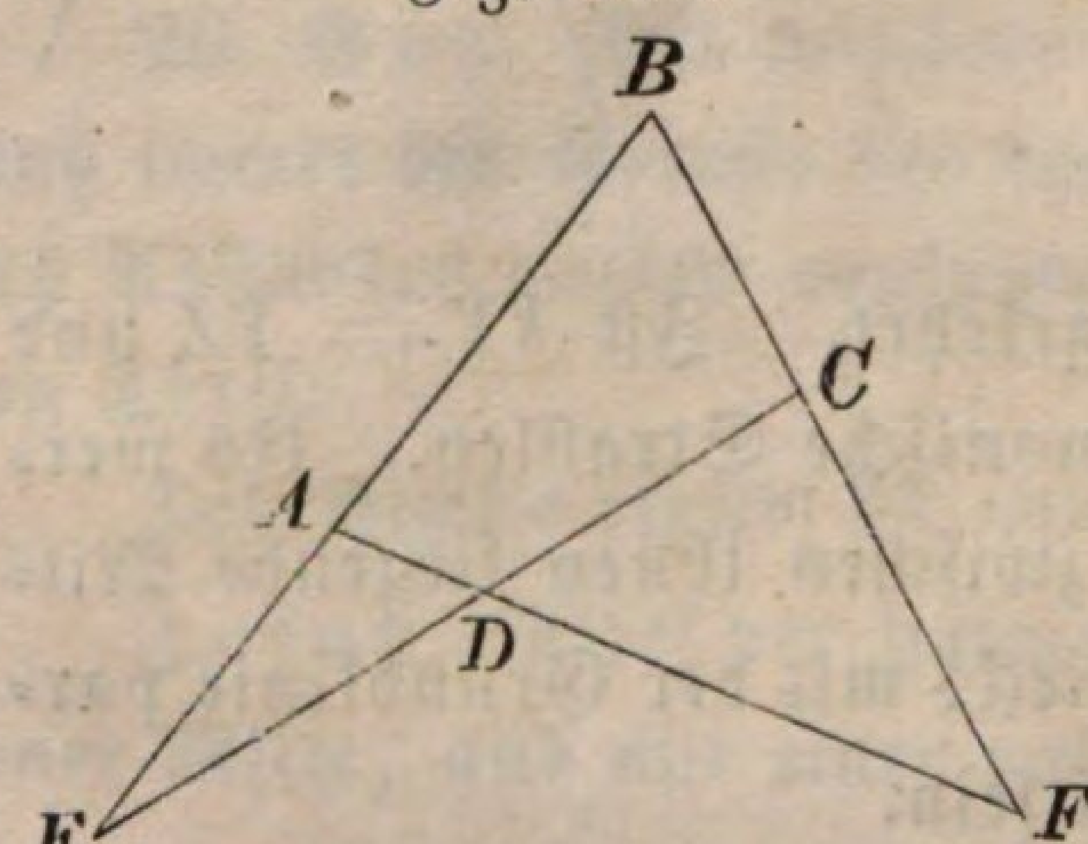
2. Zusatz. Fällt der Punkt T in A, so laufen die drei Strahlen MX, BY, NZ entweder in denselben Punkt O zusammen oder sind einander parallel.

3. Zusatz. Aus S. 9 Seite 255 folgt:

$$\frac{AM}{MB} : \frac{AN}{NB} = \frac{TX}{XY} : \frac{TZ}{ZY}$$

d. h. das erste anharmonische Verhältniß (17) ist dem zweiten anharmonischen Verhältnisse gleich. Obiger Satz 24 heißt demnach verallgemeinert: Wenn vier gerade Linien von einem Punkte ausgehen, so werden dieselben von jeder Transversalen in vier Punkten geschnitten, deren anharmonisches Verhältniß immer dasselbe ist, wie auch die Transversale gezogen sein mag.

Fig. 286.

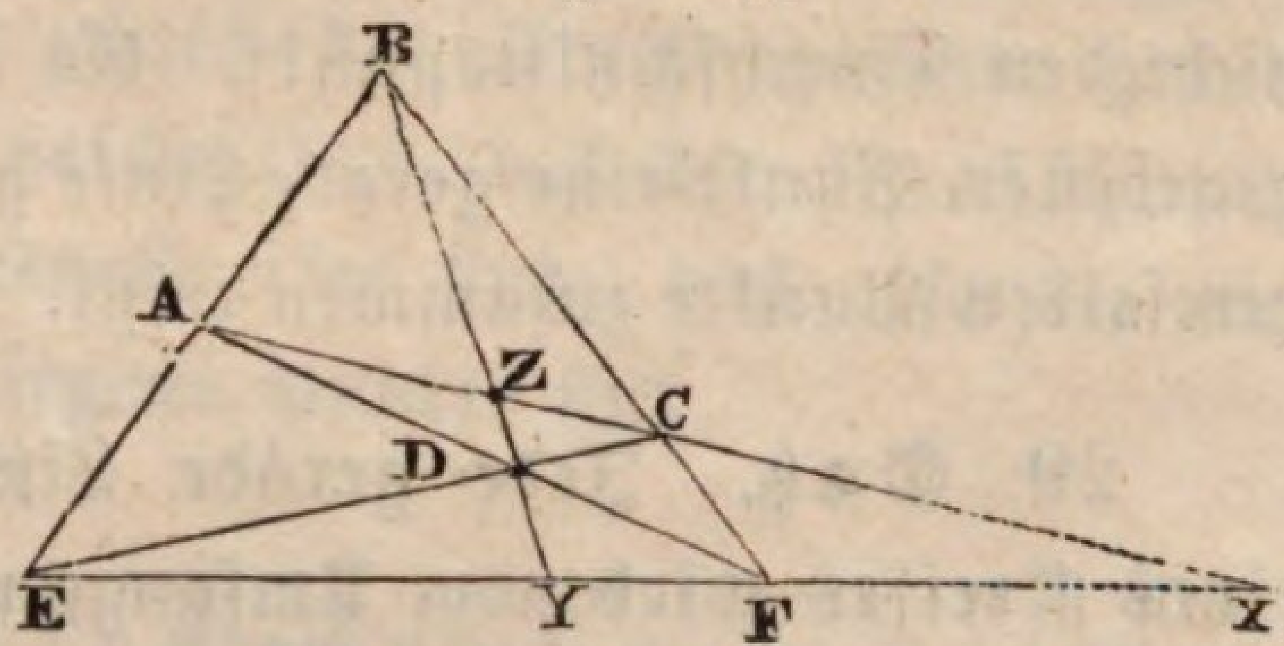


25. Erklärung. Verlängert man die gegenüber stehenden Seiten BA, CD, so wie AD, BC eines Vierecks $ABCD$ bis zu den Durchschnittspunkten E und F, so heißt die so entstehende

Figur ein vollständiges Viereck, oder besser, vollständiges Vierseit. Ein solches hat drei Diagonalen, zwei innere BD, AC, eine äußere EF, und sechs Ecken, A, B, C, D, E, F.

26. Satz. Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits wird durch die beiden anderen Diagonalen in Punkten getroffen, welche zu den Endpunkten jener Diagonale harmonisch liegen und dabei conjugirte sind.

Fig. 287.



Beweis. Die Diagonalen mögen sich in den Punkten Z, X, Y treffen.

Aus XIII. 5 folgt:

$$EY : YF = BC \cdot AE : CF \cdot AB, \text{ ferner: (XIII. 2)}$$

$$EX : XF = BC \cdot AE : CF \cdot AB.$$

Mithin: $EY : YF = EX : XF$.

Die Linien BE, BY, BF, BX sind harmonische Strahlen, theilen also die AX in Z und C harmonisch.

Um endlich zu zeigen, daß die Diagonale BD harmonisch geschnitten wird, denke man EZ gezogen, alsdann sind die Linien EA, EZ, EC, EX, weil sie durch die vier harmonisch gelegenen Punkte A, Z, C, X gehen, Harmonikalen; die Linie BY wird also durch dieselben in den Punkten B, Z, D, Y harmonisch getheilt.

Zusatz. Zieht man EZ, FZ und XB, so sind einerseits EB, EZ, ED, EF, andererseits FB, FZ, FD, FE harmonische Strahlenbüschel. Es ergiebt sich aus der Figur nun folgender Satz: Durchschneiden sich zwei harmonische Strahlenbüschel, welche einen Strahl gemeinschaftlich haben, so liegt der Durchschnittspunkt (Z) der beiden, dem gemeinschaftlichen Strahle zugeordneten Strahlen mit den Durchschnittspunkten (A, C und B, D) der andern zugeordneten Strahlen in gerader Linie.

27. Aufg. Mit Hülfe des Satzes vom vollständigen Vierseite zu drei gegebenen Strahlen einen vierten harmonischen Strahl und zu drei gegebenen Punkten einen vierten harmonisch gelegenen Punkt zu finden.

Leicht.

28. Satz. Treffen sich drei gerade Linien in einem Punkte A, und zieht man aus einem beliebigen Punkte einer derselben mehrere Transversalen nach den übrigen, so liegen die Durchschnittspunkte der Diagonalen aller dadurch entstehenden Vierecke in gerader Linie, welche die vierte Harmonikale zu den drei in A sich treffenden ist.

Der Beweis ist auf 25 zu stützen.

Zusatz. Aufg. Von zwei gegebenen geraden Linien kennt man nicht den Durchschnittspunkt. Es soll durch einen außerhalb derselben gegebenen Punkt eine gerade Linie gezogen werden, welche mit jenen in demselben Punkte zusammen trifft.

29. Satz. Jede gerade Linie senkrecht auf dem Durchmesser eines Kreises wird vom Umfange und den Geraden, welche einen beliebigen Punkt des Umfanges mit den Endpunkten des Durchmessers verbinden, harmonisch getheilt.

Auf S. 21, Umk., zu stützen.

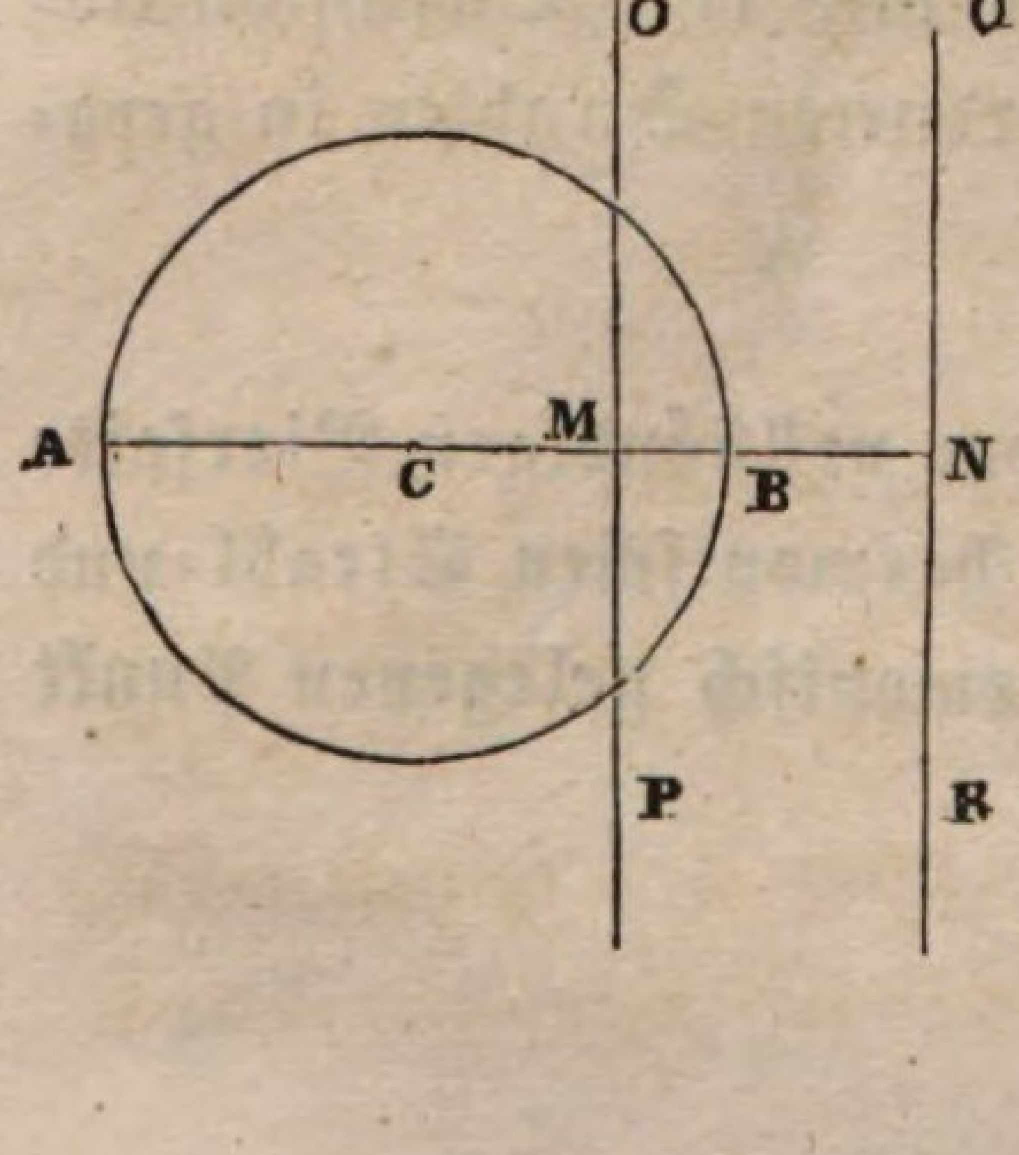
30. Satz. Jede von dreien einen Kreis berührenden geraden Linien wird durch die beiden anderen, die deren Berührungspunkte durchsetzende Secante und ihren eigenen Berührungspunkt harmonisch geschnitten.

Der Beweis gründet sich auf Satz 2 und III. 17.

Dritter Abschnitt.

Pol und Polare am Kreise.

Fig. 288.



31. Erklärungen. Liegen zwei Punkte M und N mit dem Mittelpunkte eines Kreises in gerader Linie und auf einer Seite desselben, und haben ihre Abstände vom Mittelpunkte den Radius zur mittleren Proportionale, so werden sie Pole, einer vom andern, genannt. Zieht man durch einen der Pole eine Senkrechte gegen die Gerade, welche durch beide Pole und den Mittelpunkt geht, so heißt diese

Senkrechte die Polare des anderen Punktes, und dieser andere Punkt der Pol jener Polaren.

Zusatz. Die durch zwei Pole eines Kreises gehende Gerade wird durch diese Pole und den Kreisumfang harmonisch getheilt.

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus Satz 21, Umk.

32. Satz. **Schneidet ein Kreis einen anderen rechtwinkelig, so wird jede durch den Mittelpunkt eines der Kreise gehende gerade Linie von dem anderen Kreise so geschnitten, daß die Durchschnittspunkte zugeordnete Pole des ersteren Kreises sind, daß also die vier Durchschnittspunkte harmonisch gelegene Punkte sind.**

Leicht.

1. Zusatz. Umgekehrt, wenn ein Kreis durch irgend zwei Punkte geht, die in Bezug auf einen anderen Kreis zugeordnete Pole sind, so schneiden sich die beiden Kreise unter rechten Winkeln.

2. Zusatz. Durch je zwei Paare, in Beziehung auf einen gegebenen Kreis zugeordneter Pole läßt sich ein neuer Kreis beschreiben.

33. Satz. **Die den äußeren Pol mit den Durchschnittspunkten der inneren Polare und des Kreises verbindenden geraden Linien sind Tangenten am Kreise.**

Beweis leicht.

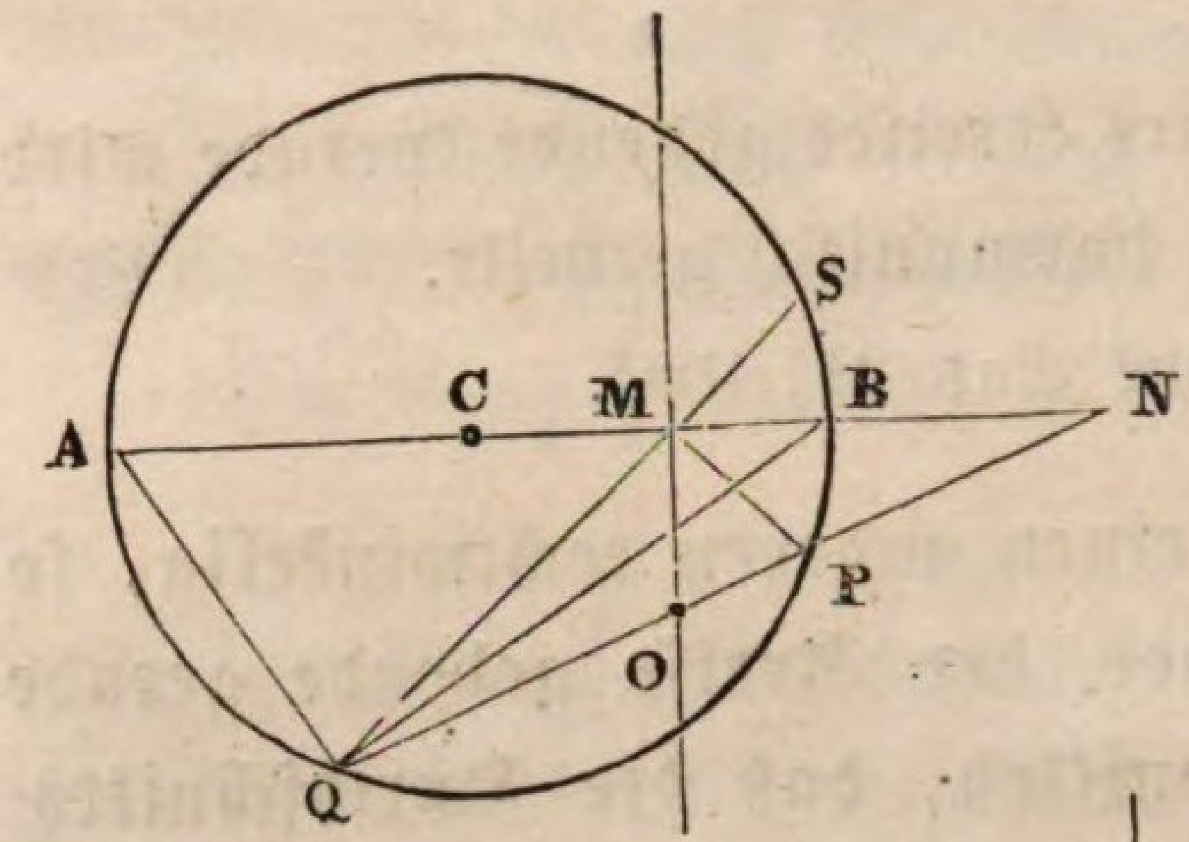
Zusatz. Umgekehrt, sind von einem Punkte außerhalb eines Kreises zwei Tangenten an den Kreis gezogen, so ist die durch die Berührungspunkte gehende Gerade die Polare zu dem außerhalb liegenden Punkte als Pol.

34. Satz. **Jede durch einen Pol gehende gerade Linie, welche den Kreisumfang und die Polare schneidet, wird in den Durchschnittspunkten mit diesen Linien und dem Pol selbst harmonisch getheilt, so daß, wenn N der Pol, O, P, Q die Durchschnittspunkte sind** (Fig. 289 und 290),

$$NP : PO = NQ : QO.$$

Zum Beweise verbinde man den Punkt Q mit A, B und M. Es sei S der Durchschnittspunkt der Linie QM mit dem Kreise. Die vier Linien QA, QN, QB, QM sind (31) harmonische Strahlen, und da die beiden QA und QB auf einander senkrecht stehen, so müssen nach Satz 22, Zusatz, die beiden Winkel PQB und BQS einander gleich sein. Durch

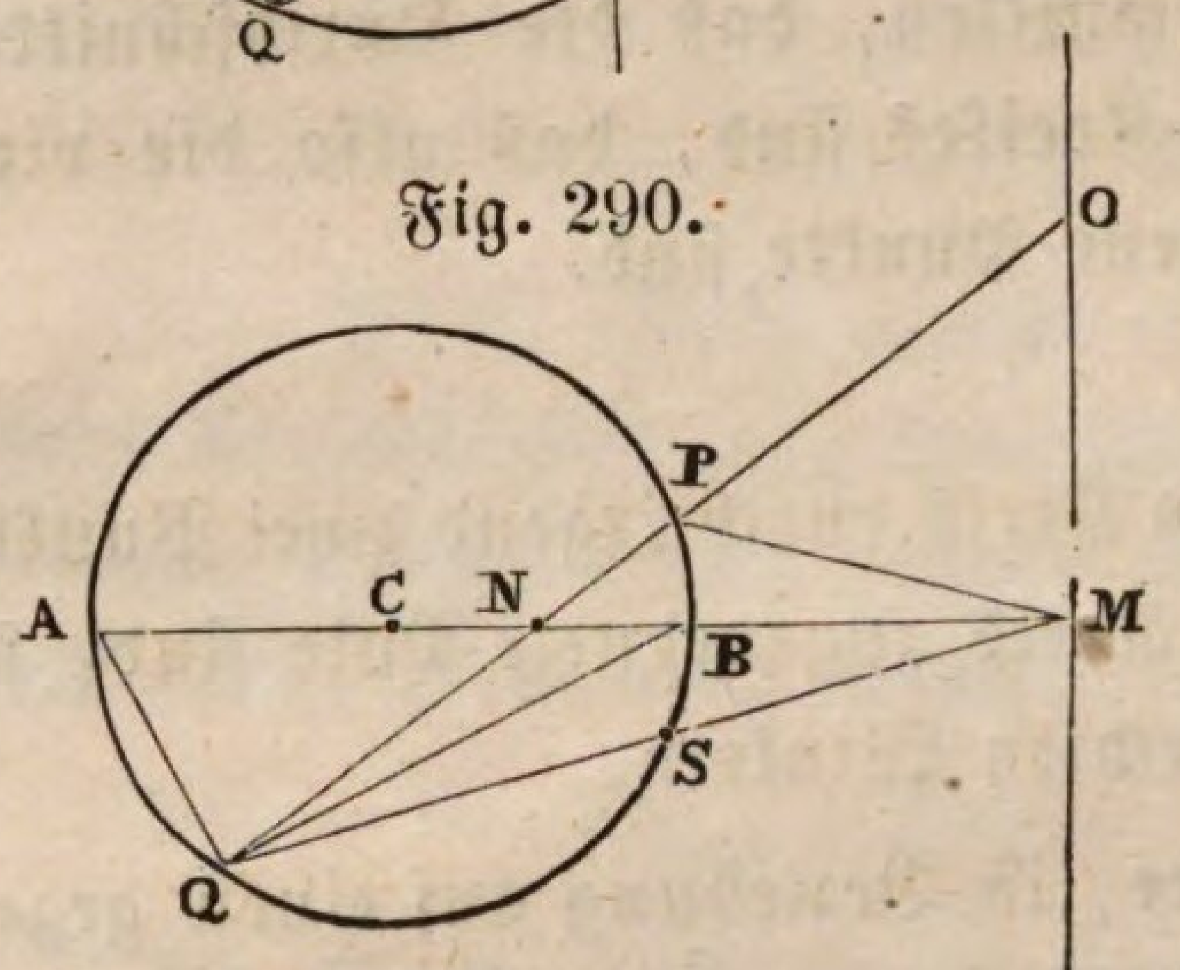
Fig. 289.



die hieraus folgende Gleichheit der beiden Bogen *BS* und *BP* läßt sich leicht die Gleichheit der Winkel *SMB* und *BMP* nachweisen, und hieraus folgt mit Hülfe von Satz 22 die obige Behauptung.

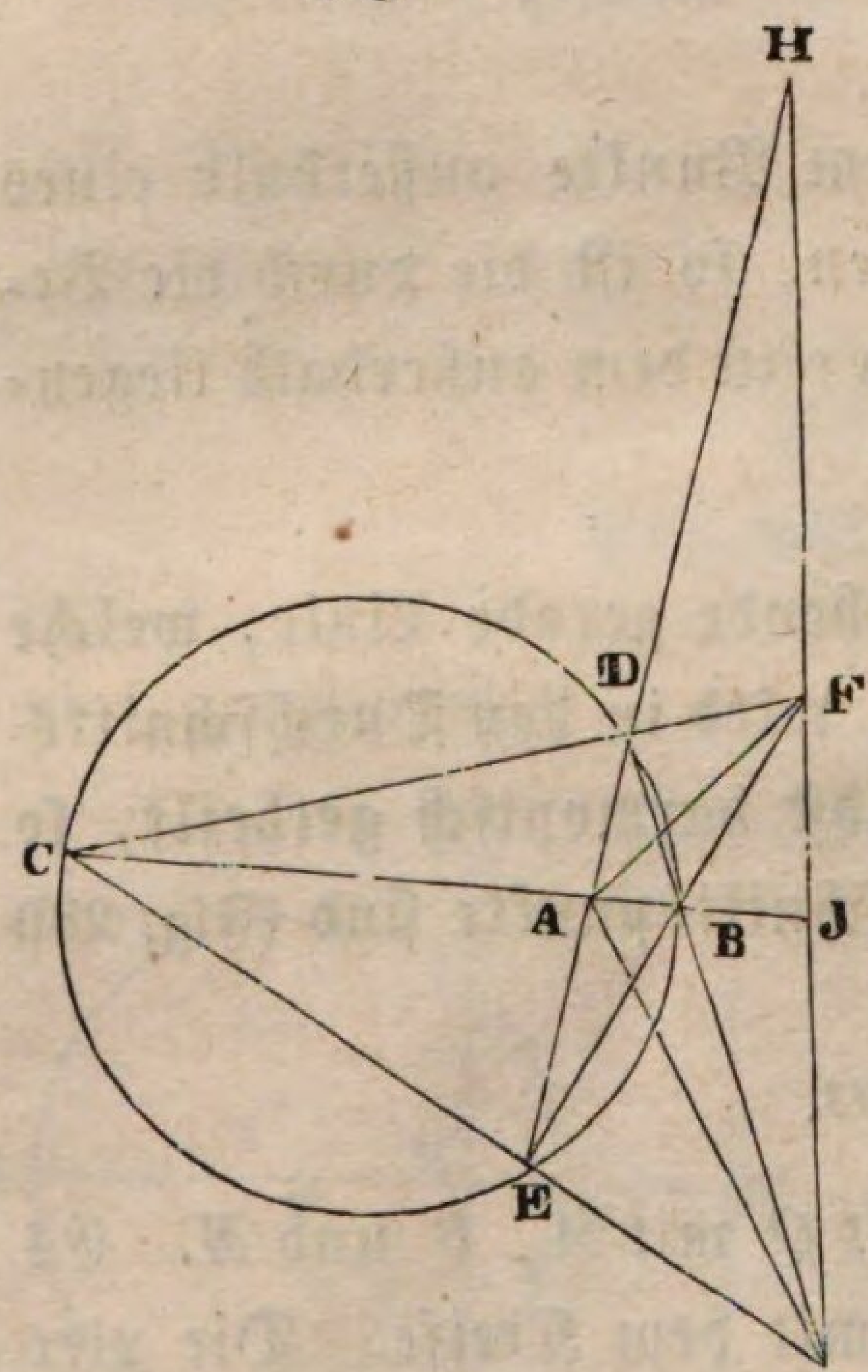
Ein anderer, von Satz 22 unabhängiger Beweis ergiebt sich leicht, wenn man von *C* auf *PQ* eine Senkrechte fällt und diese bis zur Polare *MO* verlängert.

Fig. 290.



35. **Satz. In jedem vollständigen Kreisvierecke *BDCE* (Fig. 291) stehen der Durchschnittspunkt *A* der beiden inneren Diagonalen *AC*, *DE* und die Endpunkte *F* und *G* der dritten in der Beziehung zu einander, daß die Verbindungslinie je zweier dieser Punkte Polare ist zu dem dritten Punkte als Pol; *FG*, *AG* und *AF* sind bezüglich Polaren zu *A*, *F* und *G* als Polen.**

Fig. 291.



Zum Beweise verlängere man die Diagonalen *ED* und *CB* bis zu den Durchschnitten *H* und *J* mit der dritten Diagonale *FG*; *CJ* wird alsdann harmonisch in *A* und *B*, so wie *EH* harmonisch in *A* und *D* getheilt werden (Satz 26). Da nun aber nach Satz 34, Fig. 290, die Polare zu *A* die Linien *ED* und *CB* harmonisch schneidet, so muß offenbar diese Polare durch die Punkte *H* und *J* gehen und also mit *FG* zusammen fallen. Auf ähnliche Art läßt sich zeigen, daß *AG* die Polare zu *F*, und *AF* die Polare zu *G* ist.

1. Zusatz. In allen Kreisvierecken, deren Diagonalen sich in demselben Punkte durchschneiden, liegen die Durchschnittspunkte der gegenüber stehenden Seiten in einer und derselben geraden Linie, der Polare jenes Punk-

tes, und in allen Kreisvierecken, in welchen zwei gegenüber stehende Seiten sich in demselben Punkte schneiden, liegen die Durchschnitte der anderen gegenüber stehenden Seiten sowohl, als auch die Durchschnitte der Diagonalen auf einer geraden Linie, die wieder Polare jenes Punktes ist.

2. Zusatz. Aufg. Mit Hülfe des obigen Satzes zu einem gegebenen Punkte die Polare zu construiren.

3. Zusatz. Mit Hülfe der vorhergehenden Sätze sollen von einem Punkte außerhalb eines Kreises zwei Tangenten an den Kreis gezogen werden.

36. Satz. **Sämmtliche Polaren der Punkte einer Linie schneiden sich in ein und demselben Punkte, nämlich im Pole jener Linie.**

Der Beweis ergiebt sich:

1. aus den Figuren 289 und 290 zu Satz 34, wenn man darin einen beliebigen Punkt der *MO* mit *C* verbindet und *NQ* senkrecht gegen die Verbindungslinie zieht, wo sich dann durch ein Paar Schlüsse leicht ergiebt, daß *NQ* die Polare des im *MO* angenommenen Punktes ist;

2. auch aus der Betrachtung von Fig. 291. Aendern sich nämlich die Punkte *F* und *G*, bleiben aber immer auf derselben Geraden *HJ*, so bleibt der Punkt *A*, als Pol der Polare *HJ*, immer derselbe. Die Linien *AG* und *AF*, welche bezüglich die Polaren von *F* und *G* sind und mit *F* und *G* sich ändern, gehen also immer durch denselben Punkt *A*, d. i. durch den Pol der festen Linie *GH*. Der Satz läßt sich aber auch für eine innere Polare, etwa *GA*, deren Pol *F* ist, beweisen, wenn man den Punkt *F* als fest, die Punkte *A*, *G* aber auf der Linie *AG* als beweglich ansieht.

Zusatz. Umgekehrt, die Pole von Linien, welche sich in einem Punkte schneiden, befinden sich in dessen Polare.

37. Satz. **Liegen die Ecken eines dem Kreise eingeschriebenen Vierecks in den Seiten eines demselben Kreise umschriebenen Vierecks, so liegen die vier Durchschnittspunkte der paarweise gegenüber liegenden Seiten beider Vierecke in einer geraden Linie; die Diagonalen beider Vierecke aber kreuzen sich in einem Punkte, dem Pole jener Linie.**

Der Beweis ist durch die Sätze 35 und 36 ganz vorbereitet und durch Anwendung derselben leicht zu finden.

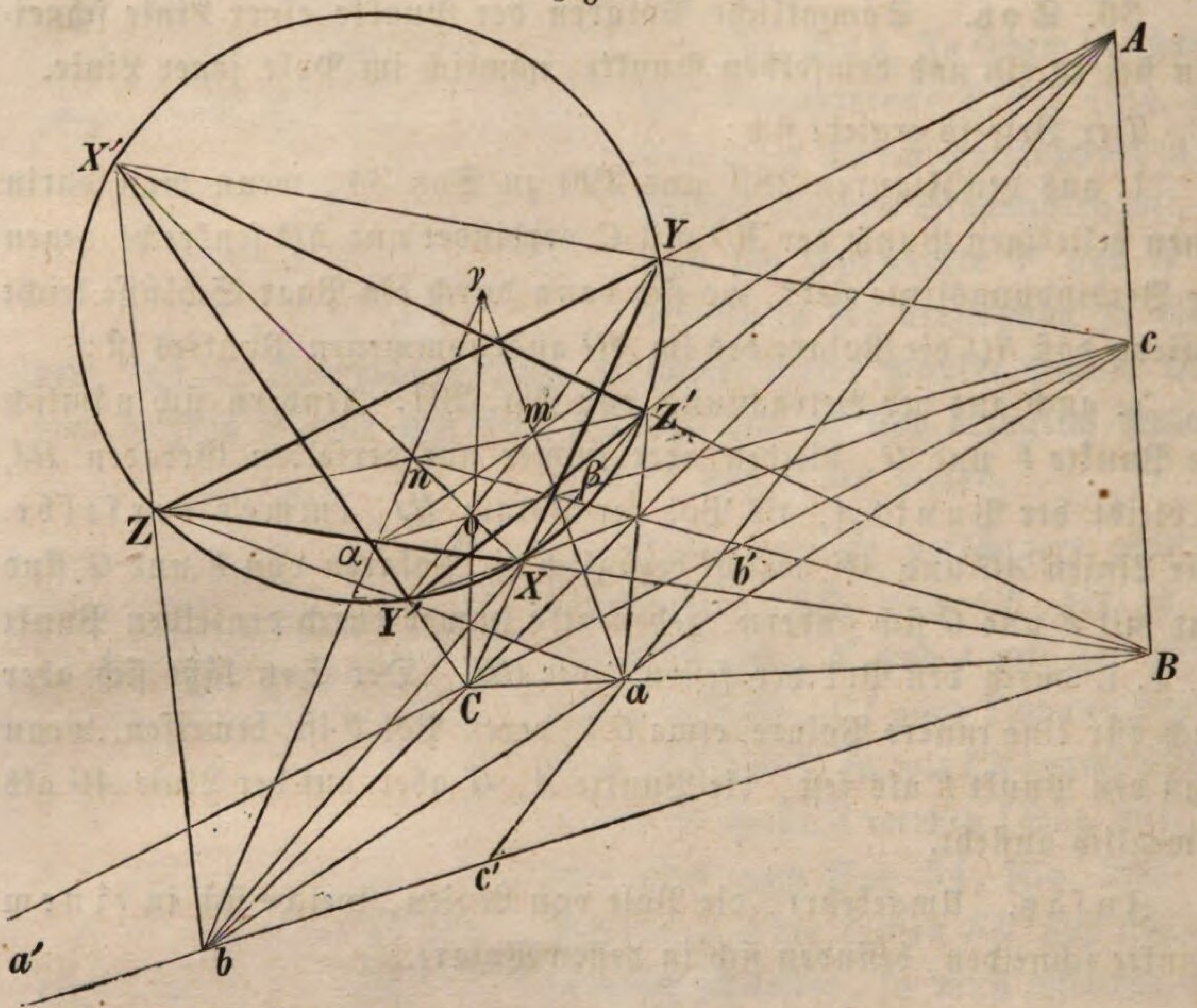
38. Um die Fruchtbarkeit der in diesem Abschnitte aufgestellten Sätze und ihren Nutzen zur Auflösung geometrischer Aufgaben an einem Paar dazu geeigneter Beispiele zu zeigen, sei zuerst hier die schon zu Ende des IX. Capitels, Nr. 40, nach Ottajano gelöste Aufgabe:

> **„Einem Kreise ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen*),"**

nochmals in Betrachtung gezogen.

XYZ und *X'Y'Z'* seien zwei einem und demselben Kreise eingeschriebene Dreiecke, deren Seiten *ZY* und *Z'Y'* selbst oder verlängert in *A*,

Fig. 292.



Seiten *XZ* und *X'Z'* in *B*, Seiten *YX* und *Y'X'* in *C* zusammentreffen mögen. *A*, *B*, *C* seien gegebene Punkte; die Ecken der Dreiecke sind dann zu finden und es kommt darauf an, sie so zu bestimmen, daß

*) Anmerkung. Diese Aufgabe wird gemeinlich zu den schwereren gerechnet. Man sehe über die früheren Bemühungen zu ihrer Auflösung Klügel's Mathematisches Wörterbuch, Art. Kreis 115, und Meyer Hirsch's Sammlung geometrischer Aufgaben, I. Theil, S. 263.

ZY und $Z'Y'$ durch A, XZ und $X'Z'$ durch B, YX und $Y'X'$ durch C gehen. Zu dem Ende ziehe man:

YZ' und $Y'Z$; der Punkt, worin sie sich treffen, sei a,
eben so ZX' „ $Z'X$; „ „ „ „ „ „ „ b,
eben so XY' „ $X'Y$; „ „ „ „ „ „ „ c.

Nach Satz 13 dieses Capitels liegen dann nicht allein a, b, c unter sich, sondern es liegt auch a mit B und C, b mit C und A, c mit A und B in gerader Linie; die Figuren $XZ'YX'ZY'$, $XYZ'X'Y'Z$, $YZX'Y'Z'X$ und $ZXY'Z'X'Y$ sind nämlich im Kreise eingeschriebene Sechsecke, deren gegenüber liegende Seiten bei jedem in den genannten drei Punkten zusammentreffen. Man verbinde ferner X mit X', Y mit Y', Z mit Z'; die Verbindungslinien bilden ein Dreieck mno, dessen Ecke m der Durchschnitt von YY' und ZZ' sei, n der von ZZ' mit XX', o der von XX' mit YY'. Zieht man nun noch am, bn, co, so sind nach Satz 35 diese Linien die resp. Polaren der Punkte A, B, C, daher gegeben. Diese Polaren bilden ein zweites Dreieck $\alpha\beta\gamma$, dessen Ecke α im Durchschnitt von bn und co, β in dem von co und am, γ in dem von am und bn liegt. Diese Ecken sind als Durchschnitte der Polaren der Punkte A, B, C zugleich die Pole der Seiten des Dreiecks ABC und können als solche auch direct bestimmt werden. Da nun α der Durchschnittspunkt der Polaren von B und C ist, so muß (36) α auch in der Polare des Punktes a liegen; diese Polare ist aber (35) Am; daher liegen α, m, A in gerader Linie. Dasselbe gilt, wie auf gleiche Weise gezeigt werden kann, von β, n, B, so wie von γ, o, C, woraus sich folgende einfache

1. Construction ergiebt. Man ziehe zu jedem der drei gegebenen Punkte A, B, C die Polare, verbinde den Durchschnittspunkt je zweier dieser Polaren mit dem Pol der dritten (α mit A, β mit B, γ mit C), ziehe endlich durch je zwei der drei Punkte m, n, o, worin die Verbindungslinien αA, βB, γC, resp. von den Polaren $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ geschnitten werden, gerade Linien: no, om, mn. Diese treffen den Kreisumfang in den Ecken X und X', Y und Y', Z und Z' der verlangten Dreiecke XYZ, $X'Y'Z'$.

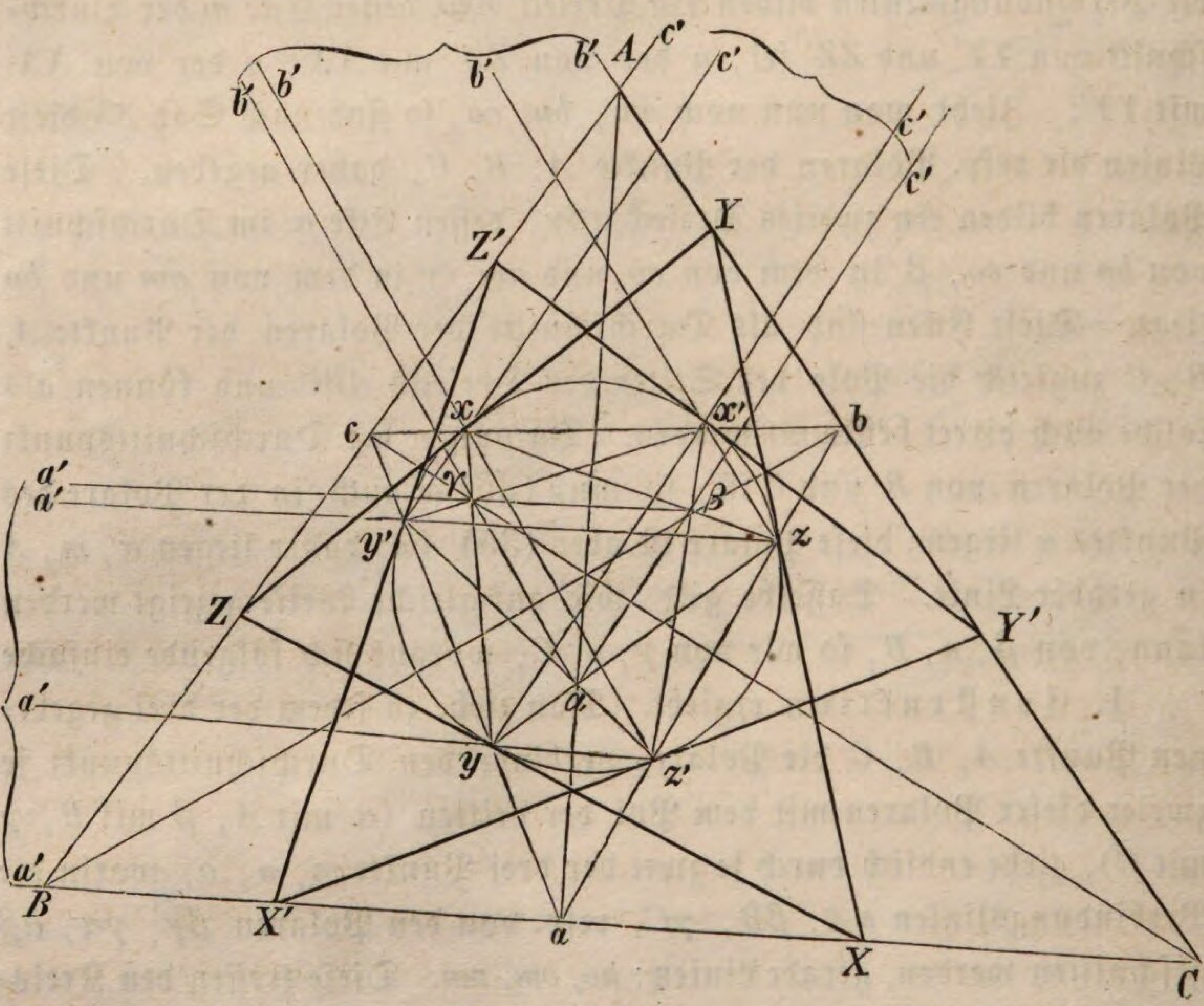
Diese Construction läßt sich noch abändern. Nach Satz 35 sind nämlich die Punkte m, n, o Pole der Linien aA, bB, cC. Schneiden nun diese Linien sich in a', b', c', nämlich: bB und cC in a', cC und aA in b', aA und bB in c', so folgt aus S. 36, daß a' der Pol von no oder XX', b' der von om oder YY', c' der von mn oder ZZ' ist. Hiernach wäre eine

2. Construction die, daß man zuerst, wie vorher, die Polaren zu A, B, C zieht, sie geben die Punkte a, b, c; durch diese die Punkte a', b', c' bestimmt und dann zu diesen als Polen die Polaren XX', YY', ZZ' construirt.

39. Als zweites Beispiel stellen wir folgende analoge Aufgabe: **Einem gegebenen Kreise zwei Dreiecke umzuschreiben, deren Ecken in drei gegebenen geraden Linien liegen.**

Auflösung. XYZ und $X'Y'Z'$ seien zwei einem und demselben Kreise umschriebene Dreiecke, deren Spitzen in drei gegebenen, das

Fig. 293.



Dreieck ABC bildenden geraden Linien liegen, nämlich die Spitzen X und X, in der Geraden BC, Y und Y' in CA, Z und Z' in AB. Die Berührungspunkte der Seiten jener beiden Dreiecke mit dem Kreise seien x, y, z, x', y', z', so daß YZ den Kreis in x, ZX denselben in y, XY denselben in z berührt; ferner $Y'Z'$ in x', $Z'X'$ in y', $X'Y'$ in z'. Verbindet man nun noch diese Berührungspunkte durch Sehnen, zieht nämlich yz und $y'z'$, deren Durchschnitt α sei, zx und $z'x'$, deren Durchschnitt

β sei, xy und $x'y'$, deren Durchschnittspunkt γ, bezeichnet auch ferner den Durchschnittspunkt der Sehnen yy' und zz' mit a, den von zz' und xx' mit b, den von xx' und yy' mit c, den von yz' und $y'z$ mit mit a', den von zx' und $z'x$ mit b', den von xy' und $x'y$ mit c', so ergiebt sich Folgendes:

1. Da yz die Polare von X' und $y'z'$ die von X' ist, so ist (36) der Durchschnittspunkt beider, nämlich α, Pol von XX' oder BC. Eben so ist β Pol von YY' oder CA, γ Pol von ZZ' oder AB. Die Punkte α, β, γ sind also gegeben.
2. Da $yy'zz'$ ein Kreisviereck, so ist nach S. 35 aa' die Polare von α und $a\alpha$ die von a'; die Polare von α ist aber BC, daher liegen a und a' in BC. Eben so liegen b und b' in CA, c und c' in AB.
3. Da AC die Polare von β, BA die von γ ist, so ist (36) A der Pol von $\beta\gamma$ oder $\beta\gamma$ die Polare von A. Eben so ist $\gamma\alpha$ die Polare von B, $\alpha\beta$ die Polare von C.
4. Da BC die Polare von α und $\beta\gamma$ die von A ist, so schneiden sich (36) BC und $\beta\gamma$ im Pol von $A\alpha$; BC und $\beta\gamma$ schneiden sich aber in a', denn da $z'yxzy'x'$ ein Kreissechseck ist, so liegen (13) β, γ und a' in gerader Linie; daher ist a' der Pol von $A\alpha$ oder $A\alpha$ Polare von a'. Die Polare von a' ist aber, wie schon bei 2 gesagt, auch $a\alpha$; daher liegen A, α, a in einer geraden Linie.

Construction. Man bestimme zu den drei gegebenen geraden Linien BC, CA, AB als Polaren die Pole α, β, γ und verbinde sie mit den Durchschnittspunkten der gegebenen Geraden, nämlich α mit A, β mit B, γ mit C. $A\alpha$ treffe BC in a, $B\beta$ treffe CA in b, $C\gamma$ treffe AB in c. Verbindet man nun die Punkte a, b, c mit einander, so geben die Durchschnitte der Linien bc, ca, ab mit dem Kreisumfange die Berührungspunkte x, x', y, y', z, z' der Seiten der zu findenden Dreiecke.

Weitere Beispiele wird der zweite Abschnitt des folgenden Capitels liefern.

XIV. Capitel.

Sätze und Aufgaben über Berührungen oder das Apollonische Tactions-Problem.

Erster Abschnitt.

Aeltere Lösung.

1. Sind von Punkten, geraden Linien und Kreisen irgend drei gegeben, so läßt sich die Aufgabe stellen, einen Kreis zu beschreiben, der die jedesmal gegebenen geraden und Kreislinien berührt, dabei auch durch die gegebenen Punkte geht, wenn deren vorhanden sind. In diesem den Gegenstand des Tactions-Problems*) zusammenfassenden Ausdrucke sind zehn verschiedene Aufgaben als besondere Fälle desselben enthalten, die man durch Aufstellung aller möglichen Combinationen der drei Elemente: Punkt, gerade Linie, Kreis, als gegebener Stücke zu je dreien mit Wiederholungen erhält. Es können nämlich gegeben sein:

1. drei Punkte,
2. drei gerade Linien,
3. zwei Punkte und eine Gerade,
4. zwei Gerade und ein Punkt,
5. zwei Punkte und ein Kreis,
6. ein Punkt, eine Gerade und ein Kreis,
7. ein Punkt und zwei Kreise,
8. zwei gerade Linien und ein Kreis,
9. zwei Kreise und eine gerade Linie,
10. drei Kreise.

Die fünf ersten dieser Aufgaben sind, da ihre Auflösung keine Schwierigkeit bietet, bereits früher aufgestellt worden; nämlich die bei-

---

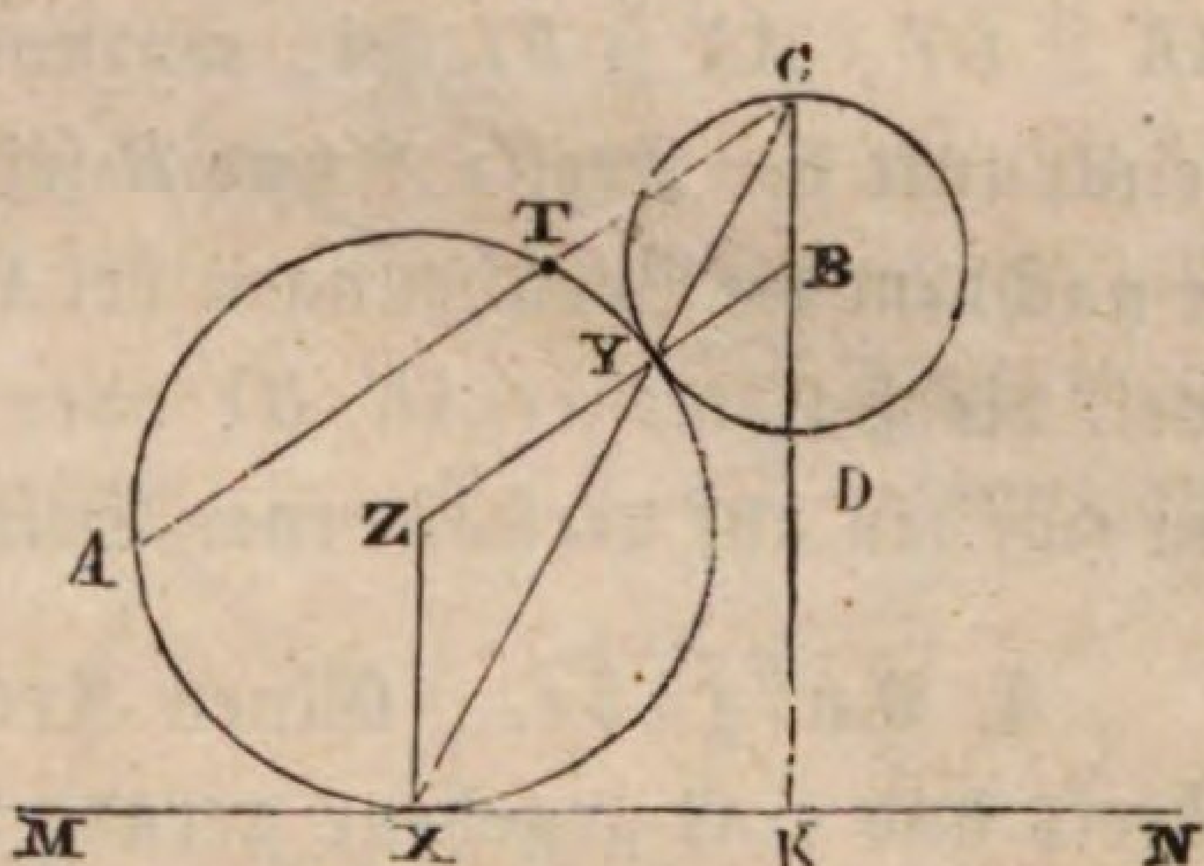
*) Anm. Dieses Problem ist zuerst vom Griechischen Mathematiker Apollonius von Pergä, behandelt worden, der zwei Bücher: περὶ ἐπαφῶν, darüber schrieb, die verloren gegangen sind. Später hat Vieta in seinem Apollonius Gallus, Paris, 1600, dieselben wieder herzustellen versucht.

den ersten, wo drei Punkte oder drei gerade Linien gegeben sind, in III. 32 und 33; die drei folgenden Aufgaben (3, 4 und 5) in IX. 20, 21 und 23. Es bleiben daher noch die fünf letzteren Aufgaben (6 bis 10), deren Auflösung durch folgende zwei Sätze angebahnt wird.

2. Satz. Berührt ein Kreis einen anderen Kreis und eine Gerade, so liegen jedesmal die beiden Berührungspunkte mit dem einen oder andern Endpunkte des gegen die Gerade senkrechten Durchmessers des berührten Kreises unter sich in gerader Linie.

Beweis. Der Kreis um *Z* berühre einen andern, dessen Mittelpunkt *B* ist, in *Y* und eine gerade Linie *MN* in *X*. Verbindet man nun *X* mit *Y*, bezeichnet den Punkt, wo *XY* selbst oder verlängert den zweiten Kreis trifft, mit *C* und zieht an *C* den Radius *BC* oder Durchmesser *CD*, so ist es leicht nachzuweisen, daß *CB* || *ZX*; daß also, da *ZX* ⊥ *MN*, auch *CB* oder *CD* ⊥ *MN* sei, woraus gleich die Richtigkeit des Satzes folgt.

Fig. 294.

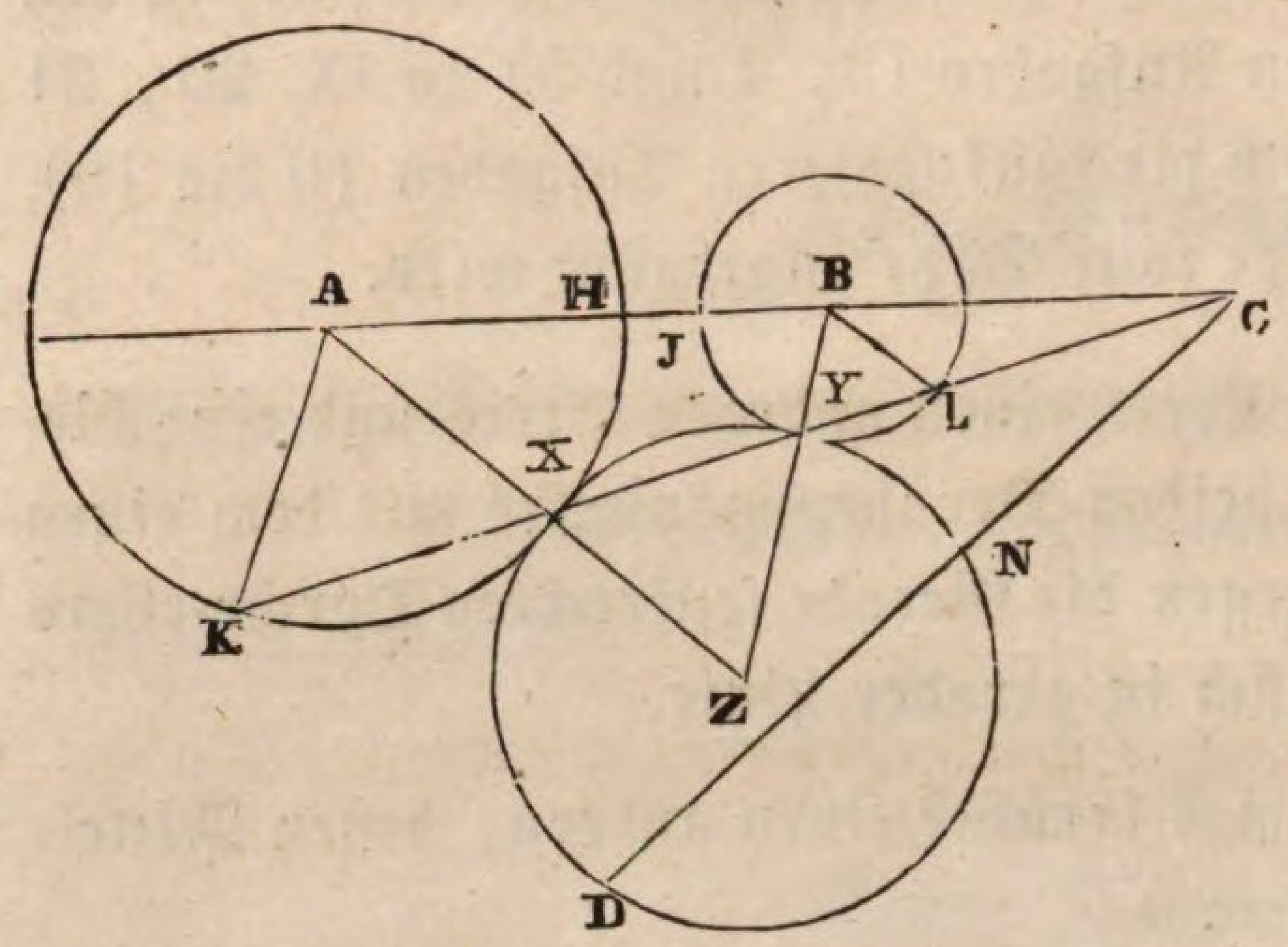


Zusatz. Liegt *MN* ganz außerhalb des Kreises *B*, so geht *XY* bei einer äußeren Berührung der beiden Kreise durch den von *MN* entferntern Endpunkt *C* des Durchmessers, bei einer innern durch den nähern Endpunkt *D*. Schneidet *MN* den Kreis, so geht bei einer äußern Berührung *XY* durch denjenigen Endpunkt des Durchmessers, der mit *Z* auf einerlei Seite von *MN* liegt; bei einer innern Berührung geht *XY* durch denjenigen Endpunkt, der mit *Z* auf verschiedener Seite von *MN* liegt.

3. Satz. Berührt ein Kreis zwei andere Kreise, so liegen die beiden Berührungspunkte mit dem äußeren oder inneren Aehnlichkeitspunkte (IX. 10) der zwei letztern Kreise in gerader Linie, je nachdem die Berührungen gleich- oder ungleichartig sind.

Beweis. Der Kreis, dessen Mittelpunkt *Z*, berühre zwei andere, deren Mittelpunkte *A* und *B* sind, in den Punkten *X*, *Y*. Die Gerade *XY* treffe selbst oder verlängert die Centrale *AB* in *C*, so wird *C* der äußere oder innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise *A* und *B* sein, je nachdem die Berührungen bei *X* und *Y* gleichartig (d. h. beide

Fig. 295.

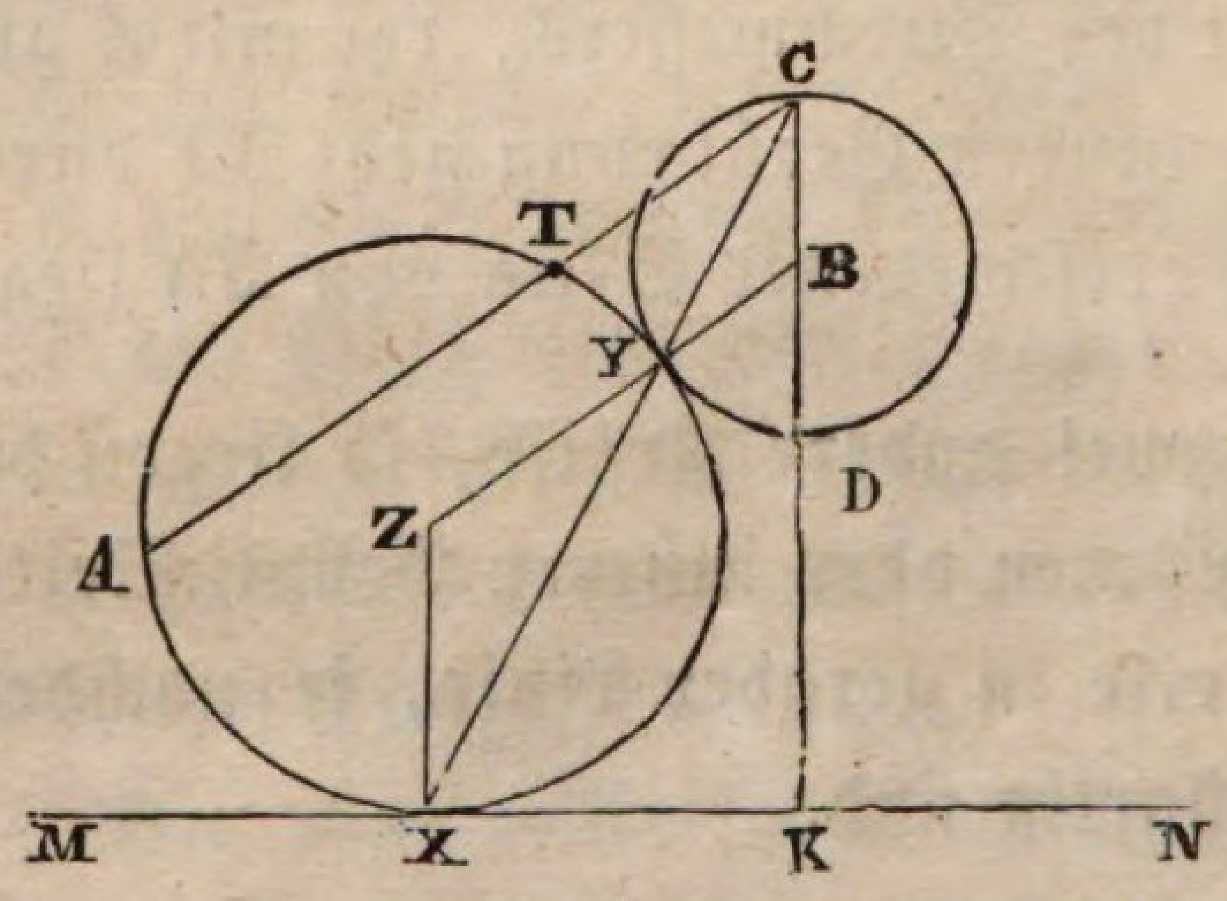


äußere oder beide innere) oder ungleichartig (d. h. die eine eine äußere und die andere eine innere) sind. Denn verbindet man Z mit A und B, so geht AZ durch X, BZ durch Y. Die Sehne XY treffe verlängert den Umfang des Kreises A noch in K, den des Kreises B noch in L. Eine Vergleichung der Winkel in den gleichschenkeligen Dreiecken ZXY, AXK, BYL ergiebt nun bald, daß $AK \parallel BY$, $AX \parallel BL$ sei, woraus sogleich folgt, daß C ein Aehnlichkeitspunkt der Kreise A und B sei, und zwar ein äußerer oder innerer, je nachdem die Berührungen bei X und Y gleich- oder ungleichartig sind, weil die Halbmesser AK, BY oder AX, BL im ersten Falle auf derselben, im zweiten auf verschiedener Seite der Centrale AB liegen.

4. Aufgabe. **Einen Kreis zu beschreiben, der einen andern Kreis und eine gegebene gerade Linie berührt, dabei auch durch einen gegebenen Punkt geht.** (Nr. 6 der in 1 angegebenen zehn Fälle.)

Angenommen, der Kreis um Z berühre den gegebenen Kreis, dessen Mittelpunkt B, in Y, die gegebene Gerade MN in X, und gehe dabei durch den gegebenen Punkt A. Fällt man nun aus B auf MN eine Senkrechte BK, welche den gegebenen Kreis in C und D trifft, so liegt (S. 2) je nach Art der Berührung entweder C oder D in gerader Linie mit X, Y. Verbindet man nun denjenigen dieser beiden Punkte, wobei dieses Statt findet (es sei C) mit A, und trifft die Verbindungslinie den Umfang des Kreises Z in T, so ist durch Anwendung der Sätze in V. 53 oder 54 und V. 58 leicht nachzuweisen, daß CT die vierte Proportionale zu CA, CD, CK ist. Somit ist (V. 60, Nr. 4) der Punkt T gegeben und damit die Aufgabe auf die dritte oder auch auf die fünfte der zehn in 1 aufgezählten zurückgeführt.

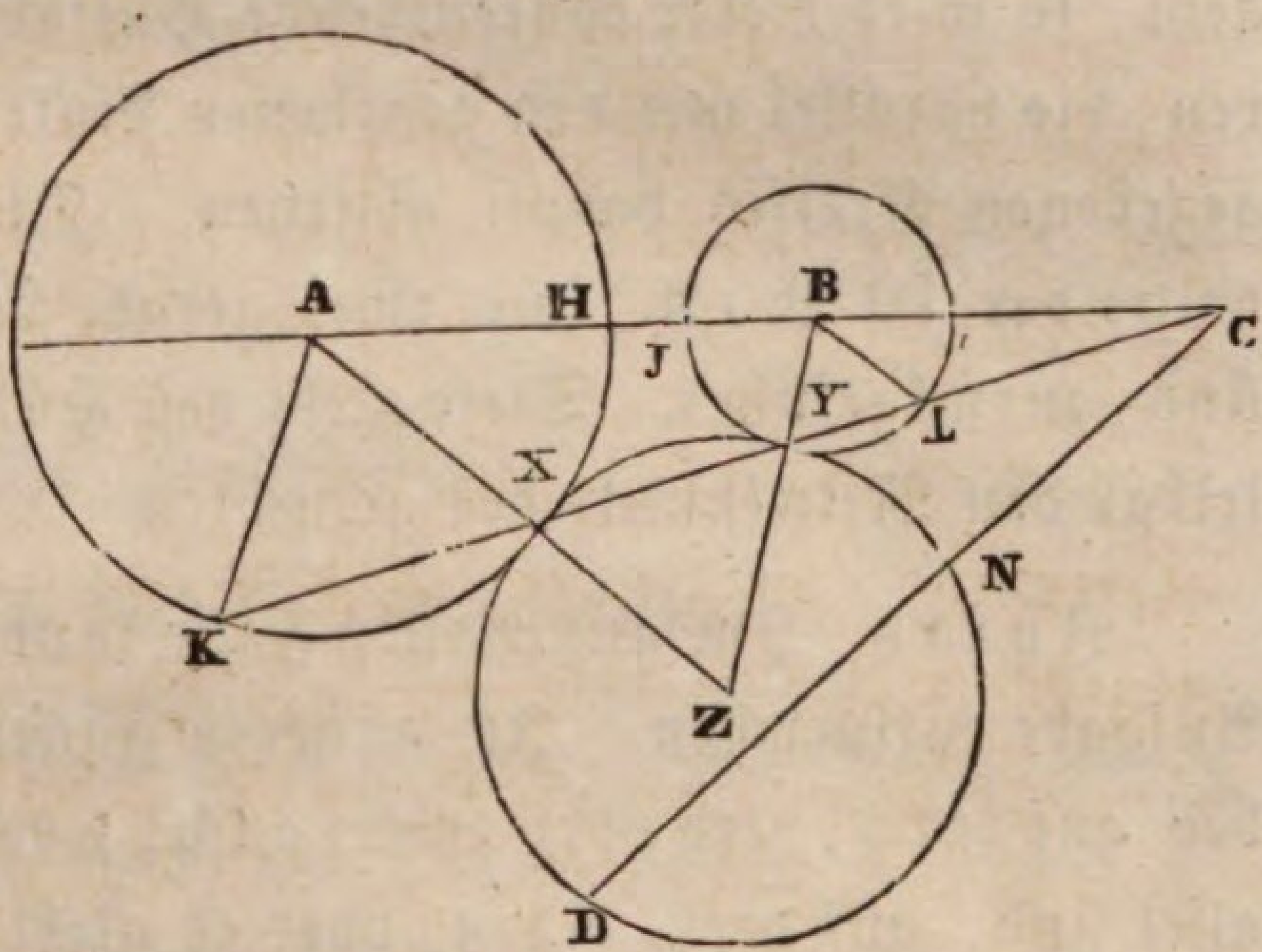
Fig. 296.



Zusatz. Die Aufgabe läßt, je nach der Lage der gegebenen Stücke, einen Kreis zwei, drei oder vier berührende Kreise zu, kann auch unmöglich werden. Sind dieser Kreise vier, so bilden zwei derselben eine äußere, die anderen eine innere Berührung mit dem gegebenen; sind ihrer drei, so geben zwei derselben eine Berührung gleicher Art, der dritte eine davon verschiedene; sind der berührenden Kreise nur zwei, so können ihre Berührungen gleichartig oder ungleichartig sein.

5. Aufg. **Einen Kreis zu beschreiben, der zwei andere gegebene Kreise berührt und dabei durch einen gegebenen Punkt geht.** (Nr. 7 der Berührungsaufgaben.)

Fig. 297.



Ein Kreis, dessen Centrum Z, berühre zwei gegebene Kreise A und B in X, Y und gehe dabei durch einen gegebenen Punkt D. Nach Satz 3 geht die Linie XY, welche die Berührungspunkte verbindet, durch den äußern oder innern Aehnlichkeitspunkt C der Kreise A und B, je nachdem die Berührung derselben mit Z gleich- oder ungleichartig ist. Dabei ist, wenn die Centrale die Umfänge der gegebenen Kreise in H und J*) trifft, nach IX. 13 $CX \cdot CY = CH \cdot CJ$. Verbindet man aber C mit D und bezeichnet mit N den Punkt, worin CD den Kreis Z zum zweiten Male trifft, so ist $CX \cdot CY = CD \cdot CN$, daher auch $CH \cdot CJ = CD \cdot CN$. Hiernach ist CN als vierte Proportionale zu CD, CH und CJ gegeben; ein zur Construction derselben nach V. 60, 4, durch D, H, J gezogener Kreis geht durch den Punkt N, und es kommt nach Bestimmung desselben nur noch darauf an, durch D und N einen Kreis zu ziehen, der einen der beiden gegebenen berührt; derselbe

*) Anm. Um jede Unbestimmtheit zu vermeiden, sei bemerkt, daß, wenn die Berührungen bei X und Y gleichartige sind, H und J entweder beide zwischen A und B, oder beide nicht zwischen A und B liegen sollen; bei ungleichartiger Berührung in den Punkten X, Y soll einer der Punkte H, J zwischen A und B, der andere nicht dazwischen liegen.

wird auch den anderen berühren. Die Aufgabe ist hiermit auf die in IX. 23 gestellte (Nr. 5 der Berührungsaufgaben) zurückgeführt.

Zusatz. Je nach der Lage der beiden gegebenen Kreise und des gegebenen Punktes kann es vier, aber auch weniger Kreise geben, welche jene berühren und durch den Punkt gehen. Giebt es vier, so berühren zwei derselben auf gleichartige, die beiden anderen auf ungleichartige Weise. Die Aufgabe kann auch unmöglich werden. Wann?

6. Aufg. **Einen Kreis zu beschreiben, der einen anderen gegebenen Kreis und zwei gegebene gerade Linien berührt.** (Nr. 8 der in 1 aufgestellten 10 Aufgaben.)

Denkt man sich den verlangten Kreis construirt und beschreibt einen mit ihm concentrischen, der durch den Mittelpunkt des gegebenen geht, so wird dieser concentrische Hülfskreis zwei gerade Linien berühren, die parallel mit den gegebenen Linien sind und um den Radius des gegebenen Kreises davon abstehen. Die Aufgabe ist hiermit auf die dritte der 10 B.-A., wo zwei gerade Linien und ein Punkt gegeben sind, zurückgeführt. Diese giebt den Hülfskreis und mit diesem unmittelbar den Mittelpunkt des gesuchten.

Zusatz. Im günstigsten Falle kann es acht Kreise gegeben, die der Aufgabe entsprechen. In anderen Fällen reducirt sich die Zahl derselben auf sechs, vier oder zwei; auch, wenn die gegebenen Geraden parallel sind, auf drei, einen, oder es giebt gar keinen berührenden Kreis.

7. Aufg. **Einen Kreis zu beschreiben, der zwei andere gegebene Kreise und eine gegebene gerade Linie berührt.** (Nr. 9 der 10 B.-A.)

Denkt man sich wieder in derselben Weise wie vorhin einen mit dem verlangten Kreise concentrischen Hülfskreis beschrieben, der durch den Mittelpunkt eines der beiden gegebenen Kreise geht, so berührt derselbe sowohl einen mit dem anderen gegebenen Kreise concentrischen, dessen Radius die Summe oder Differenz der Radien der gegebenen Kreise ist, als auch eine Parallele zur gegebenen Geraden, deren Abstand von ihr bekannt ist. Hierdurch reducirt sich die Aufgabe auf die in 4 dieses Capitels schon gelöste.

Zusatz. Die Anzahl der im Allgemeinen möglichen Berührungskreise ist acht; darunter sind vier, die gleichartige, vier, die ungleichartige Berührungen mit den gegebenen Kreisen bilden.

8. Aufg. **Einen Kreis zu beschreiben, der drei andere gegebene Kreise zugleich berührt.**

Auch hier läßt sich nach der vorhin angewandten Methode verfahren. Man suche einen mit dem verlangten Kreise concentrischen Hülfskreis zu gewinnen, dessen Umfang durch den Mittelpunkt irgend eines der drei gegebenen geht. Das Mittel dazu liefert die in 5 dieses Capitels gelöste Aufgabe, auf welche sich mittels des Hülfskreises die jetzige reducirt.

Zusatz. Die größte Anzahl von Kreisen, welche drei andere berühren können, ist acht. Darunter sind jedoch nur zwei, welche alle drei gegebene Kreise gleichartig berühren. In besonderen Fällen ist diese Zahl der möglichen Kreise geringer; es kann selbst gar keinen Kreis geben, der der Aufgabe entspricht.

Zweiter Abschnitt.

Neuere Lösung der Hauptaufgabe.

9. Die im Vorhergehenden nach Vieta durchgeführte Behandlung des Tactions-Problems giebt ein gutes Beispiel derjenigen Auflösungs-Methode, welche in der Zurückführung einer schwierigeren Aufgabe auf eine leichtere besteht, deren Construction bekannt ist. Aus diesem Grunde ist sie hier aufgenommen worden. Indessen stellt diese Behandlung, wie sich aus den von Pappus mitgetheilten Lehrsätzen schließen läßt, weder die von Apollonius gegebenen Auflösungen wieder her, noch erschöpft sie den Gegenstand in genügender Weise. Dagegen hat die neuere Geometrie mehrere tiefer in denselben eindringende und dabei höchst zierliche Auflösungen des in Rede stehenden Problems zu Tage gefördert, unter welchen wir eine, die sich durch Allgemeinheit und sonstige Vorzüge besonders empfiehlt, zur Mittheilung in diesem Abschnitte auswählen. Als Vorbereitung dazu schicken wir jedoch Folgendes voran:

10. Zunächst liefert eine Anwendung des in XI. 15 aufgestellten Begriffs der Chordale oder Radical-Achse und der dabei aufgeführten Eigenschaften derselben auf die dritte und fünfte unter den 10 Berührungs-Aufgaben (IX. 20 und 23) einen neuen, förderlichen Ge-

sichtspunkt zu deren Auflösung. Was nämlich die dritte anbelangt, bei der eine Gerade und zwei Punkte gegeben sind, so ist eine gerade Linie, welche durch diese Punkte geht, die Chordale je zweier durch sie gehenden Kreise, also auch die des gesuchten Kreises und irgend eines anderen beliebig durch beide Punkte gezogenen. Wendet man nun auf diese Chordale die im Zusatz 6 von XI. 15 ausgesprochene Eigenschaft an, so erhellt auf der Stelle die Auflösung. — Was ferner die fünfte Aufgabe (IX. 23) betrifft, in der zwei Punkte und ein Kreis gegeben sind, so ist auch hier die durch jene Punkte gehende Gerade eine gemeinschaftliche Chordale beider verlangten Berührungskreise und jedes dritten durch die Punkte sonsthin beschriebenen Kreises. Schneidet dieser letztere den gegebenen Kreis, so ist die gemeinschaftliche Sehne beider die Chordale dieser Kreise; ferner sind die Tangenten an den Berührungspunkten die Chordalen je eines der zwei gesuchten Kreise und des gegebenen. Nach XI. 15, Zusatz 12, treffen sich diese vier Chordalen in einem Punkte, dem so genannten Chordal-Punkt oder Radical-Centrum. Seine Betrachtung liefert gleich den Schlüssel zur Auflösung.

11. Eine zweite Vorbemerkung sei die, daß von den zehn speciellen Aufgaben, welche das Tactions-Problem als besondere Fälle je nach Verschiedenheit der gegebenen Stücke aufstellt, die zehnte, bei welcher drei Kreise gegeben sind, als die Hauptaufgabe betrachtet werden muß, weil sie es ist, die unter gewissen Gesichtspunkten die übrigen Aufgaben als besondere Fälle in sich einschließt und deshalb als die allgemeinste gelten darf. Man braucht nur, um dieses gleich zu erkennen, den Punkt als einen Kreis anzusehen, dessen Radius keine Länge hat oder $= 0$ ist, die gerade Linie aber als einen Kreis, dessen Radius unendlich groß ist. — Ohne daher, wie im vorigen Abschnitte, die einzelnen Aufgaben nach der oben in 1 angenommenen Reihenfolge derselben von Neuem durchzugehen, wenden wir uns sofort zur Hauptaufgabe: einen Kreis zu beschreiben, der drei andere gegebene Kreise berührt, weil nach Auflösung dieser, die der übrigen leicht ihre Erledigung findet.

12. Satz. **Wenn zwei Kreise jeden von zwei anderen Kreisen entweder in gleicher oder ungleicher Art berühren, so liegt im ersten Falle der äußere, im zweiten Falle der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden ersten Kreise in der Chordale der zweiten.**

Beweis. Die Kreise X und Y mögen den Kreis A in M und N,

den Kreis B in P und Q berühren. Sind die Berührungen bei M und N gleichartig, eben so die bei P und Q, so gehen (3) die Geraden MN, PQ beide durch den äußeren Aehnlichkeitspunkt O der Kreise X, Y; sind aber die genannten Berührungen ungleichartig, so gehen MN und PQ beide durch den inneren Aehnlichkeitspunkt O' derselben Kreise X, Y. Im ersten Falle ist nach IX. 13 $MO \times ON = PO \times OQ$, im zweiten $MO' \times O'N = PO' \times O'Q$. Die Punkte O und O' haben daher jeder gleiche Potenz in Beziehung auf die Kreise A, B, gehören deshalb (XI. 15) zu den Punkten der Chordale dieser Kreise.

13. **Satz. Wenn zwei Kreise jeden von drei anderen Kreisen auf ungleiche Art berühren, so fällt der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden ersten Kreise mit dem Chordal-Punkte oder Radical-Centrum der drei letzten Kreise zusammen.**

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus dem vorhergehenden und der im Zusatz 12 bei XI. 15 ausgesprochenen Eigenschaft der Chordalen.

14. **Satz. Bei derselben Voraussetzung ist die Chordale der zwei ersten Kreise (X, Y) eine Aehnlichkeits-Achse der drei letzten (A, B, C).**

Beweis. Berührt der Kreis X drei Kreise A, B, C von außen, der Kreis Y dieselben von innen, so berühren je zwei der Kreise A, B, C jeden der Kreise X, Y auf gleiche Weise; daher liegen (12) die drei äußeren Aehnlichkeitspunkte der Kreise A, B, C in der Chordale von X, Y, oder: diese Chordale ist die äußere Aehnlichkeits-Achse jener Kreise A, B, C. Wenn aber der Kreis X mit zweien der Kreise A, B, C eine äußere, mit dem dritten eine innere Berührung, Y dagegen mit jenen eine innere, mit diesem eine äußere Berührung bildet, so berührt jedenfalls eines der drei Paare A und B, B und C, C und A jeden der Kreise X, Y auf gleiche Art, während die beiden anderen Paare dieselben auf ungleiche Art berühren. Daher liegen (12) der äußere Aehnlichkeitspunkt jenes Paares und die inneren Aehnlichkeitspunkte dieser zwei anderen Paare in der Chordale der Kreise X, Y, oder: diese Chordale ist eine innere Aehnlichkeits-Achse der Kreise A, B, C.

Zusatz. Zur näheren Erläuterung und besseren Uebersicht seien die drei berührten Kreise mit C_1, C_2, C_3 bezeichnet, der äußere Aehnlichkeitspunkt der beiden letzten mit A_1, der innere mit J_1, die Aehnlichkeits-

punkte des ersten und dritten Kreises mit A_2 und J_2, die des ersten und zweiten mit A_3 und J_3, dann ist $A_1A_2A_3$ die äußere Aehnlichkeits-Achse, $A_1J_2J_3$, $A_2J_1J_3$, $A_3J_1J_2$ sind die drei inneren. Wird nun ferner ein Kreis, der beispielsweise den ersten jener drei Kreise von außen, den zweiten von innen, den dritten wieder von außen berührt, kurz durch *aia*, eben so einer, der den ersten von innen, den zweiten und dritten von außen berührt, mit *iaa* bezeichnet u. s. w., so kann man den obigen Satz genauer dahin aussprechen, daß bei der gemachten Voraussetzung

die Aehnlichkeits-Achse		$A_1A_2A_3$	zugleich	Chordale	der	Kreise	*aaa*	u.	*iii*
"	"	$A_1J_2J_3$	"	"	"	"	*aii*	"	*iaa*
"	"	$A_2J_1J_3$	"	"	"	"	*iai*	"	*aia*
"	"	$A_3J_1J_2$	"	"	"	"	*iia*	"	*aai*

ist; denn z. B. die Kreise C_1 und C_2 berühren jeden der Kreise *iia* und *aai* auf einerlei Weise, die Kreise C_1 und C_3 dagegen, sowie auch die Kreise C_2 und C_3 berühren jeden der genannten auf verschiedene Weise. Aus dem ersten Grunde liegt A_3, aus dem zweiten liegen J_1 und J_2 in der Chordale der Kreise *iia* und *aai*. Diese Chordale fällt daher mit der Aehnlichkeits-Achse $A_3J_1J_2$ zusammen. Eben so für die übrigen.

15. **Satz. Berührt ein Kreis zwei andere, so liegen die Berührungspunkte immer mit dem zum ersten Kreise gehörigen Pol der Chordale der beiden anderen Kreise in gerader Linie.**

Beweis. Ein Kreis, dessen Mittelpunkt C, berühre zwei andere Kreise A, B in den Punkten M, N. Zieht man nun an M und N zwei Tangenten, die sich in O treffen mögen, so ist $OM = ON$, folglich liegt O auf der Chordale RS der Kreise A, B. Am Kreise C ist aber MN die Polare von O, und da (XIII. 36) die Polaren aller Punkte von RS sich im Pole dieser RS treffen, so muß dieser Pol in der Geraden MN liegen.

16. Die vorstehenden Sätze führen combinirt zu Folgendem:

Soll jeder von drei Kreisen C_1, C_2, C_3 durch zwei andere, z. B. durch *aia* und *iai* (nach der im Zusatz zu 14 gebrauchten Bezeichnungsweise) ungleichartig berührt werden, so müssen die Berührungspunkte eines der drei ersten, z. B. des Kreises C_2, mit den beiden Kreisen *aia* und *iai* einerseits (3) mit dem inneren Aehnlichkeitspunkte dieser letzteren, also auch (13) mit dem Chordalpunkte der drei ersten Kreise, andererseits auch (15) mit dem zum Kreise C_2 gehörigen Pol der

Chordale von *aia*, *iai*, das ist (14) dem Pol der Aehnlichkeits-Achse $A_2J_1J_3$ in gerader Linie liegen. Da nun, wenn drei Kreise gegeben sind, auch deren Chordalpunkt, die Aehnlichkeits-Achsen und deren Pole an jenen Kreisen gegeben sind und gefunden werden können, so ergiebt sich folgende

Construction der acht Kreise, welche drei gegebene berühren:

Man suche den Chordalpunkt (oder das Radical-Centrum) O der drei Kreise, ihre vier Aehnlichkeits-Achsen und deren zwölf Pole zu den gegebenen Kreisen. Zieht man nun von O aus nach jedem dieser Pole eine gerade Linie, so sind die Durchschnitte dieser zwölf Linien mit den gegebenen Kreisumfängen die 24 Berührungspunkte der drei gegebenen Kreise mit den acht gesuchten. Die nach diesen Berührungspunkten gezogenen Radien der ersten geben mittels ihres Durchschnitts die Mittelpunkte der letzteren.

17. In Beziehung auf diese Construction bemerken wir nur noch Folgendes:

a) Die vom Chordalpunkte O auf diese vier Aehnlichkeits-Achsen gefällten vier Perpendikel sind die Centralen der in 14, Zusatz, angegebenen vier Paare von Berührungskreisen, nämlich:

das Perpendikel	von O	auf $A_1A_2A_3$	die Centrale	von	*aaa*,	*iii*
"	"	" " " $A_1J_2J_3$	"	"	" *aii*,	*iaa*
"	"	" " " $A_2J_1J_3$	"	"	" *iai*,	*aia*
"	"	" " " $A_3J_1J_2$	"	"	" *iia*,	*aai*

b) Die vier Pole der Aehnlichkeits-Achsen an jedem der drei gegebenen Kreise sind die Ecken eines Parallelogramms, dessen Seiten paarweise senkrecht auf denjenigen zwei Centralen der gegebenen Kreise stehen, welche am Mittelpunkte des betreffenden Kreises liegen, zu dem die Pole gehören.

Der Beweis zu a) gründet sich auf 14 und darauf, daß die Chordale zweier Kreise auf der Centrale derselben senkrecht steht; der Beweis zu b) ist auf XIII. 36 zu bauen, und bleibt die Ausführung beider der Selbstübung überlassen.

Dritter Abschnitt.

Die übrigen Fälle.

18. Will man die oben (16) angegebene Construction der Hauptaufgabe auf die übrigen Fälle des Tactions-Problems anwenden, in welchen statt des einen oder anderen dreier Kreise eine gerade Linie oder ein Punkt gegeben ist, so hat man vor Allem die Modificationen festzustellen, welche in der Bestimmung der Chordale und der Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise zu treffen sind, wenn an die Stelle dieser: 1. ein Kreis und ein Punkt, 2. ein Kreis und eine gerade Linie; 3. zwei gerade Linien, 4. eine gerade Linie und ein Punkt, 5. zwei Punkte treten. Man erhält dieselben leicht durch Aufsuchung der Grenzen, welchen einerseits die Chordale, andererseits die Aehnlichkeitspunkte sich nähern, wenn der eine und andere Halbmesser der zu Grunde liegenden Kreise ohne Ende ab- oder zunimmt, und in die sie übergehen, wenn der Halbmesser $= 0$ oder ∞ wird. Das Resultat solcher Untersuchung ist folgendes:

19. In Betreff der Chordale:

a) Die Chordale für Kreis und Punkt ist schon oben XI. 16 definirt. Liegt der Punkt im Umfange, so ist die Tangente in ihm zugleich die Chordale.

b) Die Chordale für Kreis und gerade Linie ist jedenfalls diese gerade Linie selbst. In Beziehung auf die im Zusatz 6 von XI. 15 ausgesprochene Eigenschaft der Chordale gelten nun zwei auf dieser zu beiden Seiten des Punktes, von dem zwei Tangenten an den Kreis auslaufen, diesen letzteren gleich genommene Stücke als Tangenten des zweiten, nun unendlich großen Kreises.

c) Für zwei gerade Linien sind es die beiden Halbirungslinien der Winkel, welche diese bilden, in welche die Chordale übergeht, wenn man die Radien beider Kreise unendlich groß setzt.

d) Die Chordale für Punkt und gerade Linie ist wie bei b) diese gerade Linie selbst.

e) Für zwei Punkte endlich ist die Chordale das auf der Verbindungslinie beider in deren Mitte zu errichtende Perpendikel.

20. In Betreff der Aehnlichkeitspunkte:

a) Für einen Kreis und eine gerade Linie fallen diese Punkte mit den Endpunkten eines gegen die gerade Linie senkrecht gerichteten Durchmessers zusammen. Der von der geraden Linie entferntere dieser Endpunkte (zugleich der entfernteste Punkt des Umfanges von ihr) ist der äußere, der andere der innere Aehnlichkeitspunkt.

b) Bei einem Systeme von Kreis und Punkt fallen beide Aehnlichkeitspunkte mit diesem Punkte zusammen.

c) Bei zwei geraden Linien liegen die in Rede stehenden Punkte unendlich weit ab, d. h. existiren nicht.

d) Für gerade Linie und Punkt ist, wie bei b), dieser letztere zugleich innerer und äußerer Aehnlichkeitspunkt.

e) Für zwei Punkte endlich vertritt die Mitte der sie verbindenden geraden Linie den inneren Aehnlichkeitspunkt; der äußere besteht nicht.

21. Wendet man nun nach diesen Feststellungen die in 16 mitgetheilte Construction der Hauptaufgabe auf die übrigen Fälle des Tactions-Problems an, in denen wenigstens ein Kreis gegeben ist, so ergeben sich, unter Benutzung der sich leicht darbietenden Vortheile in der Bestimmung der Pole, folgende, durch neuere Bemühungen gefundenen Auflösungen der einzelnen Berührungs-Aufgaben, die in besonderen Fällen noch mancher Vereinfachung fähig sind:

22. Sind zwei Punkte A, B und ein Kreis C gegeben, so ist die gerade Linie AB die einzige Aehnlichkeits-Achse des Systems. Man bestimme daher den Pol derselben, so wie den Chordalpunkt zu ihnen und dem gegebenen Kreise; derselbe hat gleichen Abstand von den Punkten A, B. Zieht man nun durch Pol und Chordalpunkt eine gerade Linie, so trifft diese den Umfang des Kreises C in zwei Punkten; es sind die Berührungspunkte der gesuchten Kreise mit dem gegebenen C. Die nach ihnen gezogenen Radien des letzteren geben mittels ihres Durchschnitts mit dem auf AB in der Mitte dieser Linie errichteten Perpendikel die Mittelpunkte.

23. Ist ein Kreis C, ein Punkt A und eine gerade Linie GL gegeben, so ziehe man den gegen GL senkrechten Durchmesser DE des Kreises C und verbinde A sowohl mit D als mit E. Die

Linien *AD*, *AE* sind die beiden einzigen Aehnlichkeits-Achsen des Systems. Die Pole derselben liegen im Durchschnitte der Polare von *A* mit zweien durch *D* und *E* parallel mit *GL* gezogenen Tangenten. Der Chordalpunkt dagegen liegt da, wo die Chordale von *A* und *C* die gegebene *GL* trifft. Verbindet man diesen Chordalpunkt mit den beiden Polen von *AD* und *AE*, so bestimmen die Verbindungslinien auf dem Kreisumfange die vier Berührungspunkte dieses letzteren mit den verlangten Kreisen. Die Berührungspunkte dieser letzteren mit der geraden Linie *GL* werden durch Satz 2 geliefert. Die Mittelpunkte ergeben sich hiernach von selbst.

24. Sind zwei Kreise, deren Mittelpunkte *C*, *D* sind, und ein Punkt *A* gegeben, so fungiren die beiden Geraden, welche *A* mit dem inneren und äußeren Aehnlichkeitspunkte der Kreise verbinden, als Aehnlichkeits-Achsen, deren bei diesem Systeme nicht mehr als zwei sind. Die Pole derselben haben paarweise eine homologe Lage in beiden Kreisen und die sie an jedem Kreise verbindenden Linien stehen senkrecht auf *AC* und *AD*. Den Chordalpunkt erhält man in mancher Art, je nach der Construction der Chordalen, unter andern mittels eines beliebigen durch *A* zu beschreibenden Kreises, wofern derselbe die gegebenen schneidet. Ist der Chordalpunkt bestimmt, so hat man ihn nur mit den vier Polen zu verbinden, um nach Anleitung der Haupt-Construction in 16 die acht Punkte zu erhalten, in welchen die zwei gegebenen Kreise von vier anderen, die zugleich durch *A* gehen, im Allgemeinen berührt werden können. Nachdem sie gefunden, sind auch die Mittelpunkte gleich zu bestimmen.

25. Am zierlichsten gestaltet sich die Construction, wenn zwei gerade Linien und ein Kreis gegeben sind. Der Durchschnittspunkt *A* jener Linien spielt nun die Rolle des Chordalpunktes; die Aehnlichkeits-Achsen aber bilden ein in den Kreis beschriebenes Rechteck, dessen Diagonalen auf den gegebenen Geraden senkrecht stehen. Die Pole dieser Achsen liegen offenbar in den Eckpunkten eines dem gegebenen Kreise umschriebenen Rhombus, dessen Seiten den gegebenen Linien parallel sind. Man beschreibe daher diesen Rhombus und verbinde seine Ecken mit dem Durchschnittspunkte der gegebenen Geraden. Die acht Punkte, in denen die vier Verbindungslinien den gegebenen Kreis möglicherweise schneiden, sind die Berührungspunkte desselben mit den verlangten Kreisen. Die nach ihnen gezogenen Radien und die Halbirungslinien

der Winkel, welche die gegebenen Geraden bilden, geben mittels ihres Durchschnitts die Mittelpunkte.

26. Wenn endlich zwei Kreise und eine gerade Linie gegeben sind, so liegt zuvörderst der Chordalpunkt des Systems da, wo die Chordale der beiden Kreise die gegebene gerade Linie trifft. Was die vier Aehnlichkeits-Achsen betrifft, so fungiren als solche hier die vier geraden Linien, welche die Endpunkte zweier auf der gegebenen Geraden senkrechten Durchmesser der Kreise verbinden. Die Pole dieser Achsen gewinnt man leicht, denn sie liegen paarweise in den vier Geraden, welche sich durch die genannten vier Endpunkte der senkrechten Durchmesser parallel mit der gegebenen Linie ziehen lassen. Das Uebrige folgt ganz der zur Haupt-Aufgabe angegebenen Construction. Im Ganzen sind, wie bei dieser, acht Berührungskreise möglich, ihr wirkliches Vorhandensein in jedem besonderen Falle hängt aber hier wie überall von der Wirklichkeit des Durchschnitts der gegebenen Kreise mit den geraden Linien ab, welche den Chordalpunkt mit den genannten Polen verbinden.

Anhang I.

Zu Capitel V., Abschnitt 2, Nr. 36, über ungleiche Verhältnisse (Disproportionen).

Den im 2. Abschnitte des V. Capitels aufgestellten Sätzen über gleiche Verhältnisse oder Proportionen lassen sich fast eben so viele, die Ungleichheit zweier Verhältnisse betreffende Sätze zur Seite stellen, deren Kenntniß zwar weniger wichtig, doch nicht unnütz ist. Der Vollständigkeit wegen führen wir sie hier nach der Ordnung, wie sie jenen entsprechen, in einfachen Schematen, ohne wörtlichen Ausdruck, nachträglich auf, und überlassen den Beweis eines jeden, der überall in derselben Weise, wie im Capitel V., mittels der so genannten Verhältniß-Exponenten leicht zu führen ist, dem Leser zur eigenen Ausführung.

1. Wenn $A : B > C : D$ und $A =$ oder $< B$, so ist $C < D$.
$A : B > C : D$ und $C =$ oder $> D$, so ist $A > B$.
Dagegen läßt sich aus $A > B$ und $C < D$ nichts schließen.

2. Sind die vier Größen gleichartig, d. h. der Größe nach vergleichbar, und $A =$ oder $< C$, so ist $B < D$,
und wenn $B =$ oder $> D$, so ist $A > C$,
Aus $A > C$ und $B < D$ läßt sich aber wieder nichts schließen.

3. Wenn $A : B > C : D$, so ist auch $mA : mB > nC : nD$, wo m, n beliebige Zahlen bezeichnen.

4. Auch ist $mA : nB > mC : nD$; ferner $mA : nB > \frac{C}{n} : \frac{D}{m}$ oder $\frac{A}{n} : \frac{B}{m} > mC : nD$.

5. Ist $A > B$, so ist $K \pm A : K \pm B < A : B$, dagegen $A - K : B - K > A : B$.

Ist $A < B$, so ist $K \pm A : K \pm B > A : B$, dagegen $A - K : B - K < A : B$.

6. Wenn $A : B > C : D$, so ist umgekehrt $B : A < D : C$.

7. Sind die vier Größen gleicher Art, so ist in derselben Voraussetzung $A : C > B : D$ und $D : B > C : A$.

8. Wenn $A : B > C : D$, so ist $A \pm B : B > C \pm D : D$, dagegen $B - A : B < D - C : D$; ferner $B \pm A : A < D \pm C : C$, dagegen $A - B : A > C - D : C$.

9. In demselben Falle ist noch, wenn:

$$A > B \ldots\ldots A + B : A - B < C + D : C - D,$$
$$A < B \ldots\ldots A + B : B - A > C + D : D - C.$$

10. Sind die vier Größen gleichartig, so ist auch:

$A \pm C : B \pm D > C : D$, dagegen $C - A : D - B < C : D$,
$C \pm A : D \pm B < A : B$, dagegen $A - C : B - D > A : B$.

11. Bei derselben Voraussetzung ist noch:

$$A + C : B + D < A - C : B - D,$$
dagegen $A + C : B + D > C - A : D - B$.

12. Wenn $A : B > C : D$, und dabei:

$B : E \overset{=}{>} D : F$ oder $E : B \overset{=}{<} F : D$, so ist $A : E > C : F$.
$A : E \overset{=}{<} C : F$ oder $E : A \overset{=}{>} F : C$, so ist $B : E < D : F$.

13. Wenn $A : B > C : D$, und dabei:

$B : E \overset{=}{>} F : C$ oder $E : B \overset{=}{<} C : F$, so ist $A : E > F : D$.
$A : E \overset{=}{<} F : D$ oder $E : A \overset{=}{>} D : F$, so ist $B : E < F : C$.

14. Wenn $A : B > C : D$ und $E : B > F : D$, so ist auch $A + E : B > C + F : D$.

Eben so, wenn $A : B > C : D$ und $A : E > C : F$, so ist auch $A : B + E > C : D + F$.

15. Ist $A : B > C : D$ und $E : F > G : H$, so ist das aus den beiden größeren Verhältnissen $A : B$ und $E : F$ zusammengesetzte $>$ als das aus den beiden kleineren $C : D$ und $G : H$ zusammengesetzte.

16. Sind m, n, p, q Zahlen und $A : B > m : n$, $C : D \underset{=}{>} p : q$, so ist ein aus $A : B$ und $C : D$ zusammengesetztes Verhältniß $>$ als das der Producte $mp : nq$.

Zusatz. Ist $m : n > p : q$, so ist $mq > np$, und umgekehrt, wenn $mq > np$, so ist $m : n > p : q$.

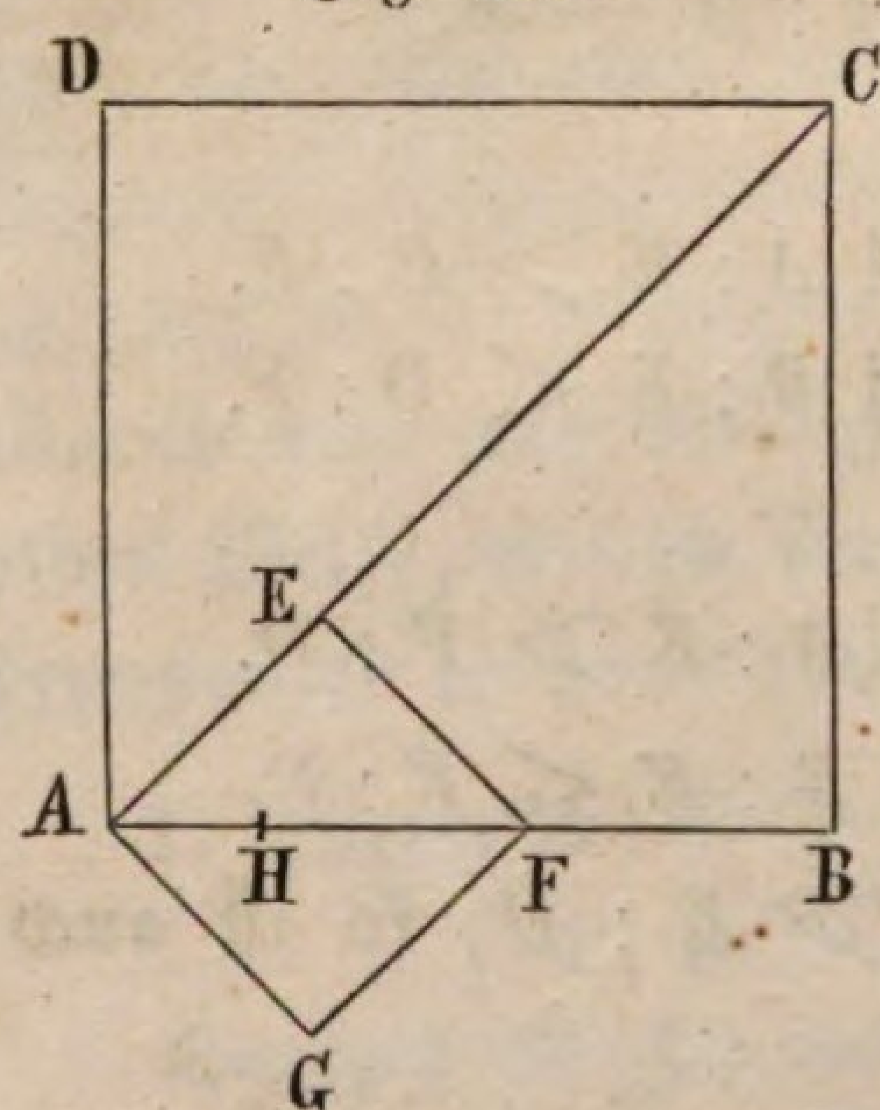
Anhang II.

Zu Capitel V., Nr. 69, über einige irrationale Verhältnisse.

1. Verhältniß der Diagonale eines Quadrats zur Seite desselben.

Um dieses Verhältniß zu finden, kommt es nur darauf an, zu ermitteln, wie oft der Unterschied zwischen der Diagonale eines Quadrats und dessen Seite in der Seite selbst enthalten, und wie der Rest beschaffen ist. $ABCD$ sei ein Quadrat, AC eine seiner Diagonalen. Zieht man von dieser die Seite ab, indem man von C nach A hin $CE = CB$ oder $= AB$ nimmt, so ist der Rest $AE < AB$. In E errichte man $EF \perp AC$ und vollende das Rechteck $AEFG$. Leicht ist zu zeigen, daß $AE = EF = FB$, daher $AEFG$ ein Quadrat ist. Nimmt man in diesem $FH = FE$, so ist $AH < AE$ und $AB = 2AE + AH$, d. h.:

Fig. 298.



„Die Seite eines jeden Quadrats (AB) enthält den Ueberschuß (AE) der Diagonale über diese Seite zweimal nebst einem Reste (AH), welcher wieder der Unterschied zwischen Diagonale und Seite eines über jenem ersten Unterschiede errichteten Quadrats ist."

Hieraus folgt nun: Bildet man eine Reihe von Quadraten, so daß vom zweiten an die Seite eines jeden dem Unterschiede zwischen Diagonale und Seite des vorangehenden gleich ist, und bezeichnet die Seite dieser Quadrate der Ordnung nach durch a, a', a'', a''', ..., die Diagonale des ersten mit d, so ist:

$$d = a + a',$$
$$a = 2a' + a'',$$
$$a' = 2a'' + a''',$$
$$a'' = 2a''' + a'''' \text{ ꝛc.};$$

daraus zieht man:

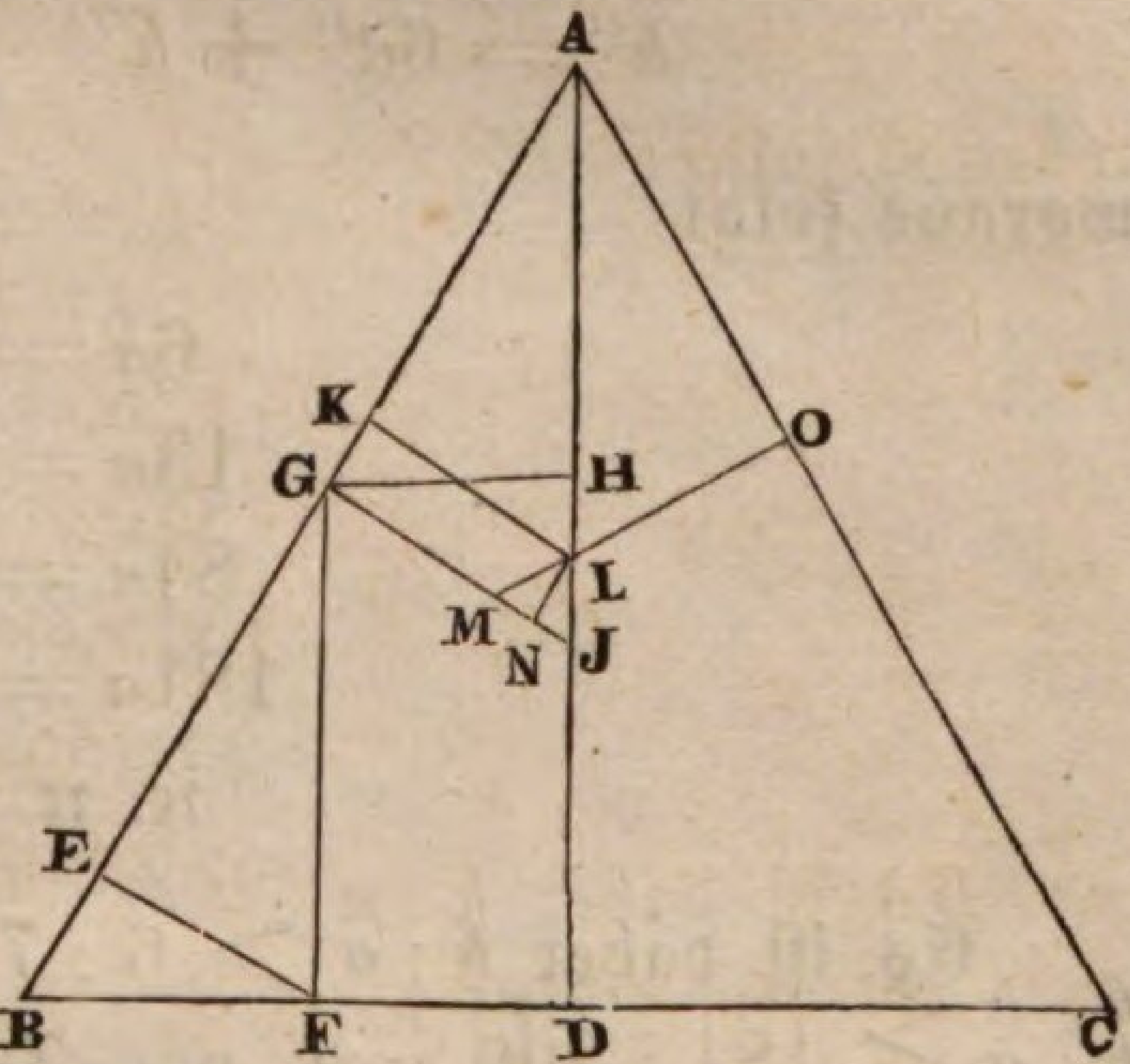
$$2d = 3a - a'',$$
$$5d = 7a + a''',$$
$$12d = 17a - a'''',$$
$$29d = 41a + a''''' \text{ rc.}$$

Es ist daher $x:a > 1:1$, $x:a < 3:2$, $x:a > 7:5$, $x:a < 17:12$ u. s. w. Diese Zahlverhältnisse sind abwechselnd größer und kleiner als das genaue irrationale Verhältniß von d zu a; jedes derselben nähert sich aber diesem letzteren mehr als das vorhergehende, und drückt dabei diese Näherung in den kleinsten ganzen Zahlen aus.

2. Verhältniß der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks zur Seite desselben.

ABC sei ein gleichseitiges Dreieck, $AD \perp BC$ dessen Höhe. Nimmt man auf AB ein Stück $AE = AD$, so ist BE der Unterschied zwischen Höhe und Seite des Dreiecks, und es kommt darauf an, zu bestimmen, wie oft dieser Unterschied in AD enthalten ist. Zu dem Ende errichte man $EF \perp AB$, in F, wo EF die BC in F trifft, $FG \perp BC$, und ziehe durch G $GH \parallel BC$. Leicht wird nun erkannt, daß $BF = 2BE$, $BG = 2BF = 4BE$, also $GE = 3BE$. Da aber $EF = FD = GH$, so ist $\triangle GEF \simeq AHG$, daher auch $AH = 3BE$. Nimmt man nun $AK = AH$, so ist $EG + KA = 6BE$; mithin enthält die Höhe AD des Dreiecks sechs Mal den Unterschied BE nebst dem Stücke GK. Um weiter zu ermitteln, wie oft GK in BE enthalten sei, errichte man auf AB in K und G die Senkrechten KL, GJ, welche AD in L und J treffen, ziehe durch L die $MO \perp AC$, welche GJ in M trifft, und fälle noch $LN \perp MJ$. Es ist dann $\triangle AKL \simeq AHG$, $\triangle GHJ \simeq BEF$, $HL = GK = LN$, $HJ = BE$, MLJ aber ein gleichseitiges Dreieck, dessen Höhe $LN = GK$. Da LN in LJ nur ein Mal enthalten ist, so ist GK in HJ oder der gleichen Linie BE zwei Mal enthalten nebst einem Rest, der wieder der Unterschied zwischen Seite und Höhe des gleichseitigen Dreiecks MLJ ist. Hieraus folgt nun:

Fig. 299.



Bildet man eine Reihe gleichseitiger Dreiecke, so daß vom zweiten an die Höhe (LN) eines jeden dem Ueberschusse (GK) der Höhe des vorhergehenden (AD oder AE) über den 6fachen Unterschied zwischen Höhe und Seite desselben (BE) gleich ist, bezeichnet dann die Seiten dieser Dreiecke der Ordnung nach durch a, a', a'', ..., die Höhen durch h, h', h'', ..., die Unterschiede zwischen diesen und jenen mit d, d', d'', ..., so daß

$$\begin{array}{ll} a - h = d, & h' = h - 6d, \\ a' - h' = d', & h'' = h' - 6d', \\ a'' - h'' = d'', & h''' = h'' - 6d'' \text{ ꝛc.}, \end{array}$$

so ist nicht allein vermöge dieser Bezeichnungen $a = h + d$, sondern auch, vermöge obiger Construction,

$$\begin{array}{ll} h = 6d + h' & d = 2h' + d', \\ h' = 6d' + h'' & d' = 2h'' + d'', \\ h'' = 6d'' + h''' & d'' = 2h''' + d''' \text{ ꝛc.}, \end{array}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} 6a &= 7h - h', \\ 13a &= 15h + d', \\ 84a &= 97h - h'', \\ 181a &= 209h + d''. \end{aligned}$$

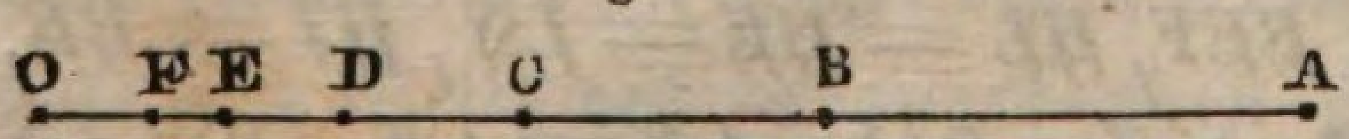
ꝛc. ꝛc.

Es ist daher $h : a > 6 : 7$, $h : a < 13 : 15$, $h : a > 84 : 95$, $h : a < 181 : 209$ u. s. w. Die zu Ende der vorigen Nummer gemachten Bemerkungen gelten auch hier.

3. Verhältniß einer nach dem goldenen Schnitte getheilten Linie zum größeren Abschnitte und dieses zum kleineren.

Theilt man eine gerade Linie OA in B nach dem goldenen Schnitte d. h. so, daß $OA : OB = OB : BA$, nimmt dann $OC = BA$, $OD = CB$, $OE = DC$, $OF = ED$ ꝛc., so läßt

Fig. 300.



sich durch Anwendung von V. 28 leicht zeigen, daß auch OB in C, OC in D, OD in E u. s. w. nach dem goldenen Schnitte oder nach stetiger Proportion getheilt sind. Zur Kürze setze man $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, dann ist:

$$
\begin{aligned}
a &= b + c, \text{ woraus folgt: } & a &= 2b - d,\\
b &= c + d, & 2a &= 3b + e,\\
c &= d + e, & 3a &= 5b - f,\\
&\text{ꝛc.} & 5a &= 8b + g,
\end{aligned}
$$

mithin $a:b < 2:1$, $a:b > 3:2$, $a:b < 5:3$, $a:b > 8:5$.

Jedes dieser Zahlenpaare entsteht durch einfache Addition aus den beiden vorhergehenden*); die Verhältnisse, welche sie ausdrücken, nähern sich immer mehr dem irrationalen Verhältnisse je zweier auf einander folgenden der Linien a, b, c, d .... sind aber dabei, wie oben, abwechselnd größer und kleiner als dieselben.

---

*) Anm. Ueber das Nähere dieser Zahlen 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, welche in einer merkwürdigen Beziehung zur Pflanzenwelt stehen, vergleiche man Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik u. Algebra §. 85 Nr. 17 und §. 107 Nr. 36.

Druckfehler,

vor dem Gebrauche des Buches zu verbessern:

S. 149 Z. 1 v. u. statt $d = \frac{1}{2}b(\sqrt{5} - 1)$ lies $d = \frac{1}{2}b(\sqrt{5} + 1)$ und statt $b = \frac{1}{2}d(\sqrt{5} + 1)$ lies $b = \frac{1}{2}d(\sqrt{5} - 1)$.

Heis, Eduard, 1806-1877 / Heis, Eduard, / Eschweiler, Thomas J.

Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten

Bd.: 1

Köln 1858